

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ РАКЕТ КЛАССА «ВОЗДУХ—ВОЗДУХ» И АВИАЦИОННЫХ КАТАПУЛЬТНЫХ УСТАНОВОК ДЛЯ НИХ

Под общей редакцией профессора,
доктора технических наук В.А. Нестерова

Рекомендовано Министерством общего и профессионального
образования Российской Федерации в качестве учебника для
студентов высших учебных заведений, обучающихся
по направлению «Авиа- и ракетостроение»



Москва
Издательство МАИ
1999

ББК 13.4

О 75 Федеральная целевая программа книгоиздания России

Авторы:

В.А. Нестеров, Э.Е. Пейсах, А.Л. Рейдель,
Г.А. Соколовский, А.И. Станкевич

Рецензенты:

кафедра «Конструкция и проектирование двигателей ЛА»
Самарского государственного аэрокосмического университета,
академик РАН, д-р техн. наук, проф. Р.Ф. Ганиев

О 75 Основы проектирования ракет класса «воздух-воздух» и авиационных катапультных установок для них: Учебник/В.А. Нестеров, Э.Е. Пейсах, А.Л. Рейдель и др.; Под общей редакцией В.А. Нестерова. — М.: Изд-во МАИ, 1999. — 792 с.: ил.

ISBN 5-7035-1949-7

Изложены основополагающие идеи, принципы построения и функциональные технические решения при проектировании ракет класса «воздух-воздух», математические модели их подсистем, приведены основные характеристики ракет. Рассмотрены вопросы структуры, кинематики и динамики (анализ и синтез) рычажных механизмов авиационных катапультных установок, а также пути совершенствования перспективных АКУ на основе использования адаптивных схем управления. Рассмотрены методы определения вибродинамических характеристик ракет класса «воздух-воздух».

Материалы книги отражают многолетний опыт авторов по проектированию и созданию ракет класса «воздух-воздух» и авиационных катапультных установок для них.

Для студентов авиационных и других технических вузов, а также для научных работников и инженеров, специализирующихся в области проектирования ракет класса «воздух-воздух», АКУ и других сложных механических систем.

In this textbook fundamental ideas, principles of construction and functional technical decisions when designing air-to-air missiles, mathematical models of their subsystems are expounding; the basic missile characteristics are adducing.

The problems of structure, kinematics and dynamics (analysis and synthesis) of levered mechanisms of aircraft catapult devices as well, as the perfection ways of the perspective aircraft catapult devices on the base of using of the adaptive control circuits are considering.

Vibrodynamic characteristics determination methods of the air-to-air missiles are considering.

The materials of the book represent of many years author's experience about designing and creating of air-to-air missiles and aircraft catapult devices for them.

For the students of aviation and others technical institutes, also for the scientists and engineers, which have a specialization in the sphere of air-to-air missiles designing, also in the sphere of the designing of aircraft catapult devices and others complex mechanical systems.

О $\frac{1304000000 - 279}{094(02) - 99}$

ББК 13.4

ISBN 5-7035-1949-7

© В.А. Нестеров, Э.Е. Пейсах, А.Л. Рейдель,
Г.А. Соколовский, А.И. Станкевич, 1999

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном учебнике рассматриваются основы проектирования ракет класса «воздух-воздух» и авиационных катапультированных установок для них. Книга состоит из трех разделов.

В первом разделе приводятся основные характеристики ракеты и их оценки с позиций эффективности авиационных боевых комплексов (АБК), математические модели ее подсистем и основы проектирования облика ракеты, в том числе автоматизированного. При написании раздела упор делался на изложение основополагающих идей, принципов построения и фундаментальных технических решений.

Тематика раздела отражает опыт, накопленный его авторами за более чем сорокалетний период их деятельности по созданию ракет рассматриваемого класса.

Во втором разделе даны структура, кинематика и динамика (анализ и синтез) рычажных механизмов авиационных катапультированных установок (АКУ). Материалы раздела отражают современные достижения теории механизмов и динамики машин, ориентированы на эффективное использование вычислительной техники и проиллюстрированы большим числом примеров проектирования АКУ минимальной массы с улучшенными кинематическими, динамическими и функциональными характеристиками.

Во втором разделе рассмотрены также пути совершенствования перспективных АКУ на основе использования адаптивных схем управления.

В третьем разделе рассмотрены методы определения вибродинамических характеристик ракет класса «воздух-воздух» при совместном полете с самолетом-носителем и в автономном полете.

Следует отметить, что ввиду разнообразия физических и математических моделей разные величины могут иметь одинаковые обозначения. Однако в тексте всегда даются необходимые пояснения.

Главы 1—15 и глава 23 написаны А.Л. Рейделем и Г.А. Соколовским совместно, главы 20—22 — В.А. Нестеровым, главы 16—18 — В.А. Нестеровым и Э.Е. Пейсахом совместно, глава 19 — Э.Е. Пейсахом, главы 24—26 — А.И. Станкевичем.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

АБК	— авиационный боевой комплекс
АВМ	— аналоговая вычислительная машина
АК	— автономный контур
АКОР	— аналитическое конструирование регуляторов
АКУ	— авиационная катапультная установка
АРГС	— активная радиолокационная головка самонаведения
АУР	— авиационная управляемая ракета
БАС	— беспойсковая адаптивная система
БРЛС	— бортовая радиолокационная станция
ВБ	— воздушный бой
ВЗВП	— всенаправленная зона возможных пусков
ВПП	— взлетно-посадочная полоса
ГВЗВП	— гарантированная всенаправленная зона возможных пусков
ГЗВП	— гарантированная зона возможных пусков
ГСН	— головка самонаведения
ДЛУ	— датчик линейных ускорений
ДУС	— датчик угловых скоростей
ЗВП	— зона возможных пусков
ЗД	— зона достижимости
ЗО	— зона отлетов
ЗПС	— задняя полусфера самолета
ИСУ	— инерциальная система управления
КН	— контур наведения
КС	— контур стабилизации
КТАУ	— классическая теория автоматического управления
ЛКИ	— лётно-конструкторские испытания
ЛТХ	— лётно-тактические характеристики ракеты
ММ	— математическая модель
МСА	— международная стандартная атмосфера
О	— объект

ОДЗ	— область допустимых значений
ПАРГС	— полуактивная радиолокационная головка самонаведения
ПОС	— паразитная обратная связь
ППС	— передняя полусфера самолета
РБД	— ракета большой дальности
РГС	— радиолокационная головка самонаведения
РМД	— ракета малой дальности
РО	— расширенный объект
РСД	— ракета средней дальности
РНП	— режим непрерывного подсвета
СиМ	— силы и моменты
СК	— система координат
СКО	— среднеквадратическое отклонение
СНП	— сопровождение на проходе
СТАУ	— современная теория автоматического управления
ТАУ	— теория автоматического управления
ФАР	— фазированная антенная решетка
ФКБ	— фильтр Калмана-Бьюси
ФОР	— функционалы обобщенной работы
ЭПР	— эффективная поверхность рассеивания

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАКЕТЫ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОДСИСТЕМ И ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОБЛИКА РАКЕТ

Глава 1. РАКЕТА КЛАССА «ВОЗДУХ—ВОЗДУХ» КАК ЭЛЕМЕНТ АВИАЦИОННОГО БОЕВОГО КОМПЛЕКСА

§ 1.1. БОЕВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АБК

Ракеты класса «воздух-воздух» являются основным оружием авиационных боевых комплексов (АБК), в связи с чем их характеристики оказывают существенное влияние на эффективность АБК.

Вопросам оценки эффективности объектов военного назначения, к которым относятся как АБК, так и ракеты рассматриваемого класса, в последнее время уделяется повышенное внимание, в частности, в работах В.Е. Руднева [1, 2].

Боевая эффективность АБК определяется здесь как способность комплекса в составе взаимодействующих с ним систем решать боевые задачи. Способность эта проявляется в боевой операции и зависит от ее конкретных целей и методов проведения. Поэтому представление показателей эффективности всегда конкретно, а задача ее оценки не имеет однозначного решения. К числу боевых операций (типовых задач) для АБК фронтовых истребителей относится задача завоевывания господства в воздухе, под которой понимается лишение противника возможности применять свою авиацию в заданном районе в течение заданного времени. Эта задача может быть формализована. Для этого должны быть заданы параметры пространства и время, в течение которого должно быть обеспечено господство, ха-

рактеристики противника и показатель ущерба противника, при котором задача считается решенной (например, уменьшение текущей численности до недопустимых пределов).

К числу других типовых задач относятся дальний ракетный бой и ближний маневренный бой, которые могут быть как одиночными, так и групповыми.

Для решения этих задач комплекс должен располагать достаточным ракетным боекомплектом, в том числе смешанным, состоящим из ракет различных типов.

К числу показателей эффекта, используемых для оценки качества решения боевой задачи АБК, относятся: вероятности победы противоборствующих истребителей в воздушном бою один на один (необходимость рассмотрения двух показателей следует из того, что вероятность победы противника равна вероятности гибели нашего самолета), математическое ожидание потерь сторон в групповом бою и т.д. Эти показатели эффекта АБК в существенной степени зависят от летно-тактических характеристик (ЛТХ) ракеты.

Поскольку ракета является совокупностью поражающего средства и динамической системы, решающей задачу доставки этого средства к цели, эти характеристики ракеты должны отражать ее способность изменить в заданное время свое состояние (в общем случае — фазовое), т.е. совершить маневр и причинить цели требуемый ущерб.

Поэтому в качестве ЛТХ ракеты рассматриваются вероятность поражения цели одной ракетой, размеры зон возможного применения. Эти зоны определяются в различных системах координат и в совокупности обеспечивают оценку эффективности АБК в различных боевых операциях.

Остановимся кратко на системе вооружения современных АБК. Основу этого вооружения составляют авиационные управляемые ракеты (АУР) класса «воздух-воздух», являющиеся основным боевым средством поражения воздушных целей и в существенной мере определяющие облик АБК. Ракеты этого класса принято делить на три типа:

1. Ракеты малой дальности (РМД), предназначенные, в основном, для атаки цели из ЗПС. Это легкие (~ 100 кг) ракеты с тепловыми головками самонаведения. В последнее время эти ракеты используются и для ближнего воздушного боя, что при-

водит к необходимости совершенствования их маневренных характеристик.

2. Ракеты **средней дальности (РСД)**, предназначенные для поражения всех типов воздушных целей днем и ночью, в сложных метеоусловиях и при наличии организованных помех. Это ракеты массой до 200 ... 250 кг, в основном с радиолокационными головками самонаведения.

3. Ракеты **большой дальности (РБД)**, предназначенные для перехвата целей в особо сложных условиях, на дальних рубежах обороны. Это уникальные по сложности и стоимости ракеты массой 350 ... 500 кг с радиолокационными (в том числе комбинированными) головками самонаведения.

§ 1.2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СБЛИЖЕНИЯ И АТАКИ ВОЗДУШНОЙ ЦЕЛИ

Выполняя боевую задачу и решая задачу доставки оружия (ракет «воздух-воздух») самолет должен сблизиться с целью. Эта, на первый взгляд, обычная задача кинематики полета является специфической по следующим причинам [1]:

1. Анализу подлежат характеристики относительного движения по отношению к цели, которые для случая подвижной маневрирующей цели существенно отличаются от абсолютного.

2. Граничные условия движения на конечном участке траектории должны отвечать условиям применения ракет и в существенной степени определяются характеристиками ракеты, ее зонами возможных пусков (ЗВП).

Большую пользу в изучении этих задач может дать предварительный кинематический анализ траекторий сближения. При проведении такого анализа и в зависимости от его специфики используются различные системы координат (СК). Наиболее употребительны абсолютная СК и две относительные СК, одна из которых совмещена с целью, другая со стреляющим самолетом. В дальнейшем условимся: стреляющий (наш) самолет будем обозначать № 1, самолет противника (цель) — № 2. Анализ начнем с использования абсолютной СК, связанной с неподвижным пространством. Введем следующие обозначения (рис. 1.1, а): $\Theta_{1,2}$ — траекторные углы самолетов (углы между векторами скоростей самолетов и направлением отсчета); D — дальность между самолетами; ε — угол визирования (угол, ко-

ординирующий положение линии дальности по отношению к направлению отсчета); φ — угол пеленга (угол между вектором скорости самолета № 1 и линией визирования), q — курсовой угол цели (угол между вектором скорости самолета № 2 и линией визирования; дополнительный угол $q_1 = \pi - q$).

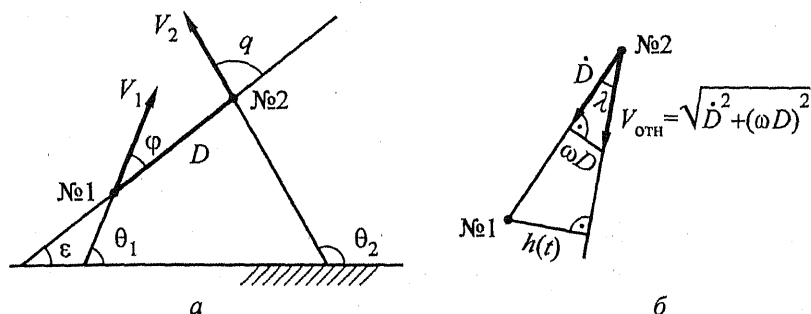


Рис. 1.1

Непосредственно из рис. 1.1,а следует:

$$\Theta_1 = \varepsilon + \varphi; \quad \Theta_2 = \varepsilon + q. \quad (1.1)$$

Дифференцируя по времени соотношения (1.1), получим связь угловых скоростей

$$\dot{\Theta}_1 = \dot{\varepsilon} + \dot{\varphi}; \quad \dot{\Theta}_2 = \dot{\varepsilon} + \dot{q}, \quad (1.2)$$

где $\dot{\Theta}_1 = \omega_1$, $\dot{\Theta}_2 = \omega_2$ — абсолютные угловые скорости самолетов №1 и №2; $\dot{\varepsilon} = \omega_D$ — абсолютная угловая скорость линии дальности; $\dot{\varphi}$ и $\dot{q}$ — относительные угловые скорости самолетов № 1 и № 2 относительно линии дальности. Уравнения для определения производных угла ε и дальности D имеют вид:

$$\omega_D = \dot{\varepsilon} = \frac{1}{D} (V_2 \sin q - V_1 \sin \varphi); \quad (1.3)$$

$$\dot{D} = V_2 \cos q - V_1 \cos \varphi.$$

После дифференцирования первого уравнения (1.3) по времени получим

$$D\ddot{\epsilon} + 2\dot{D}\dot{\epsilon} = g \left(n_2^\perp - n_1^\perp \right). \quad (1.4)$$

Здесь обозначено $n_{1,2}^\perp$ перегрузка самолетов в проекции на нормаль к линии дальности:

$$\begin{aligned} n_1^\perp &= n_{y1} \cos \varphi + n_{x1} \sin \varphi; \\ n_2^\perp &= n_{y2} \cos q + n_{x2} \sin q; \\ n_{x1,2}^\perp &= \frac{\dot{V}_{1,2}}{g}; \quad n_{y1,2}^\perp = \frac{V\dot{\Theta}}{g}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Соотношение (1.4) представляет собой сумму проекций ускорений на нормаль к линии дальности. Здесь $D\ddot{\epsilon}$ — тангенциальное ускорение; $2\dot{D}\dot{\epsilon}$ — ускорение кориолиса; $g \left(n_2^\perp - n_1^\perp \right)$ — разность управляющих ускорений самолетов № 2 и № 1. Модуль вектора относительной скорости (рис. 1.1, б) определяется выражением

$$V_{\text{отн}} = \sqrt{(\omega_D D)^2 + \dot{D}^2} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos(q - \varphi)}. \quad (1.6)$$

Параметры относительного движения $V_{\text{отн}}$, ω_D , $\dot{D}$ являются основными при изучении относительного движения. Из (1.6) получим

$$V_1 - V_2 \leq V_{\text{отн}} \leq V_1 + V_2. \quad (1.7)$$

Таким образом, относительная скорость в ВБ может изменяться от нуля до ~ 1 км/с.

Введем теперь понятие текущего, или мгновенного пролета [1]. Текущий пролет, соответствующий моменту времени t , есть кратчайшее расстояние, на котором один самолет пролетел бы мимо другого, если, начиная с момента t , оба самолета двигались бы прямолинейно, с постоянными скоростями, соответствующими моменту t . Непосредственно из рис. 1.1, б следует:

$$\sin \lambda = \frac{\dot{\epsilon} D}{V_{\text{отн}}} = \frac{h}{D},$$

или

$$h(t) = \frac{\dot{e}D^2}{V_{\text{отн}}}. \quad (1.8)$$

Используем понятие о текущем пролете для анализа управляемости относительным движением. Свяжем с самолетом № 1 область Q эффективного действия ракеты (рис. 1.2, а), расположенную симметрично относительно вектора V_1 . Ниже мы покажем, что в качестве этой зоны выступает так называемая зона отлетов ракеты от самолета. Цель самолета № 1 состоит в том, чтобы захватить этой областью самолет № 2. Цель самолета № 2 состоит в том, чтобы не допустить захвата. Пусть отрезок ab (рис. 1.2, б), есть проекция области Q на перпендикуляр к относительной траектории самолета № 2. Тогда условие состоявшегося захвата может быть записано в виде $h \in ab$. Естественной мерой (показателем) управляемости является производная пролета по времени:

$$\frac{dh}{dt} = \mu = \frac{gD}{V_{\text{отн}}} \left[\left(n_2^\perp - n_1^\perp \right) - \frac{h}{D} \frac{V_{\text{отн}}}{g} \right].$$

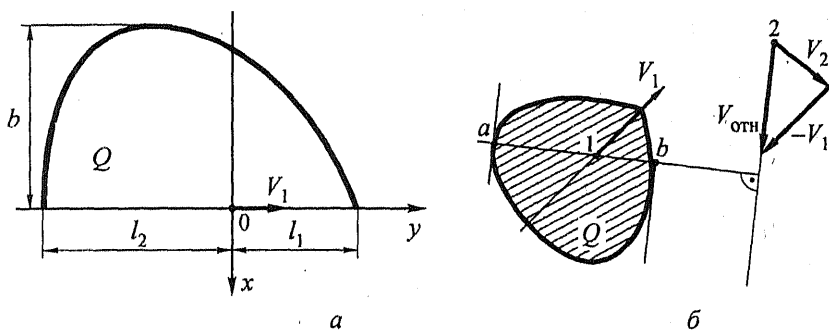


Рис. 1.2

Отсюда для малых $\frac{h}{D}$ получим приближенную формулу. Пренебрегая вторым членом в квадратных скобках, полагая $V_{\text{отн}} \approx \dot{D}$ и обозначая $\frac{D}{|\dot{D}|} = \tau$ (время, оставшееся до встречи):

$$\mu = g \left(n_2^\perp - n_1^\perp \right) \tau. \quad (1.9)$$

С учетом этих допущений и принятых обозначений получим из (1.8)

$$h = \frac{D}{V_{\text{отн}}} (D\dot{\epsilon}) = \frac{d}{|\dot{D}|} \left(V_2^\perp - V_1^\perp \right) = \left(V_2^\perp - V_1^\perp \right) \tau. \quad (1.10)$$

Здесь введены обозначения для проекций скоростей самолетов на нормаль к линии дальности:

$$V_1^\perp = V_1 \sin \varphi; \quad V_2^\perp = V_2 \sin q.$$

На основании (1.9) и (1.10) имеем систему

$$\begin{aligned} h &= \left(V_2^\perp - V_1^\perp \right) \tau; \\ \mu &= g \left(n_2^\perp - n_1^\perp \right) \tau. \end{aligned} \quad (1.11)$$

На основе системы (1.11) рассмотрим области тактического превосходства сторон и определим их оптимальные стратегии. Пусть $h(t) > 0$. Задачей самолета № 1 является уменьшение величины h , т.е. он должен обеспечить $\mu < 0$. Задача самолета № 2 противоположна, он должен обеспечить $\mu > 0$.

При заданных V_1 и V_2 величины h и μ являются функциями управлений самолетов и фазовых координат

$$u_1 = (n_{x1}, n_{y1}); \quad u_2 = (n_{x2}, n_{y2}); \quad z = (\varphi, q). \quad (1.12)$$

Таким образом, имеем задачу с противоположными интересами. Решение такого рода задач основывается на использовании принципа оптимального гарантированного результата [4], в соответствии с которым отсутствие информации о стратегии противника (самолета № 2) выполняется предположением, наилучшим для оперирующей стороны (самолета № 1). Получаемая при этом гарантируемая оценка показателя экстремизируется за счет выбора стратегии оперирующей стороны. Гарантированное значение показателя μ :

$$\begin{aligned}\mu^r &= \min_{u_1} \max_{u_2} \mu = k_1(z) \text{ при } h > 0; \\ \mu^r &= \max_{u_1} \min_{u_2} \mu = k_2(z) \text{ при } h < 0.\end{aligned}\tag{1.13}$$

В той части фазового пространства (плоскости), где $k_1(z) < 0$, самолет № 1 при любых действиях самолета № 2 может обеспечить уменьшение h , т.е. самолет № 1 преобладает над самолетом № 2 (при $k_1(z) > 0$ самолет № 2 преобладает в возможности уклонения). Поскольку μ линейно зависит от управлений u_1 и u_2 , стратегии сторон граничны [4], каждая сторона использует максимальное значение управления, имеющегося в ее распоряжении. Выделим подобласти сочетаний знаков, где гарантировано преобладание одного из самолетов (см. табл. 1.1)

Таблица 1.1

Область преобладания	Знак h	Знак μ
Самолет № 1	+	—
	—	+
Самолет № 2	+	+
	—	—

Рассмотрим области превосходства на фазовой плоскости (q, φ) . Примем: 1) управление вдоль оси x не используется; 2) ЛТХ самолетов одинаковы. $V_1 = V_2$; $n_{y1} = n_{y2}$; 3) атака в ЗПС цели. Соответствующие области приведены на рис. 1.3, а, б, в. Видим, что в областях I и II преобладает самолет № 1, в областях III и IV самолет № 2. В силу принятого допущения об одинаковости ЛТХ области симметричны. При различных ЛТХ симметрия нарушается.

Перейдем теперь к определению оптимальных стратегий сторон. Поскольку каждый из самолетов имеет по два управления (вдоль осей Ox и Oy), а каждое из этих управлений имеет два

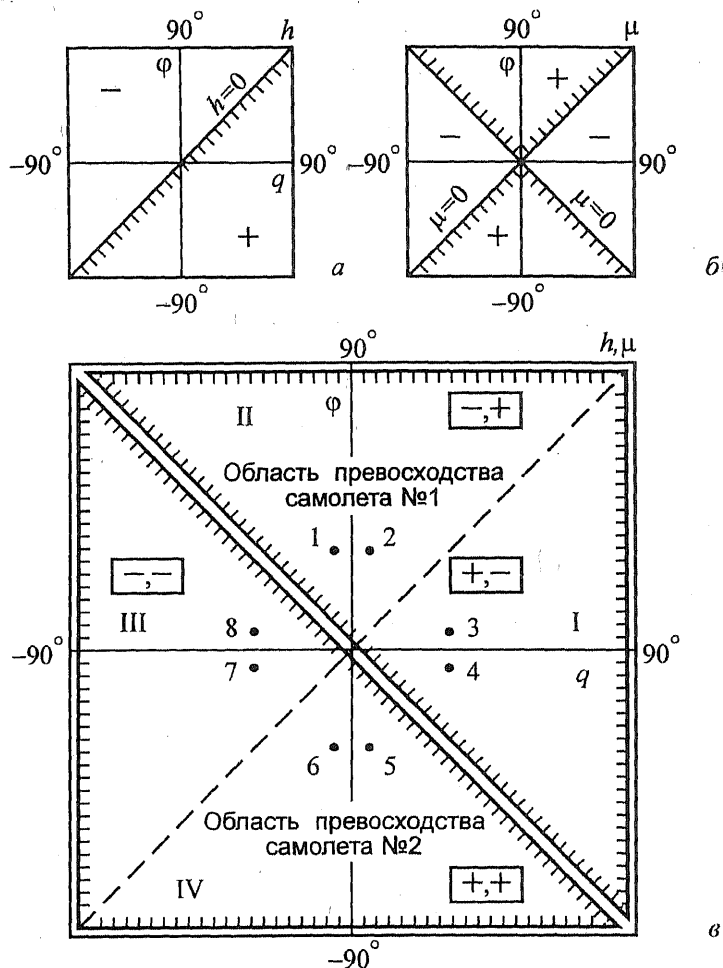


Рис. 1.3

знака (+ и -), то для каждого из самолетов имеется четыре возможных стратегии. Условимся обозначать стратегию двумя буквами. Буква, стоящая на первом месте, определяет стратегию вдоль оси Ox : Р — разгон, Т — торможение, буква, стоящая на втором месте, определяет направление виража: П — правый, Л — левый. Таким образом, для каждого из самолетов будем иметь РП, РЛ, ТП, ТЛ.

Рассмотрим в качестве примера точку «1», лежащую в области II. Здесь $\varphi > 0$, $q < 0$. Для этой точки имеем $h < 0$; $\mu > 0$. Условие $h < 0$ означает вращение линии дальности 1-2 по часовой стрелке. Самолет № 1 должен уменьшить угловую скорость вращения, для чего перегрузка $n_{y1}^{\perp}$ должна быть направлена вниз, самолет № 2 должен увеличить скорость вращения, для чего перегрузка $n_{y2}^{\perp}$ должна быть также направлена вниз. Раскладывая $n_{y1}^{\perp}$ и $n_{y2}^{\perp}$ на оси x и y получим оптимальные стратегии сторон: ТП — для самолета № 1 и РП для самолета № 2. Для других точек области поступаем аналогично.

При решении задачи перехвата цели в абсолютной СК используются *зоны достижимости* (ЗД), определенные в СК, связанной с точкой пуска, а при решении задачи в относительной СК, связанной с самолетом № 1, используются *зоны отлетов* (ЗО). Типичная конфигурация ЗО приведена выше на рис. 1.2, а. Будем характеризовать зону продольным размером l и поперечным размером $2b$. Имеем

$$l = l_1 + l_2, \quad (1.14)$$

где l_1 и l_2 соответственно размеры зоны в направлении положительной и отрицательной оси Oy . Обычно $l_2 = 1,5l_1$, $b \approx 0,6l$.

Перейдем теперь к анализу кинематики в относительной СК, связанной с самолетом № 1. Эта СК подвижна. В общем случае она имеет линейную скорость V_1 и угловую скорость ω_1 . Общий прием исследования относительного движения в этом случае состоит в следующем (рис. 1.4, а):

1) остановим СК в ее поступательном движении. Для этого приложим к самолету № 2 вектор — V_1 ; 2) остановим СК в ее вращательном движении. Для этого приложим к самолету № 2 вектор — $\omega_1 D$. Поскольку к точке № 2 приложены три скорости V_2 , $-V_1$, $-\omega_1 D$, вектор относительной скорости самолета № 2 определяется из векторного равенства

$$V_{\text{отн}} = V_2 - V_1 - \omega_1 D. \quad (1.15)$$

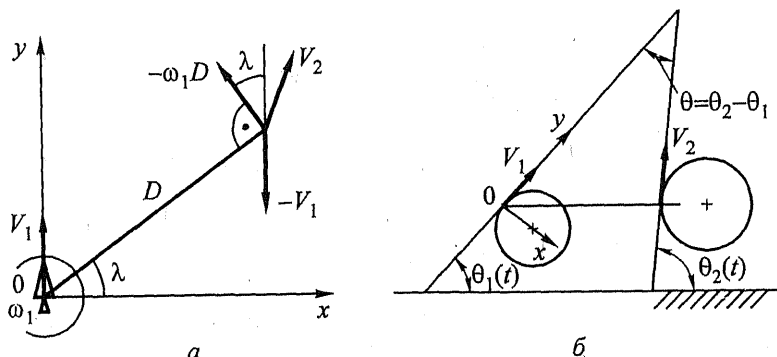


Рис. 1.4

Для случая, когда $\omega_1 = 0$, т.е. СК не вращается, получим векторное равенство

$$V_{\text{отн}} = V_2 - V_1. \quad (1.16)$$

Используя указанный прием, рассмотрим задачу захвата ЗО самолета № 2 при бое на виражах (рис. 1.4, б).

Рассмотрим прямоугольную СК Oxy , связанную с самолетом № 1. Ось Oy этой СК направим по вектору V_1 . Имеем для производных координат

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -V_2 \sin \Theta - \omega_1 y; \\ \dot{y}_1 &= V_2 \cos \Theta - V_1 + \omega_1 x. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь Θ — угол между векторами V_1 и V_2 , т.е. разность курсовых углов самолетов:

$$\Theta = \Theta_2 - \Theta_1. \quad (1.18)$$

Дифференцируя (1.18) по времени, получаем

$$\dot{\Theta} = \omega_2 - \omega_1. \quad (1.19)$$

Из (1.17) получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_2 \cos \Theta - V_1 + \omega_1 x}{-V_2 \sin \Theta - \omega_1 y}. \quad (1.20)$$

Рассмотрим частный случай, соответствующий условию $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Тогда, как следует из (1.19):

$$\dot{\Theta} = 0; \quad \Theta = \Theta_0 = \text{const.}$$

В этом случае уравнение (1.20) легко интегрируется и мы получаем

$$x^2 + y^2 + 2 \frac{V_2 \cos \Theta_0 - V_1}{\omega} x + \frac{V_2 \sin \Theta_0}{\omega} y + C = 0. \quad (1.21)$$

Выражение (1.21) есть уравнение окружности (рис. 1.5, а). Таким образом, относительная траектория самолета № 2 в СК, связанной с самолетом № 1, есть окружность, центр которой смещен по осям x и y . Его координаты

$$a_x = \frac{1}{\omega} (V_1 - V_2 \cos \Theta_0); \quad a_y = -\frac{V_2}{\omega} \sin \Theta_0. \quad (1.22)$$

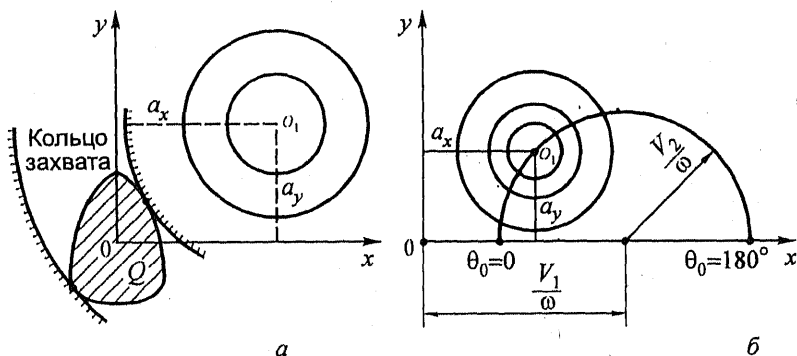


Рис. 1.5

На рис. 1.5, а приведено кольцо захвата, образованное двумя предельными траекториями, касательными к области Q .

Рассмотрим, как изменяется положение центра окружности при фиксированных V_1 и V_2 и при изменении Θ_0 . Из (1.22)

следует, что геометрическое место точек a_{xi} , a_{yi} есть в свою очередь окружность радиуса $r = \frac{V_2}{\omega}$, центр которой лежит на оси Ox , на расстоянии $\frac{V_1}{\omega}$ от начала координат (рис. 1.5, б). Пусть $\Theta_0 = 0$, тогда

$$a_y = 0; \quad a_x = \frac{1}{\omega} (V_1 - V_2).$$

1. Пусть a_x — мало, т.е. $|V_1 - V_2|$ — мало, а ω — велико. В этом случае выгодно иметь *длинную* ЗО.

2. Пусть a_x — велико, т.е. $|V_1 - V_2|$ — велико, а ω — мало. В этом случае выгодно иметь *широкую* ЗО. Таким образом, получили связь требований к конфигурации ЗО с ЛТХ самолетов. Мы рассмотрели частный случай боя на виражах для которого $\omega_1 = \omega_2$. В общем случае, когда $\omega_1 \neq \omega_2$, $\omega_{1,2} = \text{const}$ относительные траектории представляют собой эпициклоиды.

§ 1.3. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСТРЕБИТЕЛЯ В ВОЗДУШНОМ БОЮ

Мы рассматриваем АБК с ракетным вооружением. Естественно, что эффективность такого комплекса в существенной мере определяется эффективностью установленных на нем ракет. В качестве критерия (показателя) эффективности ракеты принято использовать вероятность сбития (поражения) цели одной ракетой. Событие «сбитие цели» (A) — есть событие случайное, т.е. цель может быть сбита, но может быть и не сбита. Всякое случайное событие характеризуется вероятностью его осуществления. Вероятность поражения цели одной ракетой определяется следующими компонентами: точностью наведения, условиями встречи, типом цели, характеристиками боевого снаряжения

$$P(A) = W = f(\text{точность, условия встречи, тип цели, характеристика БС}).$$

Показатель W_1 (далее индекс опускаем) есть важная характеристика ракеты. Требования на величину W задаются в ТТЗ на ракету. Для современных и перспективных ракет величина W имеет порядок $0,6 \div 0,7$.

При однократном применении ракеты и при условии состоящегося пуска эффективность истребителя численно равна значению W . Однако при оценке эффективности истребителя за атаку (последовательность стрельб за время нахождения в зоне стрельбы) или за весь бой (совокупность состоявшихся атак) этой величины уже недостаточно.

Конкретизация критерия эффективности истребителя зависит от типа воздушного боя. Их два: бой двух самолетов или бой «1 × 1», и бой групп самолетов. Рассмотрим их последовательно.

Рассмотрим одиночный бой самолетов № 1 и 2. Пусть эффективность ракеты самолета № 1 есть W , самолета № 2 — V . Результатом боя является упорядоченная во времени последовательность стрельб, которая может быть как детерминированной, так и случайной. Ограничимся для простоты рассмотрением первой. Случайная последовательность стрельб, учитывающая вероятности выхода самолетов в атаку, подробно рассмотрена в работе [2]. Результатом боя являются величины P_1 и P_2 — вероятности победы каждой из сторон. Пусть последовательность стрельб задана, т.е. заданы моменты времени стрельб и их эффективности (рис. 1.6, а).

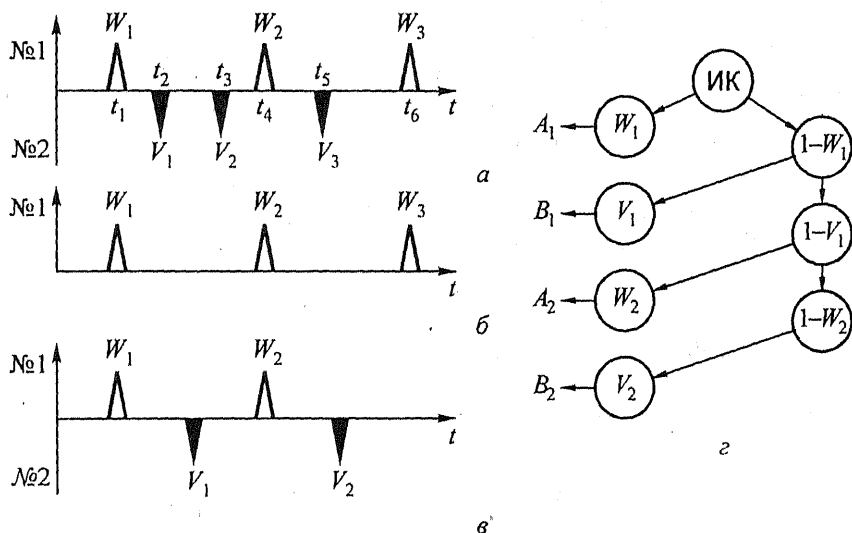


Рис. 1.6

Рассмотрим, как по заданной последовательности определить результат боя. Рассмотрим два частных случая.

1. *Стреляет только самолет № 1* (рис. 1.6, б). Воспользовавшись теоремой о повторении опытов, имеем

$$P_1 = 1 - P(\bar{A}). \quad (1.23)$$

Здесь $\bar{A}$ — событие, противоположное поражению цели.

Пусть самолет № 1 производит n стрельб. Если W_i — вероятность поражения цели в i -й стрельбе, то вероятность противоположного события есть $1 - W_i$. Для n стрельб получим

$$P(\bar{A}) = (1 - W_1)(1 - W_2) \dots = \prod_{i=1}^n (1 - W_i). \quad (1.24)$$

На основании (1.23) и (1.24) получим

$$P_1 = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - W_i). \quad (1.25)$$

Из (1.25) получим важный частный случай, когда эффективность всех стрельб одинакова:

$$P_1 = 1 - (1 - W)^n. \quad (1.26)$$

2. *Строгое чередование стрельб* (рис. 1.6, в). Событие «победа самолета № 1» есть сумма событий, в каждой из которых есть сбитие цели в данной стрельбе:

- сбитие цели в первой стрельбе — W_1 ,
- сбитие цели во второй стрельбе —

$$(1 - W_1)(1 - V_1)W_2, \text{ и т.д.}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} P_1 &= W_1 + (1 - W_1)(1 - V_1)W_2 + \dots = \\ &= \sum_{i=1}^n W_i \prod_{k=i-1}^n (1 - W_k)(1 - V_k). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Аналогично для самолета № 2:

$$P_2 = \sum_{i=1}^n V_i (1 - W_i) \prod_{k=i-1}^{n-1} (1 - W_k) (1 - V_k). \quad (1.28)$$

Отметим, что эти зависимости можно получить с помощью графического приема, основанного на анализе «дерева боя» [3]. На рис. 1.6, 2 исходы $A_{1,2}$ соответствуют поражению самолета № 2, исходы $B_{1,2}$ — поражению самолета № 1. Перемножая вероятности, написанные на ветвях, ведущих к исходам A_i , B_i , и складывая их, получаем (1.27) и (1.28).

Рассмотрим важный частный случай, когда эффективность всех стрельб каждой из сторон одинакова. Обозначая $a = (1 - W)(1 - V)$, получим

$$\begin{aligned} P_1 &= W \left[1 + a + \dots + a^{n-1} \right]; \\ P_2 &= V(1 - W) \left[1 + a + \dots + a^{n-1} \right]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в (1.29), есть сумма членов геометрической прогрессии. Учитывая,

$$S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a}, \quad (1.30)$$

получаем

$$\begin{aligned} P_1 &= WS_n; \\ P_2 &= V(1 - W) S_n. \end{aligned} \quad (1.31)$$

3. *Общий случай* (рис. 1.6, а). Произвольный общий случай можно свести к случаю строгого чередования стрельб, объединив стрельбы одной стороны, не разделенные стрельбами другой, на основании (1.25). Для рассматриваемого примера имеем

$$\begin{aligned} P_1 &= W_1 + (1 - V_{\Sigma 1})(1 - W_1) W_2; \\ P_2 &= V_{\Sigma 1}(1 - W_1) + (1 - W_1)(1 - V_{\Sigma 1})(1 - W_2) V_3; \end{aligned}$$

$$V_{\Sigma 1} = 1 - (1 - V_1)(1 - V_2).$$

Проведем теперь количественный анализ, ограничившись случаем строгого чередования стрельб.

1) *влияние числа стрельб на величину S_n* . На основании (1.30) оценим $S_n = f(n)$ при $W = V = 0,6$. Значения S_n для различных n приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

n	1	2	3	...	∞
S_n	1	1,16	1,186	...	1,19

Как видим, заметный рост наблюдается только в первых двух-трех выстрелах;

2) *влияние очередности стрельб противников на вероятность их победы*. Из (1.31) для случая, когда первым стреляет самолет № 1, имеем

$$A = \frac{P_1}{P_2} = \frac{W}{(1 - W)V}. \quad (1.32)$$

Как видим A от n не зависит, т.е. достаточно рассматривать по одному выстрелу каждой стороны. Для $W = V = 0,6$ получим $A = 2,5$, т.е. право первого выстрела стоит очень дорого;

3) *компенсация преимущества первого выстрела*. Определим, можно ли компенсировать преимущество первого выстрела самолета № 1 за счет увеличения эффективности оружия самолета № 2. Из (1.32) при $A = 1$ получим $V = \frac{W}{1 - W}$. Отсюда следует, что компенсация может быть обеспечена лишь при $W \leq 0,5$. Например, при $W = 0,4$ получим $V = 0,67$, т.е. требуется существенное увеличение эффективности V ($\sim 1,67$ раза);

4) *влияние эффективностей W, V на величину P_1* . Рассмотрим, как вероятность победы P_1 зависит от эффективности своего (W) и чужого (V) оружия. Ограничимся рассмотрением случая $n = \infty$. Из (1.31) имеем

$$P_1 = \frac{W}{1-a} = \frac{W}{1-(1-W)(1-V)}.$$

Как видим: 1) при изменении W в диапазоне $0 \leq W \leq 1$ величина P_1 также изменяется от нуля до единицы, т.е. эффективность своего оружия влияет сильно; 2) при изменении V в диапазоне $0 \leq V \leq 1$ величина P_1 изменяется от значения W_1 до единицы, т.е. значительно слабее. (Например, при $W_1 = 0,6$ диапазон изменения $0,6 \leq P_1 \leq 1,0$).

Отметим, что важной особенностью решения рассматриваемой задачи является векторный характер критерия. Особенности оценки АБК по векторному критерию с показателями: вероятность победы P_1 , вероятность гибели $P_1^{(r)} = P_2$ подробно рассмотрены в [2]. На этом завершим рассмотрение одиночного ВБ и перейдем к оценке результатов группового боя.

Будем различать два типа ВБ групп самолетов: бои на связывание и бои на победу.

Пусть бой ведут две группировки самолетов. Обозначим $N_{1,2}$ — текущие численности, N_{10}, N_{20} — начальные численности, $\Pi_{1,2}$ — потери, $P_{1,2}$ — вероятности побед сторон в бою «1 × 1».

Бой на связывание — равновесный бой с нейтральным исходом

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{N_{10} - \Pi_1}{N_{20} - \Pi_2} = \frac{N_{10}}{N_{20}} = K_0 = \text{const.} \quad (1.33)$$

Бой на победу (для стороны № 1)

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{N_{10} - \Pi_1}{N_{20} - \Pi_2} > \frac{N_{10}}{N_{20}} = K_0. \quad (1.34)$$

Видно, что в бою на победу относительная численность самолетов № 1 в процессе боя нарастает.

Пусть $P_2 > P_1$, т.е. эффективность каждого из самолетов № 2 выше, чем самолета № 1. Возникает вопрос: можно ли этот эффект компенсировать увеличением численности группировки

самолетов № 1, т.е. $N_{10} > N_{20}$? Рассмотрим равновесный групповой бой (1.33), приняв, что располагаемое число атак каждого из самолетов $\mu_{1,2} = 1$. Поскольку $N_{10} > N_{20}$, выделим в группе самолетов № 1 две группировки: основную, численностью $N_{10}^{\text{осн}} = N_{20}$, и резервную, численностью $N_{10}^{\text{рез}} = N_{10} - N_{10}^{\text{осн}}$.

Примем, что основная группировка вступает в бой с группировкой самолетов № 2, а резервная — атакует самолеты № 2, выходящие из боя. Пусть вероятность победы самолета № 1 в бою с самолетом № 2, вышедшим из боя, будет $P_1^b > P_1$, а вероятность самолета № 2, вышедшего из боя, $P_2^b = 0$ (из боя выходит самолет, израсходовавший боезапас или топливо). При этом математические ожидания потерь сторон представляются соотношениями

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= N_{20} P_2; \\ \Pi_2 &= N_{20} P_1 + (N_{10} - N_{20}) P_1^b. \end{aligned} \quad (1.35)$$

На основании (1.33) и (1.35) получим

$$\frac{P_2}{P_1} - K_0 \left[1 + (K_0 - 1) \right] \frac{P_1^b}{P_1} = 0. \quad (1.36)$$

Уравнение (1.36) при фиксированных значениях $\frac{P_2}{P_1}$ и $\frac{P_1^b}{P_1}$ есть квадратное уравнение относительно $K_0 = \frac{N_{10}}{N_{20}}$. Например, при $\frac{P_1^b}{P_1} = 1$ получим $K_0 = \sqrt{\frac{P_2}{P_1}}$.

Таким образом, недостаток в боевой мощи самолетов группы можно компенсировать увеличением ее численности. Аналогично может быть рассмотрен случай, когда $\frac{P_1^b}{P_1} > 1$, $\mu_2 > 1$. Более подробно эти вопросы рассмотрены в [6].

Глава 2. АЭРОДИНАМИКА РАКЕТЫ

§ 2.1. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАКЕТ И ВОПРОСЫ ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ КОМПОНОВКИ

В аэродинамике ракет используются следующие выражения для сил и моментов [10]:

$$\begin{aligned} X &= Q_x = C_x q S; & M_z &= m_z q S b_A; \\ Y &= C_y q S; & M_y &= m_y q S b_A; \\ Z &= C_z q S; & M_x &= m_x q S l. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь и далее силы рассматриваются в поточной СК, моменты — в связанной СК. Индекс I в обозначении связанных осей опускаем. Величины C_x , C_y , C_z , m_x , m_y , m_z — безразмерные аэродинамические коэффициенты; q — скоростной напор, S — характерная площадь; b_A , l — характерные линейные размеры.

Введение коэффициентов опирается на теорию подобия и первоначально было принято для дозвуковых скоростей. Для сверхзвуковых скоростей имеет место наличие существенной зависимости коэффициентов от числа M .

Рассмотрим кратко основные коэффициенты. Более подробно эти вопросы рассмотрены в [7].

1. *Коэффициент подъемной силы.* Для коэффициента C_y в плоском движении принимается зависимость линейная относительно углов α и δ :

$$C_y = C_y^\alpha \alpha + C_y^\delta \delta, \quad (2.2)$$

где α — угол атаки; δ — угол отклонения органа управления; C_y^α , C_y^δ — частные производные по соответствующим аргументам.

Если подъемной силой отклоненного руля по сравнению с подъемной силой всей ракеты можно пренебречь, то в (2.1) остается лишь первый член.

2. *Коэффициент лобового сопротивления.* Для коэффициента C_x в плоском движении принимается зависимость

$$C_x = C_{x0} + C_{xi}, \quad (2.3)$$

где C_{x0} — лобовое сопротивление при нулевом угле атаки и не-отклоненных рулях; C_{xi} — индуктивное сопротивление, для которого обычно принимается квадратичная зависимость от α и δ . Таким образом,

$$C_x = C_{x0} + A^{\alpha\alpha} \alpha^2 + A^{\alpha\delta} \alpha \delta + A^{\delta\delta} \delta^2, \quad (2.4)$$

где $A^{\alpha\alpha}$, $A^{\alpha\delta}$, $A^{\delta\delta}$ — частные производные второго порядка (коэффициенты аппроксимации). Если пренебречь отклонением руля, то

$$C_x = C_{x0} + A^{\alpha\alpha} \alpha^2 = C_{x0} + C_y^{\alpha} \alpha^2. \quad (2.5)$$

3. *Балансировочная поляра.* Рассмотрим балансировочный режим полета. В этом режиме коэффициент момента m_z равен нулю и между α и δ есть однозначная зависимость. Принимая эту зависимость линейной, получим

$$\alpha = K_{\alpha} \delta. \quad (2.6)$$

Теперь согласно (2.2) и (2.4) будет

$$C_x = C_{x0} + \kappa C_y^2; \quad \kappa = \frac{1}{C_y^{\alpha}}. \quad (2.7)$$

Это уравнение балансировочной поляры. График этой зависимости есть квадратная парабола.

Введем понятие аэродинамического качества ракеты

$$K_a = \left(\frac{C_y}{C_x} \right)_{\text{бал}} = \frac{C_y}{C_{x0} + \kappa C_y^2}. \quad (2.8)$$

Для нахождения максимального качества продифференцируем (2.8) по C_y . Приравняв производную нулю, найдем

$$\hat{C}_y = \sqrt{\frac{C_{x0}}{\kappa}}.$$

Подставляя это выражение в (2.8), получим

$$K_{a \max} = \frac{1}{2 \sqrt{\kappa} C_{x0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_y^\alpha}{C_{x0}}} \quad (2.9)$$

Для современных ракет $K_{a \max} = 2 + 3$. Геометрически максимальное качество ракеты и соответствующие ему значения $\hat{C}_y$, $\hat{\alpha}$ и $\hat{C}_x$ находятся проведением касательной к поляре из начала координат. Отметим, что в режиме максимального качества $C_x = 2 C_{x0}$. По аналогии с поляррой в поточной СК можно определять полярру и в связанной СК. Используя связь этих СК, получаем

$$C_{y1} = C_y \cos \alpha + C_x \sin \alpha \approx C_y;$$

$$C_{x1} = C_x \cos \alpha - C_y \sin \alpha \approx C_x - C_y \alpha,$$

откуда следует геометрический способ перестроения одной полярры в другую.

4. *Коэффициент продольного момента.* Для коэффициента m_z в плоском движении принимается зависимость

$$m_z = m_z(\alpha) + m_z(\delta) = m_z^\alpha \alpha + m_z^\delta \delta. \quad (2.10)$$

Здесь m_z^α , m_z^δ — частные производные по соответствующим аргументам. Преобразуем производную m_z^α . Имеем

$$m_z^\alpha = \frac{\partial m_z}{\partial \alpha} = \frac{\partial m_z}{\partial C_y} \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} = C_y^\alpha m_z^{C_y}.$$

Входящая сюда производная $m_z^{C_y}$ представляет собой запас продольной статической устойчивости. Ее физический смысл — безразмерное плечо подъемной силы ракеты относительно центра масс, т.е.

$$m_z^{C_y} = \bar{x}_T - \bar{x}_F. \quad (2.11)$$

Статически устойчивой компоновке соответствует $m_z^{C_y} < 0$, что в соответствии с (2.11) означает, что центр тяжести ракеты лежит впереди аэродинамического фокуса (точка приложения

равнодействующей аэродинамических сил). Компоновки современных ракет обладают запасом статической устойчивости. В то же время этот запас не должен быть излишне большим, что приводит к снижению управляемости ракеты.

5. Коэффициент момента крена. Для коэффициента m_x принимается зависимость

$$m_x = m_x^0(\delta_g) + m_x'(\alpha_1, \alpha_2) + m_x''(\alpha_1, \alpha_2, \delta_I, \delta_{II}). \quad (2.12)$$

Здесь m_x^0 — момент, создаваемый органами стабилизации крена (элеронами); m_x' и m_x'' — моменты косого обдува, зависящие от канальных углов атаки и отклонений органов управления в каналах и являющиеся возмущениями для канала крена. Главные члены этих возмущающих моментов имеют вид

$$m_x'(\alpha_1, \alpha_2) = k(\alpha_2 \alpha_1^3 - \alpha_1 \alpha_2^3); \quad (2.13)$$

$$m_x''(\alpha_1, \alpha_2, \delta_I, \delta_{II}) = k_1(\alpha_1 \delta_{II} - \alpha_2 \delta_I). \quad (2.14)$$

Отметим, что формулы (2.13) и (2.14) есть соответственно формулы Райха и Озеринина. Из (2.13) следует, что момент m_x' обращается в нуль в случае маневра ракеты в плоскости симметрии, т.е., при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ или $|\alpha_1| = |\alpha_2|$, а момент m_x'' обращается в нуль, если в продольно-боковом движении устанавливается балансировочный режим*, т.е. $\frac{\alpha_1}{\delta_I} = \frac{\alpha_2}{\delta_{II}}$.

Рассмотрим теперь вопрос о *располагаемых* углах атаки и перегрузках ракеты. В рассматриваемом классе ракет используются крестокрылые компоновки (угол развала крыльев и рулей равен 90°) с tandemно расположенными органами управления (рулями). Отметим, что рули могут использоваться как независимо (каждый руль имеет отдельный привод), так и объединяться в три канала (первый и второй — основные, третий

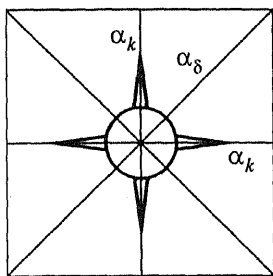
* Особенности аэродинамических характеристик компоновок с решетчатыми рулями подробно рассматриваются в [7] и [12].

— крен), причем это объединение может быть как механическим, так и электрическим.

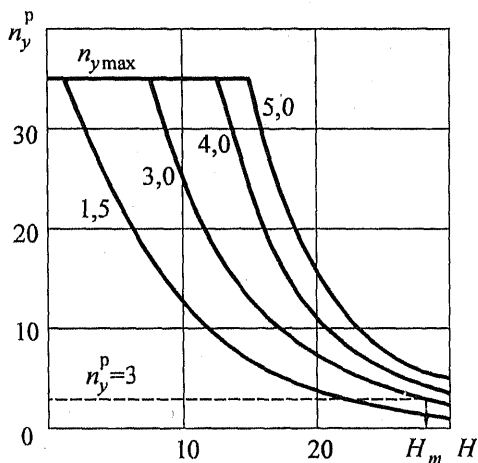
Рассмотрим диаграмму располагаемых углов атаки в поперечной плоскости (рис. 2.1, а). Пусть каналные углы атаки $\alpha_{1,2} = K_\alpha \delta_{I,II}$ ($\delta_{I,II}$ — углы отклонения рулей в основных каналах). Тогда угол атаки в биссекторной плоскости

$$\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

Если $\bar{\alpha}_{1,2} = \bar{\alpha}_k$ — максимальные значения каналных углов атаки, то максимальное значение угла атаки в биссекторной плоскости $\bar{\alpha}_\delta = 1,41 \bar{\alpha}_k$.



а



б

Рис. 2.1

Таким образом, при переходе от канала к биссектору угол атаки нарастает по закону *секанса*. Отсюда следует целесообразность управления ракетой в плоскости биссектора — схема X. Такие проработки известны, однако до настоящего времени они не внедрены.

Перейдем теперь к располагаемым перегрузкам ракеты и рассмотрим зависимость располагаемой перегрузки ракеты в канале (схема +) от высоты и числа М полета. Типичная диаг-

рамма $n_y^P = f(H, M)$ приведена на рис. 2.1, б. Видим, что n_y^P снижается при увеличении высоты и уменьшении числа M . Эффект снижения перегрузки при увеличении высоты полета связан с падением относительной плотности атмосферы, задаваемой стандартной атмосферой (МСА). Для расчетов, не требующих большой точности, можно принять

$$\Delta = \frac{1}{2^k}; \quad k = \frac{H}{5}.$$

Отсюда следует, что при увеличении высоты на каждые 5 км плотность снижается ровно в два раза. Например, при изменении высоты полета от нуля до 50 км имеем $k = 10$, $2^k = 1024$ (точное значение по МСА — 1130), т.е. погрешность $\sim 10\%$.

Рассмотрим ограничения по перегрузке ракеты.

1. Максимальная располагаемая перегрузка ракеты определяется из условия равенства располагаемой перегрузки потребной. Потребная для современных ракет перегрузка определяется соотношением, вытекающим из условия наведения на маневрирующую цель по методу пропорционального сближения:

$$n_{y \max}^P = n_{y \max}^n = \frac{N}{N-2} n_{y \max}. \quad (2.15)$$

Здесь $n_{y \max}$ — максимальная перегрузка маневра цели; N — постоянная метода. Принимая в (2.15) $n_{y \max} = 10 + 12$; $N = 3$ (оптимальное значение), получаем $n_{y \max}^P = 30 + 36$, что и реализуется на современных ракетах.

2. Располагаемая перегрузка, соответствующая максимальной высоте применения ракеты. В настоящее время принято, что $n_y^P(H_{\max})$ для схемы + должна удовлетворять условию

$$n_y^P(H_{\max}) \geq 3. \quad (2.16)$$

Условие (2.16) принимается как необходимое. Его достаточность проверяется при отработке системы управления ракеты.

Задача определения параметров аэродинамической компоновки в полной постановке заключается в определении разме-

ров, формы и положения несущих и управляющих поверхностей и является многопараметрической. Однако на этапе формирования облика ракеты эта задача может быть усечена и сведена к выбору двух параметров: площади S_K консолей крыла и площади S_p руля (рис. 2.2, а). Относя указанные площади к площади миделя, получим относительные параметры

$$\bar{S}_K = \frac{S_K}{S_M}; \quad \bar{S}_p = \frac{S_p}{S_M}. \quad (2.17)$$

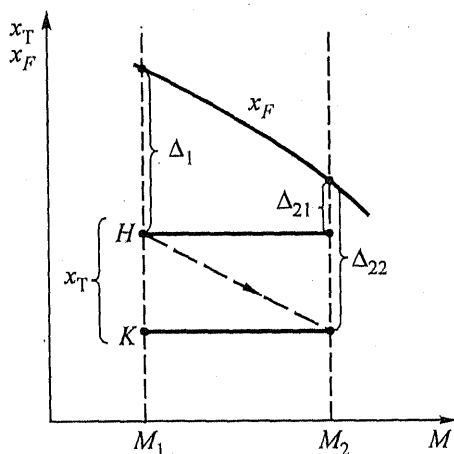
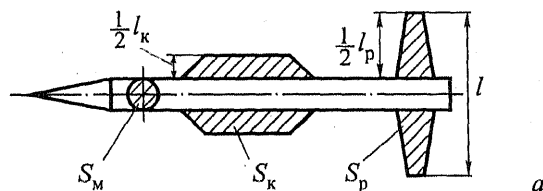


Рис. 2.2

Именно эти параметры и принимаются в качестве варьируемых. По опыту разработки современных ракет $\bar{S}_K = 0 \div 5$; $\bar{S}_p = 2 \div 4$. Отметим, что значение $S_K = 0$ соответствует бескрылому корпусу. Рассмотрим расчетные условия для определения параметров (2.17). Поскольку аэродинамические характеристики

ки зависят от числа M , рассмотрение должно проводиться для ряда значений этого числа. В первом приближении достаточно два значения M : одно дозвуковое $M_1 = 0,8 \div 0,9$; другое сверхзвуковое $M_2 = 3 \div 4$. Условия выбора параметров (2.17) сводятся к следующему:

1) обеспечение в соответствии с (2.16) заданной располагаемой перегрузки на $H_{\max}$;

2) обеспечение требуемого запаса продольной статической устойчивости в режимах $M = M_1$ и $M = M_2$ при начальной центровке;

3) обеспечение требуемого значения балансировочного угла атаки при конечной центровке в режиме $M = M_2$.

Рассмотрим эти условия более подробно. На рис. 2.2, б приведен характер изменения координат x_F и x_T в функции числа M . Отметим, что при увеличении числа M , т.е. при переходе от режима $M = M_1$ к режиму $M = M_2$ фокус ракеты смещается вперед. По опыту отработки аэродинамических характеристик ряда ракет такая зависимость характерна $x_F(M)$, по крайней мере, для крыльев малого удлинения ($\lambda \approx 0,3$). Для координаты x_T приведены начальное и конечное значения. Пунктиром условно показан переход от значения «Н» к значению «К». При таком характере изменения координаты $x_F(M)$ критичным по устойчивости является режим $M = M_2$ в сочетании с начальной центровкой.

§ 2.2. КЛАССИФИКАЦИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СХЕМ И СПОСОБОВ СОЗДАНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ СИЛ

Общепринятая классификация аэродинамических схем самолетов и ракет основана на признаке взаимного расположения подвижных (управляющих) и неподвижных (несущих) поверхностей по длине корпуса; по этому признаку все аэродинамические схемы делятся на три типа: «нормальная» (сюда же относится схема «бесхвостка», которая иногда выделяется в самостоятельный тип), «утка», «поворотное крыло». Эта классификация, однако, обладает рядом недостатков, основным из которых является отсутствие количественной меры, что не позво-

ляет сопоставлять и оценивать различные компоновки, соответствующие одной или разным схемам. Особые затруднения возникают при оценке «промежуточных» схем (например, схемы, промежуточной между схемой «утка» и схемой «поворотное крыло»), которые, как правило, и реализуются в реальных разработках.

Вместе с тем можно предложить непрерывную количественную классификацию, включающую в качестве частных случаев традиционно выделяемые типы. Основная идея этой классификации состоит в учете удельного веса подъемной силы, создаваемой за счет отклонения органа управления в полной подъемной силе. Пусть $Y(\delta)$ и $Y(\alpha)$ — подъемные силы, возникающие на ракете соответственно за счет отклонения органа управления δ и угла атаки α в балансировочном режиме. Введем обобщенный параметр

$$K_n = \left(\frac{Y(\delta)}{Y(\alpha) + Y(\delta)} \right)_{\text{бал}}. \quad (2.18)$$

Пусть доля подъемной силы, возникающая при отклонении органа управления мала по сравнению с составляющей, связанной с углом атаки, т.е. $Y(\delta) \leq Y(\alpha)$, тогда $K_n \rightarrow 0$ и мы имеем идеальную рулевую схему. Учтем теперь знак составляющей $Y(\delta)$. Если балансировка ракеты такова, что положительному знаку угла атаки соответствует положительный знак угла δ , то $K_n \rightarrow 0^+$ (малая положительная величина). Указанная балансировка соответствует схеме «утка». Если же положительному знаку α соответствует отрицательный знак δ , то $K_n \rightarrow 0^-$, т.е. имеем балансировку, соответствующую «нормальной» схеме. Пусть теперь $Y(\alpha) \ll Y(\delta)$, тогда $K_n \rightarrow 1$, и мы имеем схему идеального «поворотного крыла». Итак, введенный обобщенный параметр K_n позволяет характеризовать каждую из рассматриваемых схем некоторым числом.

Рассмотрим случай ракеты с линейными аэродинамическими характеристиками, т.е.

$$Y(\delta) = C_y^\delta \delta; \quad Y(\alpha) = C_y^\alpha \alpha. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.18), получаем

$$K_n = \chi / (\chi + K_\alpha). \quad (2.20)$$

Здесь $\chi = \frac{C_y^\delta}{C_y^\alpha}$; $K_\alpha \equiv \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)_{\text{бал}}$ — коэффициент балансировочной зависимости.

Пусть $\bar{x}_F^\alpha$, $\bar{x}_F^\delta$, $\bar{x}_T$ — соответственно относительные координаты, определяющие положение фокуса ракеты по углам α и δ и центра масс. Тогда параметры K_n и K_α могут быть на основании (2.20) записаны в виде

$$K_n = \frac{\bar{x}_F^\alpha - \bar{x}_T}{\bar{x}_F^\alpha - \bar{x}_F^\delta}; \quad K_\alpha = \chi \frac{\bar{x}_T - \bar{x}_F^\delta}{\bar{x}_F^\alpha - \bar{x}_T}. \quad (2.21)$$

Из (2.21) следует, что величина и знак параметров K_n , K_α определяется взаимным расположением точек $\bar{x}_T$, $\bar{x}_F^\alpha$, $\bar{x}_F^\delta$. Для статистически устойчивых компоновок $\bar{x}_F^\alpha - \bar{x}_T > 0$. Тогда из (2.21) следует:

1. Знак и величина обобщенного параметра K_n определяется взаимным расположением фокусов по α и δ . Если фокус по δ лежит впереди (сзади) фокуса по α , то величина $K_n > 0$ ($K_n < 0$).

2. Знак и величина параметра K_α определяется взаимным расположением фокуса по δ и центра масс. Если фокус по δ лежит впереди (сзади) центра масс, то величина $K_\alpha > 0$ ($K_\alpha < 0$).

Введем теперь плоскость параметров K_n , K_α и назовем ее диаграммой состояния (рис. 2.3).

В первом квадранте этой диаграммы ($K_\alpha > 0$, $K_n > 0$) располагаются схемы с передним расположением органов управления (схема «утка» и «поворотное крыло»), в третьем квадранте ($K_\alpha < 0$, $K_n < 0$) — схемы с задним расположением органов управления («нормальная» схема). И, наконец, во втором квадранте диаграммы ($K_\alpha > 1$, $K_n < 0$) — схемы, имеющие баланси-

ровку типа «ножниц», которые в практических разработках до настоящего времени не использовались.

Рассмотрим на основании (2.20) связь между параметрами K_n и K_α , соответствующую условию $\chi = \text{const}$. Как видим, эта кривая имеет две асимптоты: горизонтальную — ось абсцисс ($K_n = 0$), вертикальную ($K_\alpha = -\chi$). Отметим, что все кривые проходят через точку диаграммы (0,1), соответствующую идеальному «поворотному крылу».

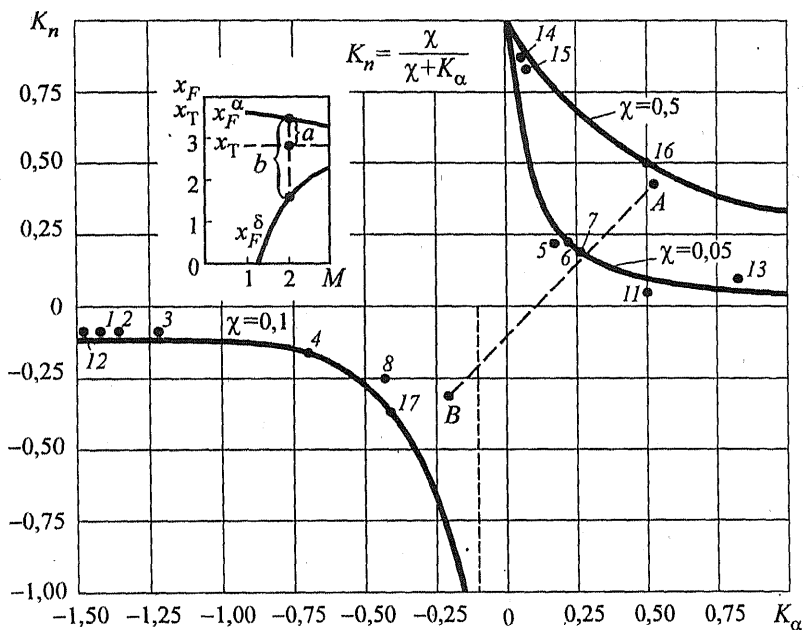


Рис. 2.3

Анализ статистики по современным отечественным и зарубежным ракетам (см. точки на рис. 2.3) показывает, что все они располагаются на диаграмме вблизи кривых $\chi = \text{const}$, причем каждому из типов схем соответствует свое значение χ : так, для схемы типа «утка» $\chi \approx 0,05$, схемы «поворотное крыло» $\chi \approx 0,5$, «нормальной схемы» $\chi \approx 0,1$. Важной особенностью статистики является существование «промежуточных» компоновок,

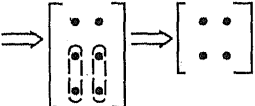
т.е. компоновок, занимающих промежуточное положение между идеальными, например, оптимальное значение параметра K_n , реализованное при разработке ракеты с «поворотным крылом», составило $K_n \approx 0,4 + 0,5$. Объяснение этой особенности реальных разработок связано с существованием противоречивых тенденций влияния величины K_n на характеристики ракеты. Анализ показывает, что увеличение K_n , приводящее к улучшению динамических характеристик ракеты (время выхода на заданный угол атаки, отставание по фазе при отработке колебательных сигналов), сопровождается ухудшением статических характеристик ракеты (рост шарнирных моментов, возрастание C_x и т.д.). Разрешение этого противоречия за счет компромисса и является причиной появления промежуточных компоновок.

Важной особенностью диаграммы состояния является то, что на ней легко изображаются схемы, имеющие две пары органов управления в каждом из продольно-боковых каналов. Так как в этом случае параметры K_{ni} и $K_{\alpha i}$ должны определяться для каждого из органов управления ($i = 1, 2$), то такая схема изображается на диаграмме двумя связанными точками. На рис. 2.3 в качестве примера приведено изображение схемы (связанные точки A и B). Точка A , характеризующаяся значениями $K_{n1} = 0,4$; $K_{\alpha 1} = 0,5$, соответствует балансировке типа «поворотное крыло», точка B , характеризующаяся значениями $K_{n2} = -0,3$; $K_{\alpha 2} = -0,2$, соответствует балансировке типа «нормальная» схема. Ниже будет показано, что использование двух органов в каждом из каналов позволяет получить более высокие динамические характеристики ракеты. На этом завершим рассмотрение диаграмм состояния. Мы показали, что каждая схема с достаточной точностью характеризуется значением обобщенного параметра K_n (более полно парой K_n , K_α или K_n , χ). Это позволяет задавать множество альтернатив, определяющих тип аэродинамической схемы в виде одномерного числового множества, что особенно важно при использовании САПР.

Перейдем теперь к рассмотрению способов создания управляющих сил и моментов. Как известно, они по своей физической природе могут быть как аэродинамическими, так и газодинамическими (реактивными). Способ создания управляющих

сил и моментов является одним из главных признаков, характеризующих схему ракеты. Можно выделить три группы схем: аэродинамические, газодинамические и комбинированные (аэрогазодинамические). Рассмотрим этот вопрос более подробно. Ракета, как объект управления, имеет шесть степеней свободы (три перемещения центра масс и три вращения относительно связанных осей). Идеальная управляемость требует возможности независимого создания трех сил: R_x , R_y , R_z и трех моментов: M_x , M_y , M_z . Таким образом, полная характеристика управления может быть представлена в виде таблицы (см. рис. 2.4, а), имеющей три строки (оси: OX , OY , OZ) и два столбца (силы вдоль этих осей, моменты относительно этих осей). В качестве силы R_x выступает тяга двигателя, в качестве сил $R_{y,z}$ — подъемная сила ракеты. Момент M_x — есть момент крена, моменты $M_{y,z}$ — продольно-боковые моменты.

Оси	Факторы	
	Сила R	Момент M
x	тяга	крен
y	подъемная	поперечный
z	подъемная	поперечный


а

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & M_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & M_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & M_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 M_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & M_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & M_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & M_8 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \quad б$$

Рис. 2.4

Далее вместо таблицы будем рассматривать матрицу, имеющую три строки и два столбца. Условимся обозначать элементы матрицы 1 и 0, если используется аэродинамический (за счет энергии внешнего потока) или газодинамический (за счет энергии от сжигания топлива, расположенного на борту) соответствующий способ управления. Поскольку компоненты C и

M могут быть 1 или 0, то различным способам управления будут соответствовать матрицы с различным количеством и расположением нулей и единиц (нуль-единичные матрицы).

Каково же общее количество таких матриц (возможных альтернатив)? Прежде, чем ответить на этот вопрос, проведем некоторые уточнения. Отметим, что элемент $a_{11} = 0$, так как тяга всегда создается газодинамическим способом. Далее, для ракеты симметричной схемы можно положить $a_{12} = a_{13}$, $a_{22} = a_{23}$. В этом случае (рис. 2.4, а) достаточно рассматривать матрицу 2×2 . Общее число альтернатив

$$N = m^n. \quad (2.22)$$

Отсюда при $m = 2$, $n = 3$ получим $N = 8$. На рис. 2.4, б приведены восемь матриц, соответствующих в рассматриваемом случае всем возможным альтернативам. Видим, что матрица M_1 имеет один нуль, матрицы M_2 , M_3 , M_4 — два нуля, матрицы M_5 , M_6 , M_7 — три нуля, матрица M_8 — четыре нуля.

Рассмотрим основные из них. Наиболее употребительна схема, соответствующая матрице M_1 . Здесь подъемные силы и все моменты создаются аэродинамическим способом — эта схема соответствует ракетам с аэродинамическим управлением. Схема, соответствующая матрице M_8 , есть схема с газодинамическим управлением. Ракеты, выполненные по этой схеме, используются в космосе. Остальные матрицы M_i , $i = \overline{2, 7}$ соответствуют ракетам с комбинированным (аэрогазодинамическим) управлением. В настоящее время используются схемы, соответствующие матрице M_7 , где подъемные силы создаются аэродинамическим способом, а моменты — газодинамическим. Последнее связано с необходимостью обеспечения надежного старта ракеты при больших углах атаки носителя.

§ 2.3. МОДЕЛЬ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ И МОМЕНТОВ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ РАКЕТЫ НА БОЛЬШИХ УГЛАХ АТАКИ

Математическая модель ракеты должна содержать в качестве важнейшей составляющей части уравнения для коэффициентов аэродинамических сил и моментов как функций многих

переменных. Аргументами этих функций являются углы α , φ , определяющие мгновенную ориентацию вектора скорости относительно связанной системы координат, углы $\delta_1, \dots, \delta_n$, определяющие мгновенную геометрию ракеты как твердого тела, ее так называемую δ -конфигурацию. Получение этих функций опирается на использование данных продувок моделей в аэродинамических трубах. Отметим, что от аргументов α , φ возможен переход к канальным углам атаки на основе взаимоднозначного преобразования

$$\alpha_1 = \alpha \cos \varphi; \quad \alpha_2 = \alpha \sin \varphi; \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Таким образом, здесь α — полный угол атаки; φ — угол аэродинамического крена. Аналогично вектору линейной скорости V могут быть рассмотрены проекции ω_x , ω_y , ω_z вектора $\vec{\omega}$ абсолютной угловой скорости вращения ракеты (ее связанной СК) вокруг центра масс на оси связанной СК. И здесь подстановкой $\omega_y = \omega_0 \sin \varphi_\omega$, $\omega_z = \omega_0 \cos \varphi_\omega$ можно перейти к полярным переменным ω_0 , φ_ω .

Рассмотрим теперь группу аргументов, определяющих мгновенное положение органов управления ракеты ее δ -конфигурацию. Для ракеты с n органами управления и при условии независимого отклонения каждого органа имеем

$$\hat{\delta}_{(n)} = \{ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \}.$$

Важным частным случаем, к которому мы постоянно будем обращаться, является крестокрылая ракета с $n = 4$. Пусть положительное отклонение каждого из рулей соответствует элеронной конфигурации. Тогда при $\delta_i > 0$, $i = \overline{1, 4}$ (задние кромки рулей идут вниз) моменты m_x , m_y , m_z определяются следующими δ -конфигурациями:

$$\delta_3 = \frac{1}{4} (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4); \quad \delta_I = \frac{1}{2} (\delta_1 - \delta_3); \quad \delta_{II} = \frac{1}{2} (\delta_2 - \delta_4).$$

Завершая рассмотрение аргументов нашей модели, видим, что число основных аргументов есть $n + 2$. В частности, для крестокрылой ракеты имеем шесть аргументов α , φ , $\hat{\delta}_{(4)}$.

Теперь перейдем к рассмотрению функций ММ — СиМ, в качестве которых выступают безразмерные коэффициенты аэродинамических СиМ:

$$\{C_x, C_y, C_z, m_x, m_y, m_z\}.$$

Определение зависимости функций от аргументов произведем в два этапа: на первом — определим зависимость функций лишь от аргументов α , φ , на втором — как от аргументов α , φ , так и от аргументов $\hat{\delta}_{(n)}$.

Начнем с первого этапа. Наряду с СК $Oxyz$, введем повернутую связанную СК $Ox\xi\eta$, оси $O\xi$ и $O\eta$ которой ориентированы соответственно по плоскости угла атаки и по нормали к ней, и найдем связь между коэффициентами в исходной и повернутой СК. Очевидно, что коэффициенты C_x и m_x в обеих системах совпадают, а между остальными имеют место соотношения

$$\begin{aligned} C_y &= C_\xi \cos \varphi + C_\eta \sin \varphi; & m_y &= m_\eta \sin \varphi + m_\xi \cos \varphi; \\ C_z &= -C_\xi \sin \varphi + C_\eta \cos \varphi; & m_z &= m_\eta \cos \varphi + m_\xi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.23)$$

В рассматриваемом случае коэффициенты являются функциями лишь аргументов α и φ . Обозначим эту функцию в общем случае $F(\alpha, \varphi)$. Для каждого фиксированного α в силу физического смысла угла φ , функция $F(\alpha, \varphi)$ является однозначной периодической функцией этого угла. Представим ее в форме

$$F(\alpha, \varphi) = \sum_k \left(a_k(\alpha) \cos k\varphi + b_k(\alpha) \sin k\varphi \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.24)$$

являющейся тригонометрическим полиномом от φ при фиксированном α и обыкновенным полиномом от α при фиксированном φ . Такую форму представления функции $F(\alpha, \varphi)$ принято называть *смешанным полиномом*.

Рассмотрим основные свойства функции $F(\alpha, \varphi)$, вытекающие из наличия геометрической симметрии компоновки: зеркальной относительно одной из координатных плоскостей и осевой относительно продольной оси [11].

Зеркальная симметрия означает наличие такой плоскости, содержащей ось ракеты, что любая точка поверхности ракеты, лежащая по одну сторону этой поверхности зеркально отражается на точку поверхности, лежащей по другую сторону.

Осевая симметрия порядка n (n -гональная) означает, что при повороте ракеты относительно продольной оси на угол $\frac{2\pi}{n}$ (так называемый угол замкнутой операции) ее поверхность совмещается сама с собой. Крестокрылая компоновка обладает осевой симметрией с $n = 4$. Случай $n = 1$, имеющий наинизший порядок симметрии, соответствует любой конфигурации, случай $n = \infty$ — только телу вращения.

Приведем примеры крестокрылых компоновок, обладающих при различных δ -конфигурациях различными видами симметрии: зеркальной и осевой, только зеркальной, только осевой (рис. 2.5).

Пусть рассматриваемая конфигурация обладает зеркальной симметрией относительно плоскости Oxy , являющейся началом отсчета углов φ . Тогда имеем

$$F(\alpha, -\varphi) = \varepsilon F(\alpha, \varphi);$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{для } C_x, C_\xi, m_\eta; \\ -1 & \text{для } C_\eta, m_\xi, m_x. \end{cases} \quad (2.25)$$

Как видим, коэффициенты СиМ распадаются на две группы: коэффициенты C_ξ, m_η, C_x (нормальная сила и момент, действующий в плоскости угла атаки) — симметричные факторы, являющиеся четными функциями угла φ ; коэффициенты C_η, m_ξ, m_x (боковые сила и момент, момент крена) — антисимметричные факторы, являющиеся нечетными функциями угла φ . Очевидно, что симметричные факторы раскладываются по косинусам, т.е. все b_k равны нулю, антисимметричные — по синусам, т.е. все a_k равны нулю.

Пусть конфигурация обладает еще и осевой симметрией порядка n ("n-гональный"). Тогда будем иметь

$$F(\alpha, \varphi) = F\left(\alpha, \varphi + k \frac{2\pi}{n}\right). \quad (2.26)$$

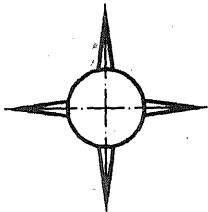
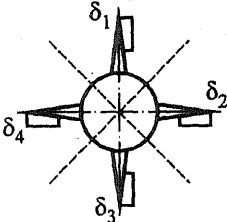
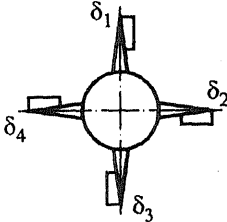
Вид симметрии	Конфигурация	δ_i
Зеркальная+осевая		Нуль-конфигурация $\delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta_4=0$
Только зеркальная		Канальная конфигурация $\delta_1=-\delta_3=\delta_{II}$ $\delta_2=-\delta_4=\delta_I$
Только осевая		Элеронная конфигурация $\delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta_4=\delta_3$

Рис. 2.5

Как следует из (2.26), нулевыми являются лишь коэффициенты полинома (2.23), для которых отношение k/n — есть целое, а остальные равны нулю.

С учетом (2.25) и (2.26) форма (2.24) конкретизируется следующим образом:

$$\begin{array}{l} C_x \\ C_\xi \\ m_\eta \end{array} \left| \begin{array}{l} (\alpha, \varphi) = \sum_k a_k \cos kn \varphi, \quad k = 0, 1, \dots, \bar{k}; \\ \\ \end{array} \right. \quad (2.27)$$

$$\begin{array}{l} m_x \\ m_\xi \\ C_\eta \end{array} \left| \begin{array}{l} (\alpha, \varphi) = \sum_k b_k \sin kn \varphi, \quad k = 1, 2, \dots, \bar{k}. \\ \\ \end{array} \right.$$

Как правило, именно коэффициенты (2.27) экспериментально определяются в трубных испытаниях, поскольку система весовых измерений трубы ориентируется по осям системы $Ox\xi\eta$. Для дальнейшего удобно вместо единых a_k , b_k ввести для каждого из коэффициентов СиМ свои обозначения в форме (2.27): f_{xkn} , f_{kn} , m_{kn} , $\tilde{f}_{kn}$, $\tilde{m}_{kn}$, m_{xkn} . Тогда вместо (2.27) получим:

$$\begin{aligned} C_x &= \sum_k f_{xkn}(\alpha) \cos kn\varphi; & m_x &= \sum_k m_{xkn}(\alpha) \sin kn\varphi; \\ C_\xi &= \sum_k f_{kn}(\alpha) \cos kn\varphi; & m_\xi &= \sum_k \tilde{m}_{kn}(\alpha) \sin kn\varphi; & (2.28) \\ m_\eta &= \sum_k m_{kn}(\alpha) \cos kn\varphi; & C_\eta &= \sum_k \tilde{f}_{kn}(\alpha) \sin kn\varphi. \end{aligned}$$

Рассмотрим структуру полученных СиМ на примере момента m_η . Поскольку в сумме (2.28) для этой компоненты имеется член с индексом $k=0$, то в составе момента можно выделить часть, не зависящую от угла φ . Далее в составе суммы можно выделить член, соответствующий значению $k=1$. Члены, не зависящие от угла φ ($k=0$) и периодические члены основной частоты ($k=1$) будем называть главной частью соответствующей компоненты. Для большинства практических задач учета их оказывается достаточно. При этом будут учтены такие особенности СиМ крестокрылой ракеты как нелинейность, наличие боковых составляющих, различие характеристик в плоскостях крыла и биссектора. Общая структура коэффициентов СиМ приведена на рис. 2.6.

Теперь надо возвратиться от повернутой СК $Ox\xi\eta$ к исходной СК $Oxyz$. Разрешая (2.23) относительно коэффициентов СиМ исходной СК, получаем:

$$\begin{aligned} C_x &= \sum_k f_{xkn}(\alpha) \cos kn\varphi; \\ C_y &= \left[\sum_k f_{kn}(\alpha) \cos kn\varphi \right] \cos \varphi + \left[\sum_k \tilde{f}_{kn}(\alpha) \sin kn\varphi \right] \sin \varphi; \end{aligned}$$

$$C_z = - \left[\sum_k f_{kn}(\alpha) \cos kn \varphi \right] \sin \varphi + \left[\sum_k \tilde{f}_{kn}(\alpha) \sin kn \varphi \right] \cos \varphi ; \quad (2.29)$$

$$m_x = \sum_k m_{xkn}(\alpha) \sin kn \varphi ;$$

$$m_y = \left[\sum_k m_{kn}(\alpha) \cos kn \varphi \right] \sin \varphi + \left[\sum_k \tilde{m}_{kn}(\alpha) \sin kn \varphi \right] \cos \varphi ;$$

$$m_z = \left[\sum_k m_{kn}(\alpha) \cos kn \varphi \right] \cos \varphi + \left[\sum_k \tilde{m}_{kn}(\alpha) \sin kn \varphi \right] \sin \varphi .$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \bar{k} .$$

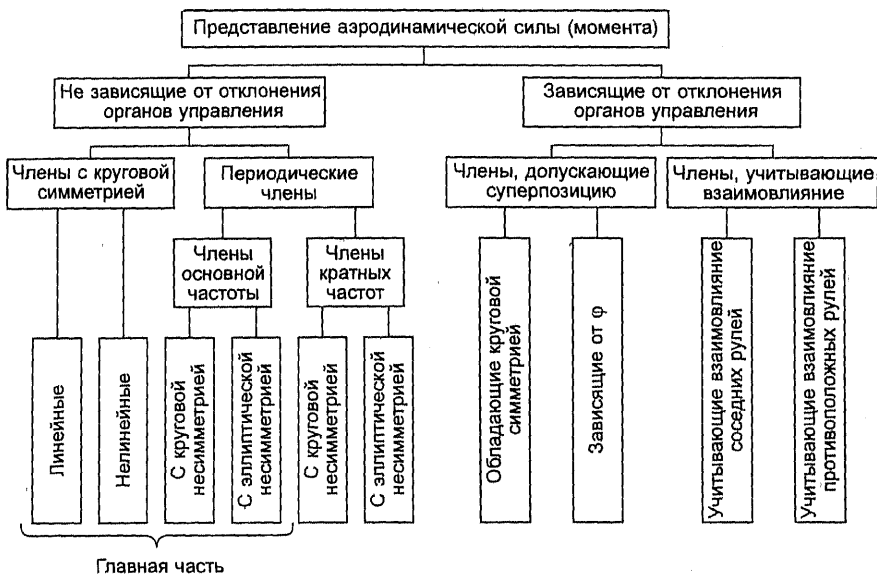


Рис. 2.6

Формула (2.29) справедлива для любой δ -конфигурации компоновки, если угол φ отсчитывается от плоскости зеркальной симметрии. В частности, они справедливы для компоновки с неотклоненными рулями «нуль-конфигурации» ($\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = 0$). В этом случае компоновка обладает симметрией наивысшего порядка, который подставляется в (2.29) в качестве n . В качестве простейшего примера применения формулы (2.29) получим выражения для коэффициентов момента крестокрылой компоновки при неотклоненных рулях. Удерживая гармоники только низшего порядка ($\bar{k} = 1$), имеем при $n = 4$

$$\begin{aligned} m_y &= \left[m_0(\alpha) + m_4(\alpha) \cos 4\varphi \right] \sin \varphi + \tilde{m}_4(\alpha) \sin 4\varphi \cos \varphi; \\ m_z &= \left[m_0(\alpha) + m_4(\alpha) \cos 4\varphi \right] \cos \varphi - \tilde{m}_4(\alpha) \sin 4\varphi \sin \varphi; \quad (2.30) \\ m_x &= m_{x4}(\alpha) \sin 4\varphi. \end{aligned}$$

Формулы (2.30) содержат минимально необходимое число членов для того, чтобы ММ отражала различие моментных характеристик в плоскости крыла ($\varphi = 0$) и биссектора $\left(\varphi = \frac{\pi}{4} \right)$. Рассмотрим (2.30) более подробно. Из выражений для m_y и m_z следует, что «поканальное» представление продольно-боковых моментов: $m_z(\alpha_1)$, $m_y(\alpha_2)$ возможно только при линейности $m_0(\alpha)$ и равенстве нулю четвертых гармоник, т.е. при $m_4(\alpha) = \tilde{m}_4(\alpha) = 0$. Указанное, как правило, имеет место только при малых углах атаки.

Рассмотрим теперь момент m_x . Это простейшая модель момента «косого обдува» от углов атаки. Преобразуем выражение для m_x , выразив его через канальные углы атаки. Учитывая

$$\sin 4\varphi = 4 \sin \varphi \cos \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \frac{4}{\alpha^4} (\alpha_2^3 \alpha_1^3 - \alpha_1^3 \alpha_2^3),$$

и вводя обозначение $\kappa = \left[\frac{4m_{x4}(\alpha)}{\alpha^4} \right]_{\text{ср}}$, получим выражение (2.13).

Перейдем теперь ко второму этапу и определим коэффициенты СиМ как функции не только α , φ , но и углов δ_i отклонения органов управления, обозначив их в общем случае $F(\alpha, \varphi, \delta_1, \dots, \delta_n)$. Структура СиМ в этом случае может быть определена на основе принципа *нарушения симметрии*.

Согласно этому принципу отклонение руля вносит в структуру разложения СиМ такие члены, которые связаны с изменением симметрии конфигурации. Пусть рули образуют конфигурацию δ_I , δ_{II} , δ_9 . Тогда

$$\begin{aligned} m_z &= m_z'(\alpha, \varphi) + \eta(\delta_I) m_z''(\alpha, \varphi); \\ m_y &= m_y'(\alpha, \varphi) + \eta(\delta_{II}) m_y''(\alpha, \varphi); \\ m_x &= m_x'(\alpha, \varphi) + \eta(\delta_9) m_x''(\alpha, \varphi). \end{aligned} \quad (2.31)$$

В этих выражениях первые слагаемые соответствуют компоновкам с неотклоненными рулями. Для них справедливо выражение (2.30) и условия симметрии зеркальной и осевой с $n = 4$. Вторые члены соответствуют условиям изменившейся симметрии, так как отклонение руля уменьшает порядок осевой симметрии.

Функция $\eta(\delta)$, стоящая в виде сомножителя перед вторым членом, есть однозначная, нечетная функция, удовлетворяющая условиям

$$\eta(0) = 0; \quad \eta(-\delta) = -\eta(\delta). \quad (2.32)$$

В простейшем случае $\eta(\delta) = \delta$, чем мы в дальнейшем и ограничимся. Общая структура коэффициентов СиМ, зависящих от δ_i , приведена выше на рис. 2.6.

Рассмотрим на примере $m_x''(\alpha, \varphi, \delta_1, \dots, \delta_4)$, как влияет нарушение симметрии на структуру полинома. Пусть зеркальная симметрия сохраняется, а порядок осевой симметрии уменьшается с $n = 4$ до $n = 2$ и $n = 1$.

Ограничиваясь учетом четырех гармоник, получим

$$m_x''(\alpha, \varphi, \delta_1, \dots, \delta_4) =$$

$$= \begin{cases} b_1 \sin 4\varphi, & \text{для } n = 4; \\ b_1 \sin 2\varphi + b_2 \sin 4\varphi, & \text{для } n = 2; \\ b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + b_3 \sin 3\varphi + b_4 \sin 4\varphi, & \text{для } n = 1. \end{cases} \quad (2.33)$$

Таким образом, уменьшение порядка осевой симметрии приводит к усложнению полинома. Так, при уменьшении n с 4 до 1 количество членов в разложении увеличивается с одного до четырех. Отметим, что при исключении зеркальной симметрии количество членов еще более увеличивается за счет косинусов.

Общее выражение для полинома m_x'' для крестокрылой компоновки (удерживаем гармоники до четвертой включительно) с учетом расположения руля относительно плоскости зеркальной симметрии имеет вид

$$\begin{aligned} m_x'' = & \eta(\delta_1) [a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + a_3 \cos 3\varphi + a_4 \cos 4\varphi] + \\ & + \eta(\delta_2) [a_0 - a_1 \sin \varphi - a_2 \cos 2\varphi + a_3 \sin 3\varphi + a_4 \cos 4\varphi] + \\ & + \eta(\delta_3) [a_0 - a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi - a_3 \cos 3\varphi + a_4 \cos 4\varphi] + \\ & + \eta(\delta_4) [a_0 + a_1 \sin \varphi - a_2 \cos 2\varphi - a_3 \sin 3\varphi + a_4 \cos 4\varphi]. \end{aligned}$$

Отсюда группируя слагаемые в другом порядке, получим

$$\begin{aligned} m_x'' = & [\eta(\delta_1) + \eta(\delta_3)] [a_0 + a_2 \cos 2\varphi + a_4 \cos 4\varphi] + \\ & + [\eta(\delta_2) + \eta(\delta_4)] [a_0 - a_2 \cos 2\varphi + a_4 \cos 4\varphi] + \\ & + [\eta(\delta_1) - \eta(\delta_3)] [a_1 \cos \varphi + a_3 \cos 3\varphi] - \\ & - [\eta(\delta_2) - \eta(\delta_4)] [a_1 \sin \varphi - a_3 \sin 3\varphi]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Из (2.34) видно, что члены в первой и второй строках образуют момент эффективности рулей как элеронов, последние две строки дают обобщенную форму момента косого обдува. Видно также, что члены, содержащие четные гармоники, характеризуют эффективность рулей как элеронов, члены с нечетными гармониками характеризуют момент косого обдува.

Рассмотрим теперь на основании (2.34) некоторые частные конфигурации.

1. Нуль конфигурация: $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$. Имеем $m_x'' = 0$.

2. Элеронная конфигурация четырех рулей $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_9$.

$$m_x'' = 4 \eta (\delta_9) [a_0 + a_4 \cos 4\varphi]. \quad (2.35)$$

3. Элеронная конфигурация двух рулей $\delta_2 = \delta_4 = \delta_9$; $\delta_1 = \delta_3 = 0$

$$m_x'' = 2 \eta (\delta_9) [a_0 - a_2 \cos 2\varphi + a_4 \cos 4\varphi]. \quad (2.36)$$

4. Канальная конфигурация $\delta_1 = -\delta_3 = \delta_{II}$; $\delta_2 = -\delta_4 = \delta_I$

$$m_x'' = 2 \left[\eta (\delta_{II}) \cos \varphi - \eta (\delta_I) \sin \varphi \right] [a_1 + a_3 \cos 4\varphi] + \\ + 2 \left[\eta (\delta_{II}) \sin \varphi + \eta (\delta_I) \cos \varphi \right] a_3 \sin 4\varphi. \quad (2.37)$$

Из (2.37) получим с учетом (2.32), удерживая гармоники не выше первой и переходя к канальным углам атаки

$$m_x'' = \frac{2a_1}{\alpha} (\delta_{II} \alpha_1 - \delta_I \alpha_2). \quad (2.38)$$

Отсюда при обозначении $\kappa_1 = \left[\frac{2a_1(\alpha)}{\alpha} \right]_{\text{ср}}$ получаем выражение (2.14).

Поскольку произвольная δ -конфигурация не обладает, вообще говоря, ни зеркальной симметрией, ни осевой порядка, отличного от единицы, то смешанные полиномы для наших конфигураций должны содержать гармоники всех порядков, как синусные, так и косинусные. Это обстоятельство затрудняет получение достаточно простых зависимостей коэффициентов СиМ от углов δ_i . Можно указать, однако, некоторые общие свойства искомых функций, вытекающие не из геометрической симметрии конфигурации, а из конструктивной симметрии расположе-

ния осей вращения органов управления [22]. Эти свойства отражают инвариантность коэффициентов СиМ при некоторых преобразованиях аргументов, характеризующихся перестановками индексов.

Следующие два соотношения, справедливость которых легко проверяется, будем считать основными:

$$F(\alpha, \varphi, \delta_1, \dots, \delta_n) = F\left(\alpha, \varphi + \frac{2\pi}{n}, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n, \delta_1\right); \quad (2.39)$$

$$F(\alpha, \varphi, \delta_1, \dots, \delta_n) = \varepsilon F(\alpha, -\varphi, -\delta_1, -\delta_n, -\delta_{n-1}, \dots, \delta_2), \quad (2.40)$$

где $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{для } C_x, C_\xi, m_\eta; \\ -1 & \text{для } C_\eta, m_\xi, m_x. \end{cases}$

Преобразование параметров, рассмотренных в этих соотношениях, будем обозначать

$$\hat{\delta} \rightarrow \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n;$$

$$h \hat{\delta} \rightarrow \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n, \delta_1; \quad (2.41)$$

$$\bar{h} \hat{\delta} \rightarrow -\delta_1, -\delta_n, \dots, -\delta_3, -\delta_2.$$

Таким образом, оператор h означает прямую круговую перестановку индексов δ_i на один шаг, а оператор $\bar{h}$ — обратную круговую перестановку индексов на один шаг со сменой знаков δ_i . При этом равенства (2.39) и (2.40) запишутся соответственно в виде

$$F(\alpha, \varphi, \hat{\delta}) = F\left(\alpha, \varphi + \frac{2\pi}{n}, h \hat{\delta}\right); \quad (2.42)$$

$$F(\alpha, \varphi, \hat{\delta}) = \varepsilon F(\alpha, -\varphi, \bar{h} \hat{\delta});$$

Кратное применение операторов h и $\bar{h}$, как следует из (2.42), приводит к соотношениям, выражающим инвариантность СиМ при любых других круговых перестановках индексов. Для крестокрылой компоновки условия (2.39) и (2.40) дают

$$\left. \begin{aligned} F(\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) &= F(-\alpha_2, \alpha_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_1); \\ F(-\alpha_1, -\alpha_2, \delta_3, \delta_4, \delta_1, \delta_1) &= \varepsilon F(\alpha_2, -\alpha_1, \delta_4, \delta_1, \delta_2, \delta_3). \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) &= \\ &= \varepsilon F(\alpha_1, -\alpha_2, -\delta_1, -\delta_4, -\delta_3, -\delta_2) = \\ &= \varepsilon F(\alpha_2, \alpha_1, -\delta_4, -\delta_3, -\delta_2, -\delta_1). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Итак, для произвольной δ -конфигурации имеем

$$\begin{aligned} F(\alpha, \varphi, \delta_1, \dots, \delta_n) &= \\ &= \sum_k \left[a_k(\alpha, \delta_1, \dots, \delta_n) \cos k\varphi + b_k(\alpha, \delta_1, \dots, \delta_n) \sin k\varphi \right]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Непосредственное применение условий (2.42) к полиному (2.45) дает следующие правила преобразования коэффициентов при перестановке индексов δ_i :

$$a_k(\alpha, \hat{\delta}) = a_k(\alpha, h\hat{\delta}) \cos \frac{2\pi}{n}k + b_k(\alpha, h\hat{\delta}) \sin \frac{2\pi}{n}k; \quad (2.46)$$

$$b_k(\alpha, \hat{\delta}) = -a_k(\alpha, h\hat{\delta}) \sin \frac{2\pi}{n}k + b_k(\alpha, h\hat{\delta}) \cos \frac{2\pi}{n}k;$$

$$a_k(\alpha, \hat{\delta}) = \varepsilon a_k(\alpha, \bar{h}\hat{\delta}); \quad b_k(\alpha, \hat{\delta}) = -\varepsilon b_k(\alpha, \bar{h}\hat{\delta}). \quad (2.47)$$

Для крестокрылой компоновки ($n=4$) получим соответственно из (2.46) и (2.47):

$$\begin{aligned} a_0(\alpha, \hat{\delta}) &= a_0(\alpha, h\hat{\delta}); & a_1(\alpha, \hat{\delta}) &= b_1(\alpha, h\hat{\delta}); \\ b_1(\alpha, \hat{\delta}) &= -a_1(\alpha, h\hat{\delta}); \\ a_2(\alpha, \hat{\delta}) &= -a_2(\alpha, h\hat{\delta}); \\ b_2(\alpha, \hat{\delta}) &= -b_2(\alpha, h\hat{\delta}); \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$a_0(\alpha, \hat{\delta}) = \pm a_0(\alpha, \bar{h} \hat{\delta}); \quad a_1(\alpha, \hat{\delta}) = \pm a_1(\alpha, \bar{h} \hat{\delta});$$

$$b_1(\alpha, \hat{\delta}) = \pm b_1(\alpha, \bar{h} \hat{\delta}); \text{ и т.д., } (2.49)$$

где верхний и нижний знаки относятся соответственно к C_x , C_ξ , m_η и C_η , m_ξ , m_x . Таким образом, построение ММ СиМ состоит в определении многомерных функций $a_k(\alpha, \hat{\delta})$ и $b_k(\alpha, \hat{\delta})$, удовлетворяющих для случая $n = 4$ условиям (2.48) и (2.49). При этом значения функций определяются отдельно: для пары коэффициентов C_y , C_z , для коэффициента C_x , для пары коэффициентов m_z , m_y , для коэффициента m_x .

Отметим, что на основе рассмотренного подхода может быть получено обобщение понятия эффективности рулей, с введением эффективностей *первого* рода, характеризуемой нечетными функциями $\eta_k(\delta_i)$, и *второго* рода, характеризуемой четными функциями $\xi_k(\delta_i)$. Это обобщение основано на учете вклада каждого из органов управления в величину компонент главного вектора (или момента) как совокупности нормальной, тангенциальной и осевой составляющих. Более подробно эти вопросы рассмотрены в [8].

На этом завершим рассмотрение структуры СиМ.

Практическое создание ММ — СиМ опирается на использование данных продувок в аэродинамических трубах с последующей машинной обработкой результатов. С математической точки зрения это означает восстановление многомерной непрерывной функции по ее значениям, известным для дискретного набора точек, отвечающих исследованным в трубах положениям модели и органов управления. Известно, что эта задача может быть решена как методами *интерполяции*, так и методами *аппроксимации*.

В первом случае гиперповерхность обязательно должна проходить через каждую многомерную точку. Во втором случае указанная гиперповерхность может не проходить через экспериментальные точки, обеспечивая близость к ним в смысле какого-либо интегрального критерия, например, равномерного. При малом числе исследованных положений плоскости угла атаки и отклонений органов управления приходится ограничиваться интерполяцией, при наличии достаточного объема трубных

испытаний, что обычно имеет место, следует пользоваться аппроксимацией.

При построении ММ-СиМ методами аппроксимации необходимо строго установить класс функций, из которого выбираются аппроксимирующие выражения. В нашем случае от этих функций логично потребовать непрерывности и удовлетворения условиям геометрической симметрии объекта, т.е. автоморфизме по отношению к определенным преобразованиям аргументов. Как уже указывалось, в ММ-СиМ в качестве аргументов может использоваться как полярное (α, φ) , так и декартово представление пространственного угла атаки (α_1, α_2) . Вместе с тем переход от аргументов α, φ к начальным углам α_1, α_2 означает ненужное ужесточение требований к гладкой аппроксимирующей функции. Например, аналитическая по α_1, α_2 функция будет аналитической и по аргументам α, φ . Обратное же не справедливо, что следует из наличия особенности в формулах перехода к декартовым переменным при $\alpha = 0$. Тем самым, используя при аппроксимации в качестве аргументов α, φ , мы расширяем класс функций, привлекая в случае необходимости функции рациональные и даже алгебраические по α_1, α_2 .

При практическом использовании ММ-СиМ может быть реализована в виде массива чисел, хранящихся в памяти ЭВМ. Однако стремление уменьшить время счета, упростить процедуру интерполяции, подробно изучить влияние тех или иных аргументов вызывает необходимость выбирать аппроксимирующие функции из класса представленных в виде комбинаций функций малой размерности, в предельном случае одномерных. Их реализация не только упрощает расчет движения ракеты на ЭВМ (в памяти хранятся при этом не значения функций, а коэффициенты аппроксимаций, например, k гладких сплайнов), но и позволяет построить модель, пригодную также и для реализации на АВМ.

Отметим, что многомерные функции, отражающие в этих моделях эффективность органов управления, могут быть приближенно представлены комбинацией функций одного переменного, но уже не суммами, а произведениями. Например,

$$f(\alpha, \delta_i, \delta_{i+1}) = g(\alpha, \delta_i) \mu(\alpha, \delta_{i+1}) + g(\alpha, \delta_{i+1}) \mu(\alpha, \delta_i).$$

Далее, любая из двумерных зависимостей вида $g(\alpha, \delta)$, $\mu(\alpha, \delta)$ может быть в свою очередь представлена в виде комбинации произведений вида

$$f(\alpha, \delta) = \mu(\delta) \nu(\alpha).$$

Если функции $\mu(\delta)$ оказываются с точностью до постоянного множителя, зависящего только от числа M , одинаковыми для всех коэффициентов a_k, b_k , то удастся прийти к ММ, достаточно удобной для практики.

Более подробно эти вопросы рассмотрены в [8].

Глава 3. БАЛЛИСТИКА РАКЕТЫ

§ 3.1. ЭНЕРГОВООРУЖЕННОСТЬ И БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ КАК ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ ОБЛИК

Начнем с рассмотрения одноступенчатой ракеты с однорежимным двигателем. В этом случае закон изменения скорости по времени включает два участка: стартовый и пассивный. Первый из них характеризуется малой продолжительностью ($t_r = 3 + 5$ с) и резким нарастанием скорости полета (ускорение до $\sim 25 + 30$). Второй участок соответствует свободному полету ракеты по инерции и характеризуется существенным изменением скорости полета.

Рассмотрим методику определения зависимостей $V(t)$ и $S(t) = \int_0^t V(t) dt$ на этих участках полета. Уравнение движения на стартовом участке для случая горизонтальной траектории может быть записано в виде

$$m \frac{dV}{dt} = R - Q_x. \quad (3.1)$$

Пренебрегая в (3.1) влиянием силы лобового сопротивления, т.е. полагая $Q_x = 0$ и учитывая $R = -g J_1 \dot{m}$, получаем

$$m \frac{dV}{dt} = -gJ_1 \frac{dm}{dt} . \quad (3.2)$$

Интегрируя это уравнение с разделяющимися переменными в пределах: по t от нуля до t_r , по V от начального значения V_n до максимального значения V_m , получим при $J_1 = \text{const}$ (справедливо для РДТТ) формулу Циолковского

$$V_m = V_n + gJ_1 \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_r}; \quad \bar{G}_r = \frac{G_r}{G_0}. \quad (3.3)$$

Величина прироста скорости за время стартового участка

$$\Delta V_m = V_m - V_n = gJ_1 \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_r}. \quad (3.4)$$

Рассмотрим возможности упрощения формулы (3.4). Полагая $\ln x = \frac{2(x-1)}{x+1}$; $x = 1 - \bar{G}_r$, получаем

$$\Delta V_m \approx gJ_1 \frac{\bar{G}_r}{1 - 0,5 \bar{G}_r}. \quad (3.5)$$

Физический смысл формулы (3.5) состоит в том, что прирост количества движения под действием импульса тяги определяется в этом случае по среднему значению массы $m_{cp} = m_0(1 - 0,5 \bar{G}_r)$. Из (3.5) при малых значениях $\bar{G}_r$ можно получить следующее приближение, что соответствует отказу от учета переменности массы:

$$\Delta V_m \approx gJ_1 \bar{G}_r. \quad (3.6)$$

Оказывается, что формулу (3.6) можно использовать и не при малых $\bar{G}_r$. Физическое обоснование этой возможности использования состоит в следующем: 1) пренебрежение эффектом переменности массы приводит к снижению величины ΔV_m ; 2) пренебрежение тормозящим действием силы Q_x приводит к повышению величины ΔV_m .

Поскольку эти два фактора в среднем уравниваются, точность выражения (3.6) по сравнению со значением, получен-

ным методом численного интегрирования, оказывается приемлемой. На рис. 3.1, а приведено сравнение зависимостей (3.4), (3.5) и (3.6).

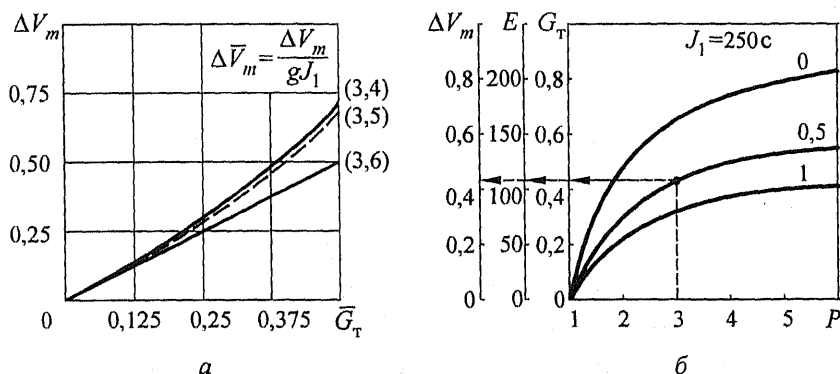


Рис. 3.1

Из (3.6) получим выражение для энерговооруженности ракеты

$$E = \frac{J_{\Sigma}}{G_0} = \frac{J_1 G_T}{G_0} = J_1 \bar{G}_T. \quad (3.7)$$

Приращение скорости полета может быть выражено через величину энерговооруженности

$$\Delta V_m = g E. \quad (3.8)$$

Как следует из (3.6)–(3.8), основным параметром, характеризующим приращение скорости полета на стартовом участке является относительный запас топлива или пропорциональная ему величина энерговооруженности. Определим допустимый по условиям размещения в ракете запас топлива. Из уравнения весового баланса имеем

$$G_0 = G_{\text{пн}} + (1 + \alpha) G_T, \quad (3.9)$$

где G_0 — стартовый вес; $G_{\text{пн}}$ — вес полезной нагрузки; α — коэффициент весового совершенства конструкции двигателя.

Обозначая $\frac{G_0}{G_{\text{нн}}} = P$, получаем из (3.9)

$$\bar{G}_T = \frac{1}{1 + \alpha} \left(1 - \frac{1}{P} \right). \quad (3.10)$$

При проектировании ракеты величины P и α обычно бывают известны. Тогда из (3.10) может быть определена допустимая величина $\bar{G}_T$. Зависимость $\bar{G}_T(P)$ для трех значений $\alpha = 0; 0,5; 1,0$ приведена на рис. 3.1, б. Поскольку величины E и ΔV_m пропорциональны величине $\bar{G}_T$, на вертикальной оси приведены также шкалы для этих величин.

Для перспективных ракет рассматриваемого класса $P \approx 3,0$; $\alpha = 0,5$. В этом случае $\bar{G}_T = 0,455$, $E = 110$ с.

Перейдем теперь к рассмотрению пассивного участка. Сила лобового сопротивления при нулевой подъемной силе может быть представлена в виде

$$Q_{x0} = \frac{1}{2} C_{x0} S_m \rho_n V^2 = \frac{1}{2} C_{x0} S_m \rho_0 \Delta V^2; \quad \Delta = \frac{\rho_n}{\rho_0}, \quad (3.11)$$

где C_{x0} — коэффициент лобового сопротивления при нулевой подъемной силе; S_m — площадь миделевого сечения; ρ_0 — плотность воздуха при $H = 0$; V — скорость полета; Δ — относительная плотность.

Тангенциальное ускорение ракеты от силы Q_{x0}

$$j = \frac{Q_{x0}}{m_k} = \frac{C_{x0} S_m}{G_k} \cdot \frac{1}{2} \rho_0 g V^2 \Delta. \quad (3.12)$$

Входящее в (3.12) выражение $\frac{C_{x0} S_m}{G_k}$ принято называть баллистическим коэффициентом σ :

$$\sigma = \frac{C_{x0} S_m}{G_k}. \quad (3.13)$$

Произведение баллистического коэффициента на относительную плотность, т.е.

$$\sigma_H = \sigma \cdot \Delta, \quad (3.14)$$

называется приведенным баллистическим коэффициентом. Таким образом, физический смысл баллистического коэффициента состоит в том, что на заданном режиме полета (величины V и Δ) он однозначно определяет тангенциальное ускорение ракеты. Поскольку $C_{x0} = f(M, H)$, условимся в дальнейшем оценивать σ при фиксированных значениях этих величин, положив $M = 2$; $H = 0$.

Рассмотрим семейство геометрически подобных ракет, имеющих одинаковые C_{x0} и $\lambda = \frac{L}{D}$. Тогда из (3.13) получим

$$\sigma = \frac{C_{x0} S_M}{\gamma_{cp} S_M L} = \left[\frac{C_{x0}}{\gamma_{cp} \lambda} \right] \frac{1}{D}. \quad (3.15)$$

Здесь γ_{cp} — средний удельный вес ракеты; D — диаметр корпуса ракеты.

Как следует из (3.15), баллистический коэффициент гиперболически зависит от калибра ракеты, т.е. для снижения σ необходимо увеличивать калибр, однако с ростом D растет и пассивный вес ракеты. Для современных ракет величина баллистического коэффициента $\sigma = (1,5 + 2,5) \cdot 10^{-4}$ м²/кг.

Таким образом, мы определили основные параметры E и σ , определяющие баллистический облик ракеты рассматриваемого типа.

Перейдем к анализу дальности полета. Поскольку в рассматриваемом случае время стартового участка мало, дальность, набираемая ракетой на этом участке также мала (при мгновенном сгорании топлива $S_{акт} = 0$), и ее можно не учитывать. В этом случае дальность полета однозначно определяется пассивным участком.

Определение величины этой дальности произведем в два этапа: на первом этапе без учета индуктивного сопротивления ракеты, т.е. при $C_x = C_{x0}$, на втором этапе с учетом полного сопротивления ракеты:

$$C_x = C_{x0} + C_{x \text{ инд}} = C_{x0} + K_y C_y^2. \quad (3.16)$$

Здесь $C_{x \text{ инд}} = K_y C_y^2$ — индуктивная составляющая сопротивления;
 $K_y = \frac{1}{C_y^\alpha}$.

Отметим, что величины C_{x0} и K_y однозначно определяют максимальное аэродинамическое качество ракеты $K_{a \text{ max}}$:

$$K_{a \text{ max}} = \left(\frac{C_y}{C_x} \right)_{\text{max}} = \frac{1}{2 \sqrt{C_{x0} K_y}}. \quad (3.17)$$

Для современных ракет величина $K_{a \text{ max}} = 2,5 + 3,0$

Начнем с рассмотрения первого этапа. Из (3.1) при $R \equiv 0$ и $C_{x0}(m) = C_{x0 \text{ ср}} = \text{const}$ получим

$$\frac{dV}{dt} = -\kappa V^2; \quad \kappa = \frac{1}{2} \rho_0 g \Delta \sigma = \varepsilon \sigma. \quad (3.18)$$

Здесь $\varepsilon = \frac{1}{2} \rho_0 g \Delta$. Из (3.18), при изменении скорости от значения V_m до текущего значения V , получим

$$V = \frac{V_m}{1 + \kappa V_m t};$$

$$S_I = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa V_m t) = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{V_m}{V} \right); \quad (3.19)$$

$$t = \frac{1}{\kappa V_m} \left(\frac{V_m}{V} - 1 \right)$$

Здесь время отсчитывается от начала пассивного участка. На основании (3.19) можно получить зависимости текущих значений $V(t)$ и $S_I(t)$ для пассивного участка полета. Для определения конечной дальности полета надо задать значение конечной скорости. Обычно принимают $V_{\text{кон}} = V_n$. Тогда из (3.19) получим значение конечной дальности

$$S_I = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{V_m}{V_n} \right). \quad (3.20)$$

Рассмотрим отношение скоростей, стоящих под знаком логарифма:

$$\frac{V_m}{V_H} = \frac{V_H + gE}{V_H} = 1 + \frac{gE}{V_H} = 1 + \bar{E}. \quad (3.21)$$

Здесь введена относительная энерговооруженность $\bar{E} = \frac{gE}{V_H}$

На основании (3.20) и (3.21) получим

$$\bar{S}_I = \varepsilon \sigma, \quad \bar{S}_I = \ln(1 + \bar{E}). \quad (3.22)$$

На рис. 3.2 приведена зависимость $\bar{S}_I(\bar{E})$. Как видим, величина неограниченно растет с ростом $\bar{E}$. На основании (3.22) имеем

$$\bar{S}_I = \frac{1}{\varepsilon \sigma} \ln(1 + \bar{E}). \quad (3.23)$$

Как следует из (3.23), дальность полета увеличивается как при увеличении $\bar{E}$, так и при уменьшении σ . Поскольку дальность полета обратно пропорциональна баллистическому коэффициенту σ , из (3.23), в частности, следует нецелесообразность сброса двигателя после окончания его работы. Действительно, в этом случае конечная масса уменьшается в отношении $\frac{1 + \alpha}{a + \alpha P}$, что при сохранении калибра приводит к соответствующему увеличению σ .

Преобразуем (3.23):

$$S_I = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\bar{E}}{\sigma} \frac{\ln(1 + \bar{E})}{\bar{E}} = \frac{1}{\varepsilon} \gamma(\bar{E}) \frac{\bar{E}}{\sigma}; \quad (3.24)$$

$$\gamma(\bar{E}) = \frac{\ln(1 + \bar{E})}{\bar{E}}.$$

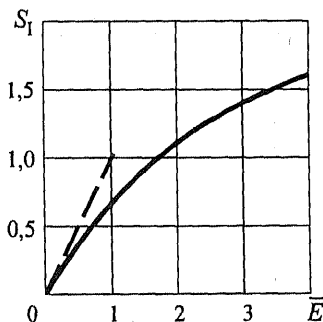


Рис. 3.2

Из (3.24) следует, что величина S_I пропорциональна отношению $\frac{\bar{E}}{\sigma}$, однако коэффициент пропорциональности $\gamma(\bar{E})$ не является величиной постоянной, а зависит от $\bar{E}$. Это означает, что отношение $\frac{\bar{E}}{\sigma}$ не может однозначно характеризовать величину S_I . Зависимость $\gamma(\bar{E})$ приведена в табл. 3.1.

Таблица 3.1

$\bar{E}$	0	1	2	3	4	5	6
$\ln(1 + \bar{E})$	0	0,69	1,1	1,39	1,6	1,8	1,95
$\gamma(\bar{E})$	1,0	0,69	0,55	0,46	0,4	0,36	0,32

Перейдем к рассмотрению второго этапа. С учетом (3.16) получим выражение для силы лобового сопротивления

$$Q_x = \frac{1}{2} \rho_0 S_m V^2 \Delta \left(C_{x0} + K_y C_y^2 \right). \quad (3.25)$$

Если ракета совершает полет с постоянной перегрузкой n_Σ , то величина C_y может быть выражена в виде

$$C_y = \frac{n_\Sigma G_k}{\frac{1}{2} S_m \rho_0 V^2 \Delta}. \quad (3.26)$$

Подставляя (3.26) в (3.25) и вводя обозначения

$$A = \frac{1}{2} C_{x0} S_m \rho_0; \quad B_0 = \frac{2K_y d^2}{\rho_0 S_m}, \quad (3.27)$$

получим силу лобового сопротивления в виде [9; 13]

$$Q_x = A V^2 \Delta + \frac{B_0 m_k^2 n_\Sigma^2}{V^2 \Delta}. \quad (3.28)$$

Для удобства дальнейшего анализа введем безразмерные переменные

$$u = \frac{V}{U_{sn}}; \quad U_{sn} = \sqrt[4]{\frac{B_0 m_k^2 n_\Sigma^2}{A \Delta^2}}; \quad (3.29)$$

$$\bar{Q}_x = \frac{K_{a \max}}{g m_k n_\Sigma} Q_x = \frac{1}{2} \left(u^2 + \frac{1}{u^2} \right). \quad (3.30)$$

Тогда выражение для дальности полета при измерении безразмерной скорости от значений u_m до u_n будет

$$S_{II} = \frac{K_{a \max} U_{sn}^2}{g n_\Sigma} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1 + u_m^4}{1 + u_n^4}. \quad (3.31)$$

Учитывая

$$u_m = u_n (1 + \bar{E}) = u_n z, \quad z = 1 + \bar{E}, \quad (3.32)$$

получаем

$$S_{II} = \frac{K_{a \max} U_{sn}^2}{g n_\Sigma} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1 + u_n^4 z^4}{1 + u_n^4}. \quad (3.33)$$

Для целей сравнения зависимостей S_{II} и S_I преобразуем с учетом (3.17) и (3.30))

$$\frac{K_{a \max} U_{sn}^2}{g n_\Sigma} = \frac{1}{2\kappa}. \quad (3.34)$$

Теперь

$$S_{II} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{4} \ln \frac{1 + u_n^4 z^4}{1 + u_n^4}. \quad (3.35)$$

Рассмотрим теперь случай, когда роль индуктивного сопротивления мала, что соответствует условию $u_n \gg 1$. Тогда (3.35) приводится к виду

$$S_{II} \approx \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{4} \ln z^4 = \frac{1}{\kappa} \ln z = S_I. \quad (3.36)$$

Как видим, в рассматриваемом случае дальности S_I и S_{II} совпадают, что и следовало ожидать. Формулы (3.33) и (3.35) являются эквивалентными и можно пользоваться любой из них.

На рис. 3.3, а и 3.3, б приведены зависимости $\bar{S}_{II} = \kappa S_{II}$ соответственно как функции $z = 1 + \bar{E}$ и u_H . Отметим, что при $u_H = \infty$, $\bar{S}_{II} = \bar{S}_I$

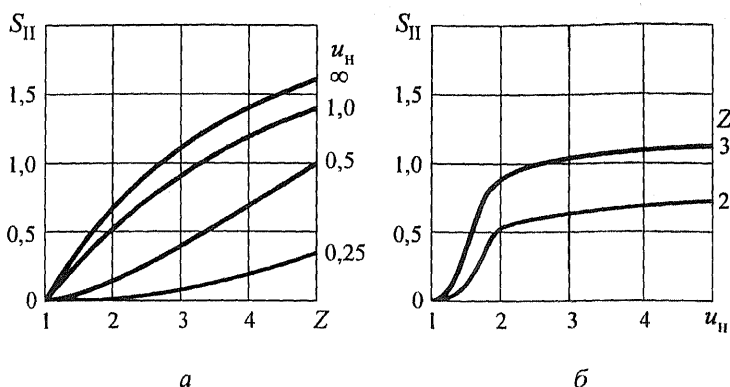


Рис. 3.3

Теперь рассмотрим зависимость дальности полета S_{II} от высоты и маневренной перегрузки.

На рис. 3.4, а приведена зависимость характеристической скорости U_{sn} от H и n_Σ . Как видим, при $n_\Sigma = 1$ (горизонтальный полет с углом атаки, обеспечивающим компенсацию веса) при изменении высоты полета от 0 до 30 км величина U_{sn} увеличивается в 8,2 раза, при $H = 15$ км и при изменении n_Σ от 1 до 3 величина U_{sn} увеличивается в 1,74 раза.

Покажем, что в предельных случаях $U_{sn} \rightarrow 0$ и $U_{sn} \rightarrow \infty$ дальность $\bar{S}_{II} \rightarrow 0$. В первом случае за счет $U_{sn} \rightarrow 0$, во втором — за счет того, что выражение, стоящее под знаком логарифма стремится к единице, т.е.

$$\lim_{U_{sn} \rightarrow 0} \bar{S}_{II} = \lim_{U_{sn} \rightarrow \infty} \bar{S}_{II} = 0. \quad (3.37)$$

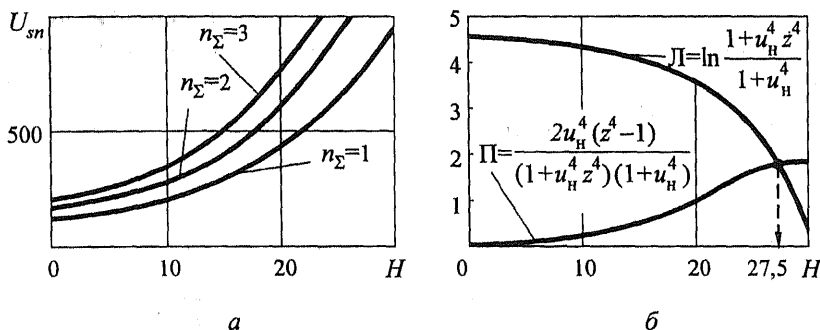


Рис. 3.4

Из (3.37) непосредственно следует, что при фиксированном n_{Σ} имеется значение U_{sn} , на которой обеспечивается максимальное значение величины $\bar{S}_{II}$. Этим рассматриваемый случай, связанный с учетом индуктивного сопротивления, принципиально отличается от случая, когда дальность полета определяется без учета этого сопротивления. Для определения оптимального значения S_{II} используем условие $\frac{\partial S_{II}}{\partial U_{sn}} = 0$. Имеем:

$$\left(\frac{U_{sn}^4 + V_H^4}{V_H^4} \right) \left(\frac{U_{sn}^4 + V_H^4 Z^4}{Z^4 - 1} \right) \ln \frac{U_{sn}^4 + V_H^4 Z^4}{U_{sn}^4 + V_H^4} = 2 U_{sn}^4.$$

Вводя здесь безразмерные скорости, получим

$$\ln \frac{1 + u_H^4 Z^4}{1 + u_H^4} = \frac{2 u_H^4 (Z^4 - 1)}{(1 + u_H^4 Z^4)(1 + u_H^4)}. \quad (3.38)$$

Трансцендентное уравнение (3.38) легко решается графически. На рис. 3.4, б приведен пример решения уравнения (3.38) для $\sigma = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{кг}$; $E = 85 \text{ с}$; $V_H = 425 \text{ м/с}$; $Z = 3$; $n_{\Sigma} = 1$. Оптимальная высота полета составляет 27,5 км. Отметим, что со-

ответствующее значение $S_{II} \approx 0,5 S_I$. Таким образом, учет индуктивного сопротивления, соответствующего $n_{\Sigma} = 1$ (горизонтальный полет с углом атаки, обеспечивающим компенсацию веса), приводит к двукратному уменьшению дальности полета. Зависимости дальности от высоты приведены на рис. 3.5. Там же приведены соответствующие зависимости для $n_{\Sigma} = 2$ и $n_{\Sigma} = 3$. Видим, что увеличение перегрузки с $n_{\Sigma} = 1$ до $n_{\Sigma} = 2$ также приводит к снижению дальности в два раза.

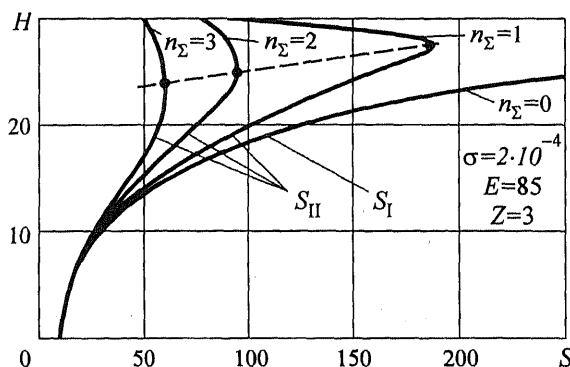


Рис. 3.5

Отметим, что при возрастании перегрузки оптимальная высота полета снижается.

На этом завершим рассмотрение одноступенчатой ракеты и перейдем к ракете двухступенчатой. Поскольку двухступенчатая ракета является частным случаем многоступенчатой, то для оценки предельного случая, когда число ступеней стремится к бесконечности, выведем весовые соотношения для случая многоступенчатой ракеты.

Обозначим [8] через n — общее число ступеней ракеты, через k — номер ступени, через $G_{\tau}^{(k)}$ и $G_{kd}^{(k)}$ — веса топлива и конструкции двигателя, через $G_0^{(k)}$ и $G_k^{(k)}$ — начальный и конечный веса k -й ступени (рис. 3.6, а).

Для каждой ступени будут соблюдаться очевидные равенства

$$G_0^{(k)} = G_\tau^{(k)} + G_k^{(k)}; \quad G_k^{(k)} = G_{kd}^{(k)} + G_0^{(k+1)}. \quad (3.39)$$

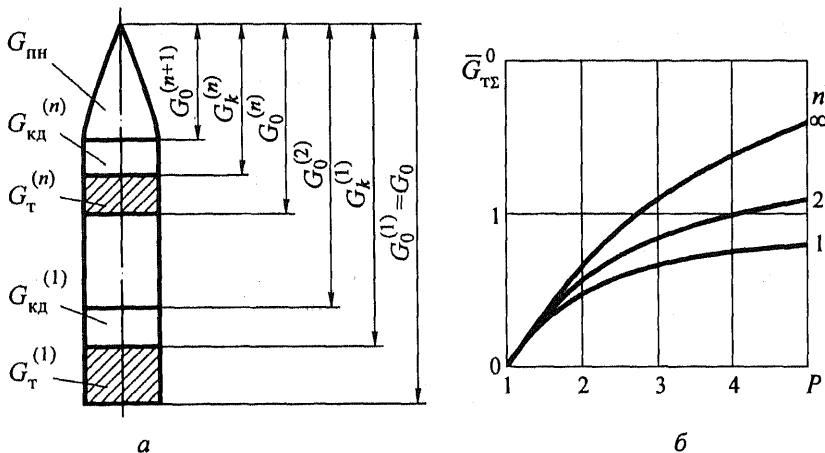


Рис. 3.6

Здесь индекс k может принимать любое значение от 1 до n . Пусть отношение полного веса ракеты к весу полезной нагрузки есть p и пусть это отношение равномерно распределяется между ступенями, т.е.

$$p^{(1)} = p^{(2)} = \dots = p^{(k)} = p. \quad (3.40)$$

Тогда

$$p = \sqrt[n]{P}. \quad (3.41)$$

На основании (3.10) и (3.41) получим

$$\bar{G}_\tau^{(k)} = \frac{1}{1 + (\alpha)^n} \left(1 - \frac{1}{p^{(k)}} \right) = \frac{1}{1 + \alpha^{(k)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{P}} \right). \quad (3.42)$$

Ограничимся рассмотрением частного случая $\bar{G}_\tau^{(k)} = \bar{G}_\tau$; $\alpha^{(k)} = \alpha$. Тогда относительный запас топлива каждой из ступеней для n -ступенчатой ракеты будет

$$\bar{G}_\tau = \frac{1}{1 + \alpha} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{P}} \right). \quad (3.43)$$

По известному $\bar{G}_\tau$ для каждой ступени находим $E^{(k)}$ и $\Delta V_m^{(k)}$. Суммарный относительный запас топлива

$$\bar{G}_{\tau\Sigma} = \sum_{k=1}^n \bar{G}_\tau^{(k)} = n \bar{G}_\tau = \frac{n}{1 + \alpha} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{P}} \right). \quad (3.44)$$

Аналогичным образом определяются суммарная энерговооруженность и суммарный прирост скорости

$$E_\Sigma = \sum_{k=1}^n E^{(k)} = nE; \quad (3.45)$$

$$\Delta V_{m\Sigma} = \sum_{k=1}^n \Delta V_m^{(k)} = n \Delta V_m.$$

Из (3.44) и (3.45) при $n = 2$ получим соответствующие формулы для двухступенчатой ракеты.

Исследуем зависимость $\bar{G}_{\tau\Sigma}(P)$ для различных n . На рис. 3.6, б приведена зависимость $\bar{G}_{\tau\Sigma}^0(P, n)$, соответствующая $\alpha = 0$ для $n = 1, 2, \infty$. Как видим, с увеличением n суммарный относительный запас топлива увеличивается. Сравнивая случаи $n = 2$ и $n = 1$, видим, что при $P = 3$ величина $\bar{G}_{\tau\Sigma}^0$ увеличивается на 30%. Отметим, что расчеты по формуле (3.44) при больших n связаны с значительными трудностями, так как при $n = \infty$ имеет место неопределенность вида $\infty \cdot 0$. С целью упрощения расчетов при больших n преобразуем (3.44) с помощью преобразования $Z = P^{\frac{1}{n}}$, $n = \frac{\ln P}{\ln Z}$. Имеем

$$\bar{G}_{\tau\Sigma}^0 = \frac{\ln P}{Z} \frac{Z - 1}{\ln Z}. \quad (3.46)$$

Раскрывая неопределенность, получаем

$$\lim_{Z \rightarrow 1} \bar{G}_{\tau\Sigma}^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{G}_{\tau\Sigma}^0 = \ln P. \quad (3.47)$$

Отметим, что из рис. 3.6, б следует, что при $n > 1$ величина $\bar{G}_{\tau\Sigma}^0$ может быть больше единицы (например, при $n = 2$ и $P \geq 4$). Но не есть ли это «победа науки над здравым смыслом?» Покажем, что указанное противоречие является кажущимся. Во-первых, зависимость $\bar{G}_{\tau\Sigma}^0$ при $\alpha \neq 0$ должна быть пересчитана на конкретное значение α , для чего ординаты кривой $\bar{G}_{\tau\Sigma}^0(P)$ необходимо уменьшить в отношении $\frac{1}{1+\alpha}$. Однако и с учетом этого неравенство $\bar{G}_{\tau\Sigma} \geq 1$ может иметь место. Например, при $P \geq \left(\frac{2}{1-\alpha}\right)^n$. Во-вторых, и это более важно, понятие относительного запаса топлива для многоступенчатой ракеты нуждается в уточнении. Например, для $n = 2$ имеются следующие два возможных способа определения величины относительного запаса топлива:

$$\left[\bar{G}_{\tau\Sigma} \right]_1 = \bar{G}_{\tau 1} + \bar{G}_{\tau 2} = \frac{G_{\tau}^{(1)}}{G_0^{(1)}} + \frac{G_{\tau}^{(2)}}{G_0^{(2)}} = \frac{G_{\tau}^{(1)} + G_{\tau}^{(2)} \cdot P}{G_0^{(1)}}; \quad (3.48)$$

$$\left[\bar{G}_{\tau\Sigma} \right]_2 = \frac{G_{\tau 1} + G_{\tau 2}}{G_0}. \quad (3.49)$$

Для рассмотренного примера $n = 2$ получим $\left[G_{\tau\Sigma} \right]_1 = 1,5 \left[G_{\tau\Sigma} \right]_2$. Отметим, что указанное различие величин $\left[\bar{G}_{\tau\Sigma} \right]_1$ и $\left[\bar{G}_{\tau\Sigma} \right]_2$, физически связано с основным свойством многоступенчатой ракеты (последующие импульсы тяги прикладываются к уменьшенной массе) и объясняет рассматриваемое противоречие. Мы будем использовать величину $\left[\bar{G}_{\tau\Sigma} \right]_1$, приведенную на рис. 3.6, б, поскольку именно она определяет располагаемую скорость ракеты.

Теперь перейдем к систематическому анализу двухступенчатой ракеты.

1. *Весовой расчет.* По заданному требованиям ТЗ весу ракеты G_0 и определяемому на этапе формирования облика ракеты весу полезной нагрузки $G_{\text{пн}}$ на основании (3.40), (3.41), (3.43) и рис. 3.6, а определяются

$$P = \frac{G_0}{G_0^{(2)}} = \frac{G_0^{(2)}}{G_{\text{пн}}} = \sqrt{P}; \quad P = \frac{G_0}{G_{\text{пн}}};$$

$$\bar{G}_\tau = \frac{1}{1 + \alpha} \left(1 - \frac{1}{P} \right);$$

$$\bar{G}_k^{(2)} = 1 - \bar{G}_\tau;$$

$$G_\tau^{(1)} = \bar{G}_\tau G_0; \quad (3.50)$$

$$G_\tau^{(2)} = \bar{G}_\tau G_0^{(2)};$$

$$G_k^{(2)} = 1 - \left(1 + \alpha + \frac{1}{P} \right) \bar{G}_\tau;$$

$$\Delta G_{\text{сбп}}^{(1)} = \alpha G_\tau^{(1)}.$$

На рис. 3.7, а приведена зависимость $\frac{G_0}{G_0^{(2)}} = f(P)$. Как видим, при $P = 4$ это отношение равно двум, т.е. ракета делится на две равные части. При уменьшении P относительный вес головной субракеты увеличивается. На рис. 3.7, б приведен пример зависимости изменения относительного веса $\bar{G} = \frac{G}{G_0}$ как функции времени полета, рассчитанный для $P = 4$ и $\alpha = 0,5$.

Как следует из (3.50), отношение пассивных весов ракеты на первом и втором участках полета составляет

$$\frac{G_k^{(1)}}{G_k^{(2)}} = \frac{1 - \bar{G}_\tau}{1 - \left(1 + \alpha + \frac{1}{P} \right) \bar{G}_\tau}. \quad (3.51)$$

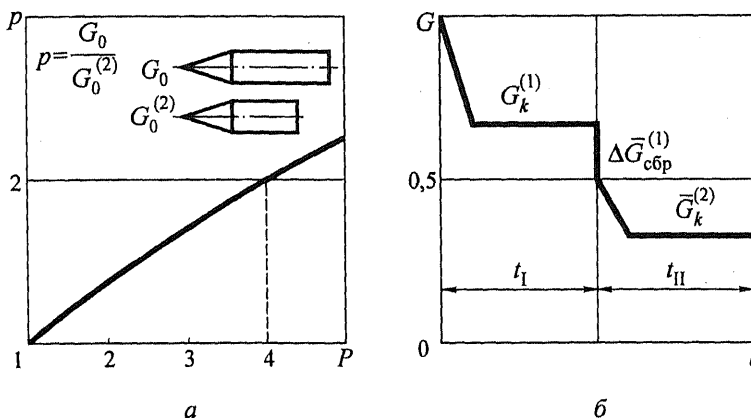


Рис. 3.7

2. *Скорость полета.* На основании (3.7) и (3.8) имеем приращение скорости полета, одинаковое для обеих ступеней:

$$\Delta V_m = g J_1 \bar{G}_T = g E. \quad (3.52)$$

Пример зависимости $\bar{V}(t) = \frac{1}{V_m} V(t)$ для случая $\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)}$, $\frac{V_n}{V_m} = \frac{V_k}{V_m} = 0,5$ приведен на рис. 3.8, а. Отметим, что зависимости $V(t)$ на первом и втором участках полета идентичны.

3. *Дальность полета.* Полная дальность полета двухступенчатой ракеты определяется как сумма дальностей, набираемых на каждом из двух участков полета. В силу условия $\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)}$ и идентичности зависимостей $V(t)$ на этих участках, набираемые дальности будут одинаковы, т.е.

$$S_\Sigma = S^{(1)} + S^{(2)} = 2S. \quad (3.53)$$

Пример зависимости дальности полета $\bar{S} = kS$ от времени приведен на рис. 3.8, б.

Рассмотрим теперь, как может быть обеспечено равенство баллистических коэффициентов по участкам полета. Как следу-

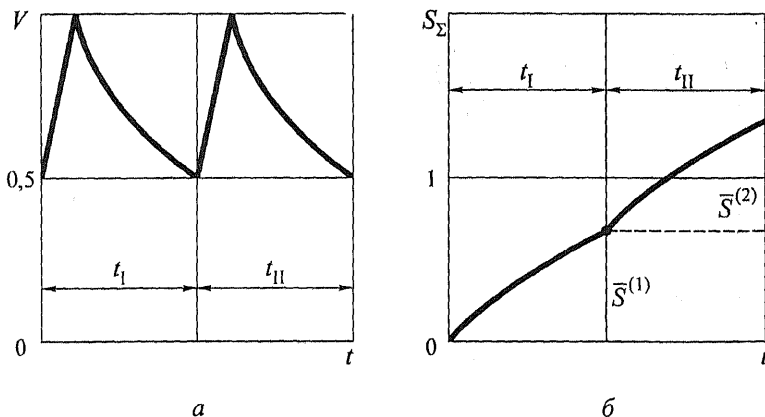


Рис. 3.8

ет из (3.13), для обеспечения этого необходимо выдержать постоянство отношений

$$\frac{S_{\text{м}}^{(1)}}{G_k^{(1)}} = \frac{S_{\text{м}}^{(2)}}{G_k^{(2)}}. \quad (3.54)$$

Это означает, что корпус ракеты должен быть бикалиберным! Отношение калибров ступеней с учетом (3.51)

$$\frac{D^{(1)}}{D^{(2)}} = \sqrt{\frac{G_k^{(1)}}{G_k^{(2)}}} = \sqrt{\frac{1 - \bar{G}_{\text{т}}}{1 - \left(1 + \alpha + \frac{1}{P}\right) \bar{G}_{\text{т}}}}. \quad (3.55)$$

Отсюда для рассматриваемого случая $P = 4$; $\alpha = 0,5$ получим $D^{(1)} = 1,41D^{(2)}$. Для случая, когда такое конструктивное решение невозможно или затруднено, вместо условия равенства баллистических коэффициентов можно воспользоваться условием равенства приведенных баллистических коэффициентов, т.е. необходимо выдерживать равенство следующих отношений:

$$\frac{S_{\text{м}}^{(1)}}{G_k^{(1)}} \Delta^{(1)} = \frac{S_{\text{м}}^{(2)}}{G_k^{(2)}} \Delta^{(2)}. \quad (3.56)$$

Отсюда с учетом равенства $S_M^{(1)} = S_M^{(2)}$ (мидели ступеней) получим

$$\frac{\Delta^{(1)}}{G_k^{(1)}} = \frac{\Delta^{(2)}}{G_k^{(2)}}. \quad (3.57)$$

На основании уравнения (3.57)

$$\frac{\Delta^{(2)}}{\Delta^{(1)}} = \frac{G_k^{(2)}}{G_k^{(1)}} = \frac{1 - \left(1 + \alpha + \frac{1}{P}\right) \bar{G}_T}{1 - \bar{G}_T}. \quad (3.58)$$

Отсюда для рассматриваемого случая $P = 4$, $\alpha = 0,5$ получим $\Delta^{(2)} = 0,5\Delta^{(1)}$, т.е. высота полета на втором участке примерно на 5 км выше ее значения на первом участке полета.

Таким образом, траектория полета двухступенчатой ракеты состоит из двух участков горизонтального полета, причем высота второго участка на 5 км выше, чем первого.

При выполнении условий (3.55) — для бикалиберной ракеты — или (3.58) — для монокалиберной ракеты — обеспечивается одинаковость вкладов дальностей, набираемых на каждом из участков полета в полную дальность. Отметим, что введенное для случая монокалиберной двухступенчатой ракеты правило может быть распространено на случай n -ступенчатой ракеты. В этом случае траектория ракеты представляет собой восходящую n -ступенчатую лестницу.

Теперь перейдем непосредственно к определению дальности, набираемой на каждом из участков полета. Будем определять дальность с учетом индуктивного сопротивления при $n_\Sigma = 1$ (горизонтальный полет с углом атаки, обеспечивающим компенсацию веса). Как показано выше (рис. 3.5), дальность полета зависит от высоты и ее максимальное значение соответствует оптимальной высоте $H_{\text{opt}} = 27,5$ км. В связи с этим сравнения дальностей двухступенчатой $S_{II}^{(2)}$ и одноступенчатой $S_{II}^{(1)}$ ракет проведем для двух высот $H = 0$ и $H = H_{\text{opt}}$:

1) $H = 0$. Как указывалось выше, в этом случае $S_{II} \approx S_I$. Отношение дальностей на основании (3.20) и (3.53)

$$\beta_I = \frac{S_{II}^{(2)}}{S_{II}^{(1)}} = \frac{S_I^{(2)}}{S_I^{(1)}} = \frac{2 \ln \frac{V_m^{(2)}}{V_H}}{\ln \frac{V_m^{(1)}}{V_H}}. \quad (3.59)$$

Отсюда для $V_H = 425$ м/с; $\Delta V_m^{(1)} = 1250$ м/с; $\Delta V_m^{(2)} = 825$ м/с получим $\beta_I = 1,22$;

2) $H = H_{opt}$. Отношение дальностей на основании (3.35) и (3.53)

$$\beta_{II} = \frac{S_{II}^{(2)}}{S_{II}^{(1)}} = \frac{2 \ln \frac{1 + u_H^4 z_2^4}{1 + u_H^4}}{\ln \frac{1 + u_H^4 z_1^4}{1 + u_H^4}}. \quad (3.60)$$

Отсюда для $u_H = 0,545$; $z_2 = 2,94$; $z_1 = 3,9$ получим $\beta_{II} = 1,34$.

§ 3.2. БАЛЛИСТИКА РАКЕТЫ НА НАВЕСНЫХ ТРАЕКТОРИЯХ

В современных ракетах широко используются энергетически выгодные (навесные) траектории. Основная идея использования таких траекторий состоит в том, чтобы полет ракеты проходил в слоях меньшей плотности, что существенно улучшает баллистику ракеты. Выведем уравнения, описывающие движение центра масс ракеты на пассивном участке полета в плоском случае:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{X}{m_k} - g \sin \Theta; \quad \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{g}{V} \cos \Theta; \quad (3.61)$$

$$\frac{dy}{dt} = V \sin \Theta, \quad \frac{dx}{dt} = V \cos \Theta.$$

Здесь первые два уравнения написаны в скоростной СК, т.е. в проекции на касательную и нормаль к траектории. Для дальнейшего рассуждения удобно записать систему (3.61) в абсолютной прямоугольной СК, связанной с точкой пуска. Непос-

редственно из рис. 3.9, а следует для произвольной точки А траектории [15]:

$$\begin{aligned} u &= V \cos \Theta; & W &= V \sin \Theta; \\ p &= \frac{W}{V} = \operatorname{tg} \Theta; & V &= u \sqrt{1 + p^2}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

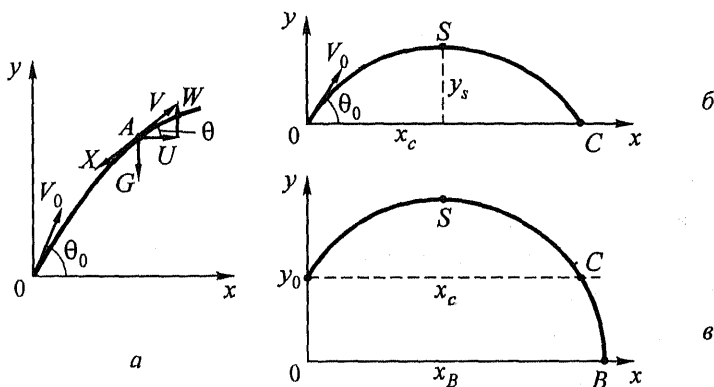


Рис. 3.9

Система (3.61) с учетом (3.62) и обозначения $e = \frac{X}{mV}$ приводится к виду

$$\dot{u} = -eu; \quad \dot{p} = -\frac{g}{u}; \quad \dot{y} = up; \quad \dot{x} = u. \quad (3.63)$$

Наряду с системой (3.63) используется система с независимым переменным x :

$$\frac{du}{dx} = -e; \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{g}{u^2}; \quad \frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u}. \quad (3.64)$$

Отметим, что система (3.64) есть основная система уравнений внешней баллистики для расчета характеристик движения ракет класса «земля — земля» и артиллерийских снарядов [15]. Рассмотрим характеристики траектории ракеты в безвоздушном пространстве. Из (3.63) при $e = 0$ получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g. \quad (3.65)$$

Решение системы (3.65) определяется начальными характеристиками полета V_0 и Θ_0 . Последовательно интегрируя (3.65), получаем

$$\dot{x} = c_1; \quad x = c_3 + c_1 t;$$

$$\dot{y} = c_2 - gt; \quad y = c_4 + c_2 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Из выражения $\dot{x} = V \cos \Theta = C_1$ следует, что горизонтальная проекция скорости остается постоянной.

Рассмотрим начальные условия при $t = 0$; $y_0 = y(0) = 0$, $x_0 = x(0) = 0$. Значения постоянных интегрирования, соответствующих этим начальным условиям:

$$c_3 = c_4 = 0; \quad c_1 = \dot{x}_0 = V_0 \cos \Theta_0; \quad c_2 = \dot{y}_0 = V_0 \sin \Theta_0.$$

Подставляя значения констант в выражении для x и y получим уравнение траектории в параметрической форме

$$x = V_0 \cos \Theta_0 t; \quad y = V_0 \sin \Theta_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Определяя параметр t из уравнения для x и подставляя его в уравнение для y , получаем

$$y = x \operatorname{tg} \Theta_0 - \frac{gx^2}{2 V_0^2 \cos^2 \Theta_0}. \quad (3.66)$$

Поскольку дискриминант этого уравнения равен нулю, то кривая, описываемая этим уравнением, является параболой. Исходя из этого рассматриваемый метод иногда называют *параболической теорией движения ракет*.

Рассмотрим характерные точки траектории. Пусть S — вершина траектории, C — точка падения (см. рис. 3.9, б). На основании (3.66) получим выражения для полной дальности полета и максимальной высоты траектории. Имеем

$$x_c = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\Theta_0; \quad y_s = \frac{V_0^2}{2g} \sin^2 \Theta_0. \quad (3.67)$$

Из (3.67) может быть получена следующая связь между величинами x_c и y_s :

$$x_c = \frac{4}{\operatorname{tg} \Theta_0} y_s. \quad (3.68)$$

Запишем траекторию (3.66) в безразмерной форме. Введя

$$\bar{x} = \frac{x}{x_c}; \quad \bar{y} = \frac{y}{y_s}; \quad 0 \leq \bar{x}, \bar{y} \leq 1, 0, \quad (3.69)$$

получим

$$\bar{y} = 4\bar{x} - 4\bar{x}^2. \quad (3.70)$$

Используя (3.70), определяем среднюю высоту траектории. Имеем

$$\bar{y}_{cp} = \int_0^1 \bar{y} d\bar{x} = 4 \int_0^1 (\bar{x} - \bar{x}^2) d\bar{x} = \frac{2}{3}. \quad (3.71)$$

Таким образом, средняя высота параболической траектории равна $\frac{2}{3}$ от максимальной.

Рассмотрим теперь начальные условия: $t = 0$; $x(0) = 0$; $y(0) = y_0$ — высота пуска. Этим начальным условиям соответствует уравнение траектории в безразмерной форме

$$\bar{y} = \bar{y}_0 + 4\bar{x} - 4\bar{x}^2. \quad (3.72)$$

Как видим, при $y_0 = 0$ выражение (3.72) переходит в (3.70). Для точки В, где $y = 0$ (см. рис. 3.9, в), имеем

$$\bar{x}^2 - \bar{x} - \frac{1}{4} \bar{y}_0 = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\bar{x}_B = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \bar{y}_0} \right). \quad (3.73)$$

Отсюда при $\bar{y}_0 = 0$ имеем $\bar{x}_B = 1$. При $\bar{y}_0 > 0$ имеем $\bar{x}_B > 1$.

Используем основные соотношения между элементами параболической траектории для оценки увеличения дальности при полете по навесной траектории по сравнению со случаем горизонтальной траектории. Для расчета дальности при полете по горизонтальной траектории воспользуемся зависимостью (3.19). Имеем в новых обозначениях

$$x_c^{\text{гт}} = S_I = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{V_m}{V_k} \right). \quad (3.74)$$

Здесь V_m — максимальная скорость в момент окончания работы двигателя; V_k — конечная скорость.

При заданных характеристиках ракеты и заданном отношении $\frac{V_m}{V_k}$ дальность полета однозначно определяется значением высоты полета, которую примем средним значением.

В соответствии с (3.71) средняя высота при полете по навесной траектории.

$$H_{\text{ср}} = y_0 + y_{\text{ср}}; \quad y_{\text{ср}} = \frac{2}{3} y_s. \quad (3.75)$$

Оценим координату конечной точки навесной траектории $x_c^{\text{н.т}}$ и сравним ее с (3.74). Имеем:

$$Z = \frac{x_c^{\text{н.т}}}{x^{\text{гт}}} = \frac{\Delta(y_0)}{\Delta(y_0 + y_{\text{ср}})}. \quad (3.76)$$

Принимая атмосферу экспоненциальной, т.е. полагая $\Delta = e^{-\gamma H}$, получаем

$$\Delta(y_0 + y_{\text{ср}}) = e^{-\gamma(y_0 + y_{\text{ср}})} = e^{-\gamma y_0} \cdot e^{-\gamma y_{\text{ср}}} = \Delta(y_0) \cdot \Delta(y_{\text{ср}}).$$

Подставив это выражение в (3.76), найдем с учетом (3.71)

$$z = 1/\Delta(y_{cp}). \quad (3.77)$$

Сделаем оценку величины z . Пусть $y_s = 7,5$ км, $y_{cp} = 5,0$ км, тогда $z = 2$. Таким образом, использование навесной траектории с максимальным превышением над высотой пуска, равным 7,5 км, приводит к увеличению координаты x_c в два раза. Используя полученную оценку, преобразуем (3.77) к виду

$$z = 1 + \frac{2}{3} \bar{y}_s; \quad \bar{y}_s = \frac{y_s}{5}. \quad (3.78)$$

Отсюда имеем $z = 1$ при $y_s = 0$, $z = 2$ при $y_s = 7,5$ км.

В заключение рассмотрим методику построения траектории в безразмерных координатах. Из (3.70) получим

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \bar{y}} \right). \quad (3.79)$$

Отсюда для характерных точек получим

$$1) \bar{y} = 0; \quad \bar{x}_1 = 1; \quad \bar{x}_2 = 0;$$

$$2) \bar{y} = 1; \quad \bar{x}_{1,2} = 0,5.$$

Формула (3.73) позволяет существенно упростить методику построения траектории. Для этой же цели может быть использована приближенная методика, основанная на аппроксимации параболы дугой окружности. Пусть a — хорда сегмента этой окружности, h — ее стрелка, Θ_0 — центральный угол. Рассмотрим

отношение $\gamma = \frac{x_c}{y_s}$. Из (3.68) имеем

$$\gamma_1 = \frac{4}{\operatorname{tg} \Theta_0}. \quad (3.80)$$

При аппроксимации параболы окружностью отношение длины хорды к стрелке есть

$$\gamma_2 = \frac{a}{h} = \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{\Theta_0}{2}}. \quad (3.81)$$

Сравнивая (3.80) и (3.81), получаем

$$\bar{\gamma} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\Theta_0}{2}. \quad (3.82)$$

Отсюда имеем $\bar{\gamma} = 1$ при $\Theta_0 = 0$, $\bar{\gamma} = 0,95$ при $\Theta_0 \leq 25^\circ$, т.е. погрешность не превышает $\sim 5\%$.

Отметим, что из условия $\bar{\gamma} < 1$ следует, что приближенные траектории являются «приплюснутыми». Этот же эффект имеет место для траекторий, построенных с учетом сопротивления воздуха $e \neq 0$, что позволяет рекомендовать развитую приближенную методику для оценочных расчетов.

§ 3.3. БАЛЛИСТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

Под баллистическим проектированием будем понимать этап проектирования облика ракеты, на котором при известных весовых параметрах и аэродинамических характеристиках ракеты производится определение режима работы двигательной установки. Эта задача тесно связана с задачей исследования оптимальных режимов полета ракеты и требует, вообще говоря, применения методов вариационного исчисления [14].

Однако в упрощенной постановке задача может быть решена и без применения этих методов. Поскольку параметры оптимальных режимов полета тесно связаны со свойствами силы лобового сопротивления, начнем с ее рассмотрения.

При полете в горизонтальной плоскости с постоянной поперечной перегрузкой маневра сила лобового сопротивления в соответствии с (3.28) может быть представлена в виде [9]:

$$Q_x = AV^2 \Delta + \frac{B_0 m_k^2 n_1^2}{V^2 \Delta}; \quad (3.83)$$

$$A = \frac{1}{2} C_{x0} S_m \rho_0; \quad B_0 = \frac{2K_y g^2}{\rho_0 S_m}.$$

Из (3.83) следует, что относительная плотность Δ и скорость полета V по-разному влияют на составляющие Q_x . Так, при увеличении V первое слагаемое увеличивается, второе —

уменьшается. Аналогично увеличение H , связанное с уменьшением Δ , приводит к уменьшению первого слагаемого и увеличению второго. Вместе такое изменение составляющих означает, что имеется экстремум Q_x по переменным V и H . Рассмотрим зависимость Q_x от V . Переходя к безразмерной скорости [9]

$u = \frac{V}{U_s}$, где $U_s = \sqrt[4]{\frac{B_0 m_k^2}{A \Delta}}$, получим

$$\bar{Q}_x = \frac{1}{2} \left(u^2 + \frac{n^2}{u^2} \right). \quad (3.84)$$

Зависимость безразмерного сопротивления от безразмерной скорости для различных значений перегрузки приведена на рис. 3.10, а. Как видим, для любого $n \neq 0$ величина $\bar{Q}_x$ с ростом u сначала уменьшается, а затем, достигнув минимума, начинает возрастать. Такое поведение функции $\bar{Q}_x(u)$ объясняется тем, что лобовое сопротивление при нулевой подъемной силе возрастает со скоростью, а индуктивное убывает.

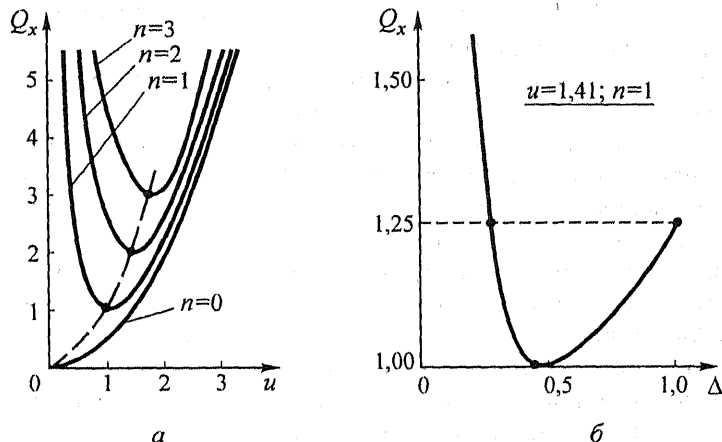


Рис. 3.10

Дифференцируя (3.84) по u и приравнявая производную нулю, получаем

$$\hat{u} = \sqrt{n}.$$

Подставляя это значение $\hat{u}$ в (3.84), получаем выражение для минимального значения безразмерного сопротивления

$$\bar{Q}_{x \min} = n. \quad (3.85)$$

Рассмотрим еще на основе (3.83) экстремум по переменной Δ . Можно показать, что в этом случае вместо (3.84) необходимо пользоваться зависимостью

$$\bar{Q}_x' = \frac{1}{2} \left(u^2 \Delta + \frac{n^2}{u^2 \Delta} \right).$$

Дифференцируя это выражение по Δ , получаем

$$\hat{\Delta} = \frac{n}{u^2}.$$

Зависимость $\bar{Q}_x'$ для $u = 1,41$ и $n = 1$ приведена на рис. 3.10, б. Здесь $\hat{\Delta} = 0,5$; $\hat{H} \approx 0,5$ км; $\bar{Q}'_{x \min} = 1$.

Опираясь на свойства функции $\bar{Q}_x(u)$ рассмотрим ряд оптимальных задач (ограничимся значением $n = 1$).

Сформулируем рассматриваемую задачу. Пусть мы располагаем некоторым запасом топлива, который можем использовать на разгон ракеты (стартовая ступень) и поддержание ее скорости постоянной (маршевая ступень). Очевидно, что рассматриваемая задача совпадает с задачей распределения заданного запаса топлива между ступенями. Из каких соображений должно производиться это распределение? Очевидно, что чем больше топлива будет израсходовано на старт, тем больше будет маршевая скорость, но тем меньше будет время, в течение которого эта скорость может поддерживаться постоянной. Начнем с определения оптимальных значений этой скорости (стартовый и пассивный участки рассмотрим позднее).

Очевидно, что оптимальное значение маршевой скорости зависит от критерия задач, в качестве которого могут выступать: время полета t_k , дальность полета S_n , дальность пуска на встречных $D_0^{(+)}$ и догонных $D_0^{(-)}$ курсах, угол разворота Θ_k . Оказывается, что каждому из критериев соответствует свое зна-

чение оптимальной скорости. Покажем это. Поскольку движение на маршевом участке происходит с постоянной скоростью, рассматриваемые критерии определяются алгебраическими соотношениями.

1. *Время полета.* Пусть располагаемый запас топлива соответствует суммарному импульсу тяги J_Σ . Тогда условие постоянства скорости имеет вид $R = Q_x$, а время работы маршевой ступени

$$t_k = \frac{J_\Sigma}{Q_x}. \quad (3.86)$$

Из (3.86) следует, что располагаемое время обратно пропорционально значению

$$t_k = \frac{1}{Q_x(u)}. \quad (3.87)$$

Пусть нам требуется максимизировать время t_k . Тогда

$$\max t_k \sim \max \left(\frac{1}{\bar{Q}_x(u)} \right) \sim \frac{1}{\min \bar{Q}_x(u)}.$$

Таким образом, оптимальное значение безразмерной скорости $\hat{u}_1$ соответствует минимуму $\bar{Q}_x$. Как следует из рис. 3.10, а,

$$\hat{u}_1 = 1. \quad (3.88)$$

2. *Дальность полета.* Учитывая, что при движении с постоянной скоростью $\bar{S} = u\tau$ (все переменные безразмерные), получим условие максимизации величины $\bar{S}$ в виде

$$\max \bar{S} \sim \max \left[\frac{u}{\bar{Q}_x(u)} \right] \sim \min \left[\frac{\bar{Q}_x}{u} \right]. \quad (3.89)$$

Геометрический смысл отношения $\frac{\bar{Q}_x}{u}$ — угол наклона прямой, проведенной из начала координат в произвольную точку кривой $\bar{Q}_x$. Очевидно, что минимальный угол соответствует слу-

чаю, когда эта прямая касательна к кривой $\bar{Q}_x(u)$ (рис. 3.11, а).
Имеем

$$\hat{u}_2 = \sqrt[4]{3} = 1,32. \quad (3.90)$$

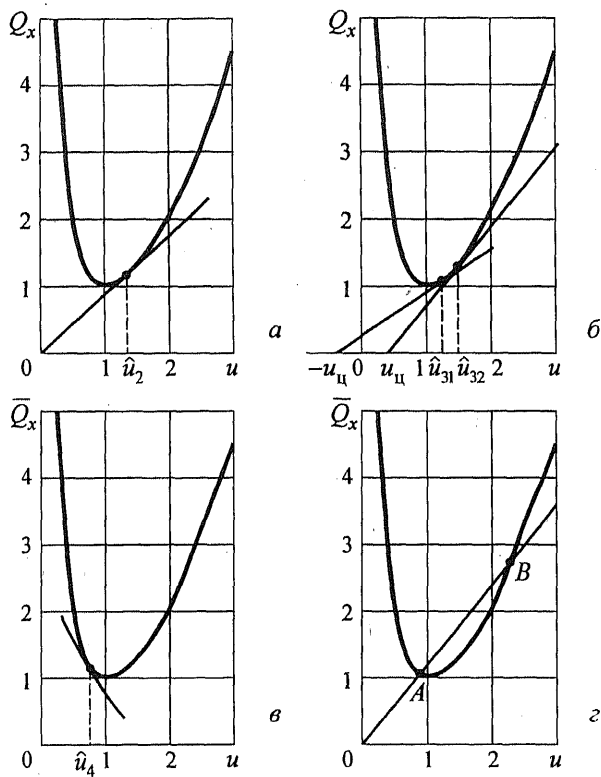


Рис. 3.11

3. *Дальность пуска.* Имеем $\bar{D}_0 = (u \pm u_{\Pi}) t_k$, здесь знак плюс соответствует встречным курсам, минус — догонным. Очевидно:

$$\max \bar{D}_0 \sim \max \frac{u \pm u_{\Pi}}{\bar{Q}_x} \sim \min \frac{\bar{Q}_x}{u \pm u_{\Pi}}. \quad (3.91)$$

Геометрический смысл следует из рис. 3.11, б. Отложим вдоль оси абсцисс от начала координат отрезок $\pm u_{ц}$ и проведем касательные к кривой $\bar{Q}_x(u)$ из концов этих отрезков.

Абсциссы точек касания есть $\hat{u}_3$. Имеем

$$\hat{u}_3 = \sqrt[4]{\frac{3 \pm 2\kappa}{1 \pm \kappa}}; \quad \kappa = \frac{u_{ц}}{u}. \quad (3.92)$$

Оценим значения $\hat{u}_3$. Пусть $\kappa = 0,4$, тогда $\hat{u}_{31} = 1,29$, $\hat{u}_{32} = 1,39$.

4. *Угол разворота*. Имеем $\Theta = \Theta_k$ (все переменные безразмерные). Величина $\Theta \propto \frac{1}{u}$ (для $n_1 = 1$), тогда

$$\max \Theta \propto \max_u \frac{1}{\bar{Q}_x} \sim \min u \bar{Q}_x. \quad (3.93)$$

Геометрическая интерпретация (3.93) приведена на рис. 3.11, в). Так как условие $u \bar{Q}_x = c$ определяет гиперболу в координатах $u, \bar{Q}_x$, то значение $\hat{u}_4$ есть абсцисса точки касания гиперболы с кривой $\bar{Q}_x(u)$. Имеем

$$\hat{u}_4 = \sqrt[4]{\frac{1}{3}} = 0,76. \quad (3.94)$$

На этом закончим рассмотрение оптимальных режимов при $n_1 = 1$. Для общего случая $n_1 \neq 1$ вместо (3.89), (3.90), (3.92) и (3.94) получим

$$\hat{u}_1 = \sqrt[4]{n_1^2}; \quad \hat{u}_2 = \sqrt[4]{3n_1^2}; \quad \hat{u}_3 = \sqrt[4]{\frac{3 \pm 2\kappa}{1 \pm \kappa} n_1^2}; \quad \hat{u}_4 = \sqrt[4]{\frac{n_1^2}{3}}. \quad (3.95)$$

5. *Угол разворота при заданной дальности полета*. В отличие от случаев 1 — 4, соответствующих задачам на безусловный экстремум, в рассматриваемом случае имеем задачу на условный экстремум с ограничением — равенством. Основной особенностью таких задач является свойство взаимности, означающее, что при перемене местами критерия и ограничения, оптимальный режим не меняется.

Например, задача о максимуме угла разворота при заданной дальности (Θ — критерий, S_1 — ограничение) и задача о максимуме дальности полета при развороте на заданный угол (S — критерий, Θ_1 — ограничение) — взаимны, т.е. их решением является одно и то же значение $\hat{u}$.

Пусть величина $S_1 = \frac{u}{\bar{Q}_x}$ задана. Прямая, проведенная из начала координат под углом $\bar{S}_1$, пересекает кривую $\bar{Q}_x(u)$ в точках A и B (рис. 3.11, g). Рассмотрим, в какой из этих точек, соответствующих одной и той же дальности полета, угол разворота оказывается большим. Имеем

$$\bar{\Theta} = \frac{n_1}{u \bar{Q}_x} = \left[n_1 \frac{u}{\bar{Q}_x} \right] \frac{1}{u^2}. \quad (3.96)$$

Поскольку величина, стоящая в квадратных скобках фиксирована, большее значение Θ обеспечивается при меньшем u , т.е. решением является точка A (см. рис. 3.11, g).

6. Угол разворота и дальность полета как компоненты векторного критерия. В рассматриваемом случае эффективность решения оценивается одновременно двумя показателями $\bar{S}$ и $\bar{\Theta}$. Первый из них характеризует свойство дальнодействия, второй — поворотливости. На основании (3.84) имеем

$$\bar{S} = \frac{u^3}{u^4 + n_1^2}; \quad \bar{\Theta} = \frac{u n_1}{u^4 + n_1^2}. \quad (3.97)$$

Для дальнейшего удобно провести нормализацию критериев (3.97). Введем

$$W_1 = \frac{\bar{S}}{\bar{S}_{\max}} = K_1 \frac{u^3}{u^4 + n_1^2}; \quad W_2 = \frac{\bar{\Theta}}{\bar{\Theta}_{\max}} = \frac{K_2 u}{u^4 + n_1^2}$$

$$K_1 = \frac{1}{u_1^3} (u_1^4 + n_1^2); \quad K_2 = \frac{1}{u_2} (u_2^4 + n_1^2); \quad (3.98)$$

$$u_1 = \sqrt[4]{3n_1^2}; \quad u_2 = \sqrt[4]{\frac{n_1^2}{3}}.$$

Легко убедиться, что нормализованные критерии удовлетворяют условию $0 \leq W_{1,2} \leq 1$.

Для случая $n_1 = \sqrt{2}$ из (3.98) получим

$$W_1 = 2,1 \frac{u^3}{u^4 + 2}; \quad W_2 = 2,97 \frac{u}{u^4 + 2}; \quad \frac{W_2}{W_1} = \frac{1,41}{u^2}. \quad (3.99)$$

Эти выражения представляют собой параметрическую форму кривой $W_2 = f(W_1)$. Далее нам потребуется выражение для угла наклона касательной к этой кривой

$$\frac{dW_2}{dW_1} = 1,41 \frac{2 - 3u^4}{6u^2 - u^6}. \quad (3.100)$$

Из (3.100) следует: 1) при $u = u_2$ и $u = \infty$ производная $\frac{dW_2}{dW_1}$ равна нулю, т.е. касательная к кривой горизонтальна; 2) при $u = u_1$ и $u = 0$ касательная вертикальна.

Зависимость $W_2 = f(W_1)$ представляет собой замкнутую петлю (рис. 3.12, а). Безразмерная скорость увеличивается при движении вдоль кривой по часовой стрелке, достигая значения $u = \hat{u}_4$ в точке А и значения $u = \hat{u}_5$ в точке В. Дуга АВ есть область компромиссов (область Парето), где возрастание показателя W_1 сопровождается снижением показателя W_2 .

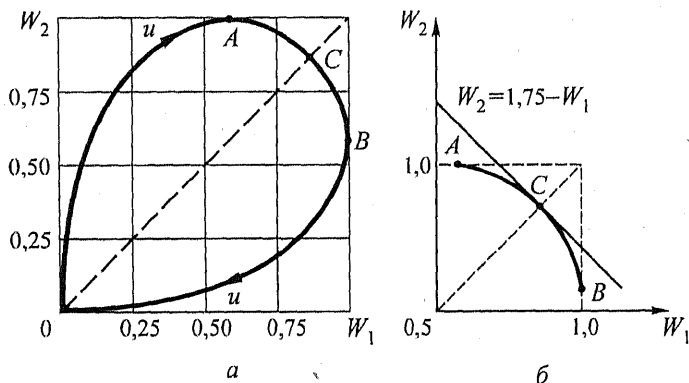


Рис. 3.12

Таким образом, мы получили бесконечное число оптимальных решений (все точки дуги AB). Для выбора из этого множества одного единственного решения нужна информация о предпочтениях. Покажем, как эта информация может быть использована. Введем скалярный критерий — свертку с фиксированным значением $0 \leq \lambda \leq 1$, т.е.

$$W_c = \lambda W_1 + (1 - \lambda) W_2. \quad (3.101)$$

Меняя в (3.101) значение λ , получаем возможность изменять сравнительную важность критериев. Так, имеем $W_c = W_1$ при $\lambda = 1$, $W_c = W_2$ при $\lambda = 0$, $W_c = W_1 + W_2$ при $\lambda = 0,5$, т.е. оба критерия являются равноважными. Можно показать, что каждой точке дуги AB соответствует одно единственное значение λ . Таким образом, если исследователь может сформулировать свои предпочтения о сравнительной важности показателей, т.е. задавать величину λ , представляется возможным выделить единственное решение. Покажем, как это делается. Разрешая (3.101) относительно W_2 , получаем

$$W_2 = \frac{W_c}{1 - \lambda} - \frac{\lambda}{1 - \lambda} W_1.$$

Дифференцируя это выражение по W_1 , получаем

$$\frac{dW_2}{dW_1} = - \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

На основе этого выражения получим для точки C

$$u = 1,185; \quad W_1 = 0,875; \quad \frac{dW_2}{dW_1} = 1 \Rightarrow \lambda = 0,5; \quad W_2 = 1,75 - W_1.$$

На рис. 3.12, б через точку C проходит касательная с уравнением $W_2 = 1,75 - W_1$. Для других точек поступаем аналогичным образом.

Подведем итоги. Мы показали, что для каждого из рассмотренных критериев существует свое значение безразмерной скорости $\hat{u}$, обеспечивающее экстремум критерия. Таким образом, задача определения оптимального значения маршевой скорости

решена. Теперь рассмотрим вопрос о стыковке этого результата с начальным u_n и конечным u_k значениями скорости.

Если на величины u_n и u_k не наложено никаких ограничений, т.е. они *свободны*, то полученное решение исчерпывает задачу. Однако в действительности это не так, поскольку и величина u_n , определяемая скоростью носителя, и величина u_k , определяемая скоростью цели, оказываются *закрепленными*.

Поскольку в общем случае величины u_n и u_k расположены относительно $\hat{u}$ произвольным образом, возникает вопрос об их стыковке, к рассмотрению которой и переходим.

Отметим прежде всего, что настоящий параграф соответствует случаю с постоянной массой. Последующее рассмотрение удобно провести на плоскости «импульс-скорость»*. Рассмотрим момент времени $0 \leq t_1 \leq t_r$ (рис. 3.13, а) и обозначим $J' = R_1 t_1$ — израсходованный к этому моменту времени импульс тяги двигателя, $J'' = R_1 (t_r - t_1)$ — оставшийся к этому моменту импульс тяги двигателя. Очевидно, что полный импульс:

$$J' + J'' = J_\Sigma = R_1 t_r. \quad (3.102)$$

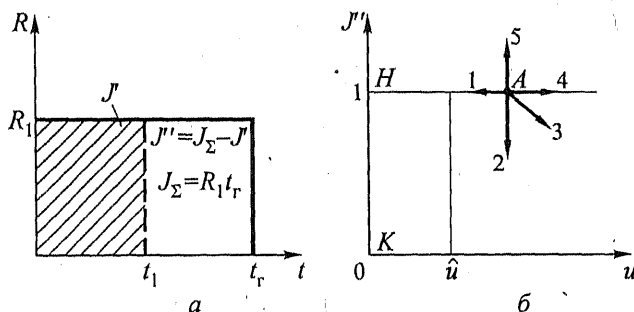


Рис. 3.13

* Проводимый нами анализ аналогичен анализу А.Миеле [14] с заменой плоскости «масса-скорость» на плоскость «импульс-скорость». Переход от массы к импульсу связан с отказом от учета эффекта переменности массы. Для рассматриваемого класса ракет это является допустимым, а сам анализ упрощается.

Отсюда выразим оставшийся импульс

$$J'' = J_{\Sigma} - J'. \quad (3.103)$$

Переходя к относительным величинам $\bar{J}' = \frac{J'}{J_{\Sigma}}$, $\bar{J}'' = \frac{J''}{J_{\Sigma}}$, получим из (3.103)

$$\bar{J}'' = 1 - \bar{J}' = 1 - \frac{t}{t_r}. \quad (3.104)$$

Рассмотрим плоскость u , $\bar{J}''$ (рис. 3.13, б). Отсюда имеем $\bar{J}''(0) = 1$ при $t = 0$; $\bar{J}'' = 0$, при $t = t_r$, т.е. относительный оставшийся импульс тяги двигателя изменяется от единицы до нуля. Это означает, что все начальные точки лежат на плоскости u , $\bar{J}''$ на прямой с ординатой, равной единице, все конечные точки на прямой с ординатой равной нулю. Отметим на оси u значение $\hat{u}$, соответствующее выбранному критерию (для определенности рассмотрим задачу о максимуме дальности полета, которой соответствует значение $\hat{u}_2 = \sqrt[4]{3}$). Проведем через точку с абсциссой $\hat{u}_2$ вертикальную прямую, на которой

$$u = \hat{u}_2. \quad (3.105)$$

Рассмотрим теперь различные варианты расположения начальных и конечных точек относительно прямой (3.105). Всего имеем четыре различных типа такого расположения (см. табл. 3.2).

Таблица 3.2

Тип	Начальная точка	Конечная точка	Тип	Начальная точка	Конечная точка
I	$u_n < \hat{u}_2$	$u_k < \hat{u}_2$	III	$u_n > \hat{u}_2$	$u_k > \hat{u}_2$
II	$u_n < \hat{u}_2$	$u_k > \hat{u}_2$	IV	$u_n > \hat{u}_2$	$u_k < \hat{u}_2$

Определим класс допустимых траекторий на нашей плоскости. Пусть начальная точка есть точка A (рис. 3.13, б). Покажем, что траектории изображающей точки $A1$, $A2$, и $A3$ являются *допустимыми*, а траектории $A4$ и $A5$ — *недопустимыми*. Рассмотрим их последовательно. Траектория $A1$, для которой ордината постоянна, а абсцисса уменьшается, физически соответствует участку пассивного полета ракеты; траектория $A2$, для которой ордината уменьшается, а абсцисса постоянна, соответствует участку маршевого полета с уравновешенными тягами; траектория $A3$ соответствует максимальному разгону, т.е. стартовому участку полета. Определим угол наклона этой траектории. Полагая $Q_x = 0$, $m_k = \text{const}$, получим

$$m_k \frac{dV}{dt} = R_m = \frac{dJ''}{dt} \Rightarrow \frac{dJ''}{dV} = -m_k.$$

Переходя к безразмерным переменным, получим

$$\frac{d\bar{J}''}{du} = -m_k \frac{U_s}{J_\Sigma}. \quad (3.106)$$

Траектории $A4$, $A5$ являются недопустимыми, так как приводят к нарушению законов сохранения. Так, для реализации траектории $A4$ требуется обеспечить увеличение скорости полета при неработающем двигателе, для реализации $A5$ требуется дополнительный импульс тяги.

Теперь можем перейти непосредственно к стыковке точек H и K с прямой (3.105). На рис. 3.14 в зависимости от типа расположения этих точек приведены:

— экстремали задачи — ломаные $HMNK$ — траектории изображающей точки; направление движения точки отмечены стрелками;

— зависимость скорости от времени $u(t)$;

— диаграмма тяги двигателя $\bar{R}(t)$.

Как видим, экстремаль задачи есть ломаная, состоящая в общем случае из трех участков, в качестве которых используются: полет с постоянной маршевой скоростью, разгон с максимальной тягой R_m , пассивный полет.

Видим также, что тип расположения точек H и K относительно прямой (3.105) оказывает существенное влияние на ди-

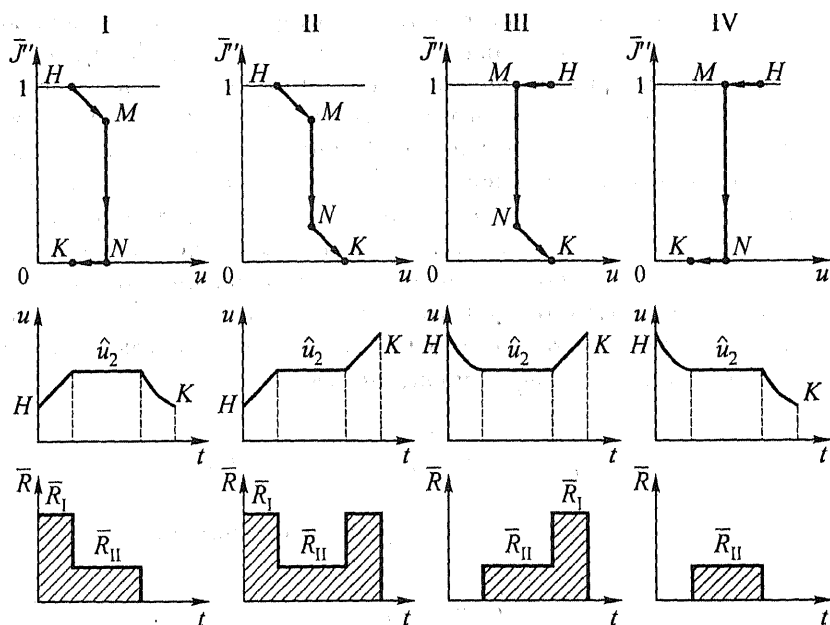


Рис. 3.14

аграмму тяги, в связи с чем реализация полученных рекомендаций затруднена (по крайней мере, для ракет с РДТТ).

Глава 4. КИНЕМАТИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ И ЦЕЛИ

§ 4.1. ТРАЕКТОРИИ РАКЕТЫ В АБСОЛЮТНОЙ СК. ЗОНЫ ДОСТИЖИМОСТИ

Рассмотрим движение центра массы ракеты по криволинейной траектории. Чтобы определить это движение, недостаточно знать только траекторию полета (заданную в какой либо СК), нужно еще знать положение точек на этой траектории в каждый момент времени. Обычно это положение характеризуется дуговой координатой, под которой понимают расстояние вдоль траектории. Если дуговая координата задана как функция времени, то говорят, что задан закон движения или уравнение дви-

жения точки по данной траектории. Другой кинематический способ определения криволинейного движения точки связан с заданием ее координат, которые являются однозначными и непрерывными функциями времени.

Рассмотрим теперь способы задания траектории, ограничившись для простоты плоским случаем. Траектория в горизонтальной и вертикальной плоскостях рассмотрим отдельно. Наиболее употребительным является задание траектории в декартовой или полярной СК. Однако в ряде случаев более удобными могут оказаться и другие способы задания траектории. Здесь прежде всего следует отметить использование «естественного» или «натурального» уравнения кривой, связывающего длину кривой с ее кривизной независимо от какой-либо СК.

Теперь перейдем к рассмотрению свойств траектории. Свяжем с точкой пуска декартову СК $OxYz$ (ось Ox — совпадает с вектором скорости носителя, ось OY — вертикальна) и начнем рассмотрение со случая движения ракеты в горизонтальной плоскости. Чтобы искривить траекторию ракеты, необходимо создать центростремительную силу z , направленную к центру кривизны траектории движения. Криволинейный полет ракеты в горизонтальной плоскости называют *виражом*.

Рассмотрим траекторию виража. Радиус кривизны

$$r = \frac{dS}{d\Theta} = \frac{V}{\Theta} = \frac{V^2}{gn_z}. \quad (4.1)$$

Как видно, при заданной скорости полета величина радиуса кривизны определяется нормальной перегрузкой. С ее увеличением радиус кривизны уменьшается.

Используя полученные выводы по характеристикам виража, рассматриваем методику построения зоны достижимости (иначе — зоны действия).

Определим зону достижимости как часть области плоскости (множество точек на плоскости), характеризующую тем, что при заданных условиях пуска и характеристиках ракеты каждая из точек этой области может быть достигнута ракетой, стартующей из начала координат, при условии, что ее скорость, перегрузки и время полета не превосходит допустимых значений.

Начнем с рассмотрения методики построения границы ЗД — кривой, устанавливающей связь между составляющими даль-

ностями полета по касательной и нормали к положению вектора скорости носителя в момент пуска.

В зависимости от типа траекторий ракеты используются два способа построения ЗД. В первом способе рассматривается семейство траекторий с различными фиксированными значениями перегрузки n_z из диапазона

$$0 \leq n_z \leq n_{z \max}. \quad (4.2)$$

Отметим, что $n_z = 0$ соответствует прямолинейному полету, $n_{z \max}$ — полету по предельной траектории.

Во втором способе по (4.1) и (4.2) строится предельная траектория, а параметром является угол разворота ракеты при полете по этой траектории. После схода с предельной траектории ракета летит прямолинейно. Расчеты показывают, что оба способа дают близкие результаты.

Теперь перейдем непосредственно к построению границы зоны. Поскольку зона симметрична относительно вектора скорости носителя в момент пуска, достаточно строить одну ее половину, т.е. рассматривать вираж одного знака.

Исходными данными для построения зоны являются: высота H_n и скорость полета носителя V_n , а также ограничения по ракете:

$$V \geq V_{\min}, \quad n \leq n_{\max}, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}. \quad (4.3)$$

Таким образом, для фиксированной пары V_n , H_n размер зон (ее площадь) является функцией ограничения (4.3), т.е.

$$\Omega = f(V_{\min}, n_{\max}, t_{\min}, t_{\max}). \quad (4.4)$$

На рис. 4.1, а приведен пример семейства траекторий, построенных по второму способу. Разметим траекторию метками равных времен, скоростей и располагаемых перегрузок. Соединяя метки с одинаковыми индексами, принадлежащие различным траекториям, получим линии равных времен (изохроны), равных скоростей (изотакси) и равных располагаемых перегрузок (изоаксели). Граница верхней половины зоны (рис. 4.1, б) состоит из трех участков: дуги AB — изоχροна с минимальным индексом, дуги BC — участок предельной траектории, дуги

CF — изотаха с минимальным индексом. Зеркально отразив фигуру $ABCF$ относительно оси абсцисс, получим полную зону достижимости. Поскольку ЗД может использоваться в качестве исходного материала для построения зон возможных пусков, целесообразно иметь математическое описание ее границы. Для численных расчетов на ЭВМ необходимо представление уравнения участков границы в виде однозначных функций, в связи с чем приходится дополнительно разбивать дугу CF на три участка. В качестве точек дополнительного разбиения могут использоваться точки, где касательная к границе зоны составляет с осью абсцисс углы 45° и 135° .

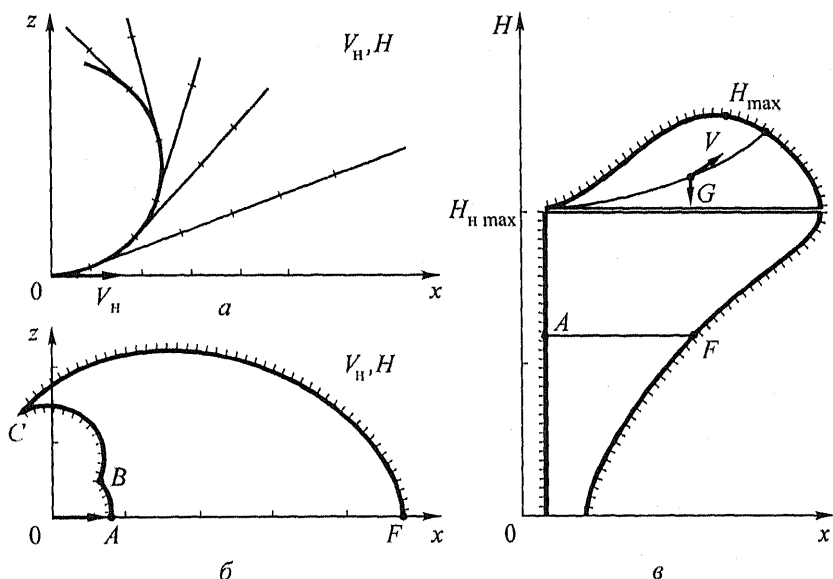


Рис. 4.1

Теперь рассмотрим некоторые соображения по выбору предельных значений характеристик ракеты (4.3). Величина $V_{\min}$, вообще говоря, зависит от ориентации ЗД относительно вектора скорости цели $\bar{V}_ц$. Так, для встречных курсов обычно принимается $V_{\min} = V_ц$, для догонных курсов $V_{\min} = V_ц + \Delta V$; $\Delta V \approx 150$ м/с. В связи с указанным, при гарантированном под-

ходе следует принимать максимальное из этих минимальных значений, т.е. $V_{\min} = V_{\text{ц}} + \Delta V$. Величина $t_{\min}$ должна включать в себя время неуправляемого полета ракеты и время, необходимое для затухания переходного процесса в системе наведения. Рекомендуемое значение $t_{\min} = 1,5 + 2,0$ с.

Пусть у нас имеются горизонтальные сечения ЗД для различных H и V_H , в пределах всего диапазона значений

$$0 \leq H \leq H_{H \max}. \quad (4.5)$$

Здесь $H_{H \max}$ максимальная высота полета носителя (потолок). Рассмотрим вопрос об использовании этих данных для построения вертикального сечения ЗД. Отметим, что это сечение ЗД может соответствовать либо случаю $V_H = \text{const}$, либо случаю $V_H = f(H)$. На рис. 4.1, в приведен пример вертикального сечения ЗД. Здесь отрезки H , снятые с горизонтального сечения ЗД, в зависимости от высоты полета H образуют соответственно ближнюю и дальнюю границы ЗД.

Рассмотрим теперь диапазон высот

$$H_{H \max} \leq H \leq H_{\max}. \quad (4.6)$$

Здесь $H_{\max}$ — максимальная высота применения ракеты. Поскольку $H_{\max} > H_{H \max}$, полет ракеты должен проходить с набором высоты, т.е. $\Theta \neq 0$. Граница зоны определяется требуемым значением располагаемой перегрузки $n_y^p = 3,0$.

Более подробно эти вопросы рассмотрены в работе [7].

§ 4.2. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ СК, СВЯЗАННАЯ С ЦЕЛЮ. ЗОНЫ ВОЗМОЖНЫХ ПУСКОВ

Рассмотрим относительную полярную СК, связанную с целью. Положения носителя этой СК будем характеризовать курсовым углом q_1 цели и дальностью D между самолетами. Здесь q_1 изменяется от нуля (встречные курсы) до 180° (догонные курсы). Вместо курсового угла может использоваться понятие ракурса r цели:

$$r = \sin q_1. \quad (4.7)$$

Ракурсы цели измеряются в четвертях: $\frac{0}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{4}$ (соответственно в ППС и ЗПС). Положение вектора скорости носителя определяется по-прежнему углом пеленга ϕ .

Под зоной возможных пусков (ЗВП) будем понимать часть области пространства (физического или фазового), из каждой точки которого возможен перехват ракетой цели.

Исходными данными для построения ЗВП являются: 1) ЗД, построенные для фиксированных значений H и V_n ; 2) параметры цели $V_{ц}$, n_z ; 3) метод наведения носителя. Так как относительных координат три: q_1 , D , ϕ , то на плоскости возможны два способа представления ЗВП: в физических координатах q_1 , D при заданном ϕ и в фазовых координатах D , ϕ при фиксированном q_1 . Ограничимся рассмотрением методики построения ЗВП в координатах D , q_1 . Для простейшего случая примем: 1) цель летит прямолинейно; 2) истребитель наводится по кривой атаки (ошибки пуска отсутствуют). В этом случае для границы зоны в горизонтальной плоскости может быть получено аналитическое выражение.

Рассмотрим (рис. 4.2, а) упредительный треугольник ОЦВ. При полете по кривой атаки угол пеленга равен углу упреждения, т.е.

$$\phi = \psi = \arcsin \frac{V_{ц}}{V_{ср}} \sin q. \quad (4.8)$$

Здесь $V_{ср}$ — средняя скорость полета ракеты. В силу отсутствия ошибок пуска ракета летит прямолинейно. Отметим, что равенство (4.8) есть теорема синусов для треугольника ОЦВ. На основании теоремы косинусов для этого же треугольника получим

$$S^2 = D^2 + S_{ц}^2 - 2DS_{ц} \cos q_1, \quad (4.9)$$

где D — дальность между носителем и целью в момент пуска; S — дальность полета ракеты; $S_{ц}$ — дальность полета цели.

Отсюда получим для граничных случаев:
встречные курсы (ППС)

$$q_1 = 0^\circ; \quad D^{(+)} = S + S_{\Pi};$$

догонные курсы (ЗПС) (4.10)

$$q_1 = 180^\circ; \quad D^{(-)} = S - S_{\Pi}.$$

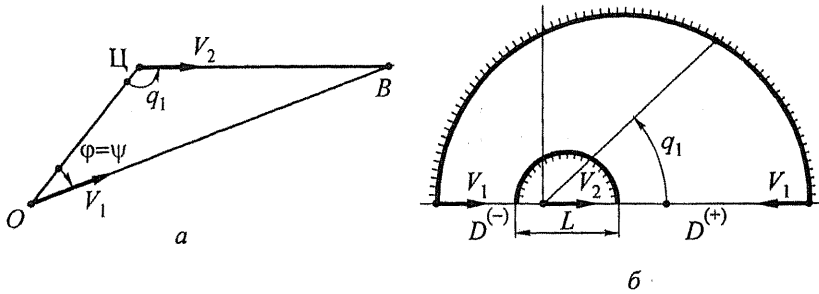


Рис. 4.2

Легко убедиться, что (4.9) представляет собой уравнение окружности в рассматриваемой СК, причем радиус окружности R и смещение ее центра относительно полюса L определяются выражениями:

$$R = \frac{1}{2} \left(D^{(+)} + D^{(-)} \right); \quad L = \frac{1}{2} \left(D^{(+)} - D^{(-)} \right). \quad (4.11)$$

Из (4.10) найдем отношение дальностей $d = \frac{D^{(+)}}{D^{(-)}}$:

$$d = \frac{K+1}{K-1}; \quad K = \frac{V_{\text{ср}}}{V_{\Pi}}. \quad (4.12)$$

Отсюда имеем $d = 5$ при $K = 1,5$; $d = 3$ при $K = 2$. Таким образом, дальность пуска на встречных курсах в 3 + 5 раз превышает дальность пуска на догонных. Пример горизонтального сечения ЗВП приведен на рис. 4.2, б. Вертикальное сечение ЗВП строится на основе вертикального сечения ЗД и соотношений (4.10).

Теперь рассмотрим более сложный случай, когда истребитель наводится не по кривой атаки, т.е. $\lambda \neq \frac{V_1}{V_{cp}}$. В этом случае прицеливание и пуск ракеты производится с ошибкой от направления $\Delta\psi$, в упрежденную точку, которую ракета должна выбрать своим маневром. Очевидно:

$$\Delta\psi = \psi - \varphi. \quad (4.13)$$

Оценим максимальную величину ошибки при полете истребителя по методам прямого наведения (кривая погони) и параллельного сближения.

1. При полете по кривой погони

$$\Delta\psi = \psi = \arcsin \frac{V_{ц}}{V_{cp}} \sin q. \quad (4.14)$$

Отсюда следует: $\psi = 0$ при $q = 0$ и $q = 180^\circ$, $\Delta\psi_{\max} = \arcsin \frac{V_{ц}}{V_{cp}}$ при $q = 90^\circ$. Оценим величину $\Delta\psi_{\max}$. Полагая $V_{н} = V_{ц}$, $V_{cp} = 2V_{н}$, получаем $\Delta\psi_{\max} = 30^\circ$.

2. При полете по методу параллельного сближения

$$\Delta\psi = - \left(\arcsin \frac{V_{н}}{V_{н}} \sin q - \arcsin \frac{V_{ц}}{V_{cp}} \sin q \right). \quad (4.15)$$

Оценим максимальное значение ошибки, соответствующее $q = 90^\circ$. Полагая $V_{ц} = V_{н}$, $V_{cp} = 2V_{н}$, получаем $\psi = -60^\circ$.

Построение границы ЗВП для случая, когда имеют место ошибки пуска и (или) маневр цели, следует проводить графическим методом, основанным на использовании ЗД [6].

Методика построения ЗВП в координатах D , φ приведена в [6]. Эти зоны можно использовать для построения гарантированных зон возможных пусков (ГЗВП), под которыми будем принимать общую часть (пересечение) ЗВП в координатах D , φ , соответствующих фиксированному q_1 и двум знакам маневра цели с максимальной перегрузкой $n_{ц\max}$. Естественно, что размер ГЗВП оказывается существенно меньшим, чем соответствующих ЗВП. Однако достоинством этого типа зон яв-

ляется то, что они гарантируют перехват маневрирующей цели в диапазоне

$$-n_{ц\max} \leq n_{ц} \leq n_{ц\max}.$$

Используя ГЗВП в координатах D, φ , можно построить ГЗВП в координатах D, q . Поскольку зона должна быть гарантированной, при ее построении необходимо брать: для максимальной (минимальной) дальности соответственно минимальное (максимальное) значение при различных знаках φ .

Отметим, что формализуя использованные выше геометрические построения ЗВП и опираясь на параметризацию границы ЗД, можно развить машинный способ построения ЗВП (ГЗВП) в координатах D, φ .

§ 4.3. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ СК, СВЯЗАННАЯ С НОСИТЕЛЕМ. ЗОНЫ ОТЛЕТОВ. ВСЕНАПРАВЛЕННАЯ ЗОНА ВОЗМОЖНЫХ ПУСКОВ

Рассмотрим зоны в СК, связанной с самолетом. В общем случае самолет № 1 участвует в двух движениях: он перемещается поступательно с угловой скоростью V_1 и вращается с угловой скоростью ω_1 . Методика исследования относительного движения самолетов в такой СК, развитая выше в главе I, может быть использована и для анализа движения ракеты. Найдем связь между характеристиками ракеты в абсолютном и относительном движении, ограничившись случаем $\omega_1 = 0$.

Пусть траектория ракеты задана в абсолютной декартовой СК, связанной с точкой пуска, $z(x)$. Преобразование траектории при переходе от абсолютной СК Ozx к относительной СК Oz_1x_1 осуществляется на основе формул перехода

$$\begin{aligned} z_1 &= z; \\ x_1 &= x - V_1 t. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Разметим (рис. 4.3, а) траекторию метками времени и отложим от них в направлении отрицательной оси Ox отрезки, параллельные оси Ox и равные $V_1 t$. Таким образом, при переходе от абсолютной СК к относительной необходимо абсциссы

всех точек траектории сдвинуть «назад» вдоль оси Ox на величину, пропорциональную времени полета ракеты.

Используя указанное преобразование, перестраиваем зону достижимости, определенную в абсолютной СК, в зону отлетов, определенную в относительной СК.

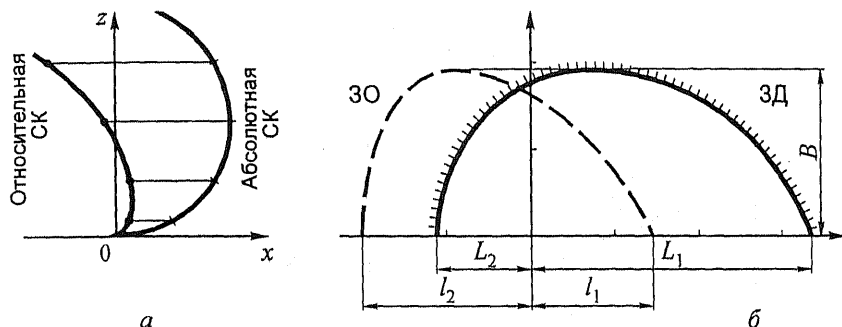


Рис. 4.3

Ограничимся рассмотрением перспективных ракет, для которых ЗД является замкнутой. Пример внешней границы такой ЗД, соответствующей выпуклому множеству точек зоны, приведен на рис. 4.3, б (сплошная линия). Там же пунктиром показана зона отлетов. Будем характеризовать ЗД и ЗО продольным и поперечным размерами: $L = L_1 + L_2$ и $2B$ — соответственно глубина и ширина ЗД, а $l = l_1 + l_2$ и $2b$ — глубина и ширина ЗО.

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$b = B; \quad l < L. \quad (4.17)$$

Как видим, при одинаковом поперечном размере обеих зон продольный размер у ЗО оказывается меньшим. Последнее связано с уменьшением времени полета в направлении отрицательной оси Ox вследствие затрат энергии на разворот. Обычно: $B = 0,5L$; $b = 0,6l$; $l = 0,75L$; $L_2 = 0,25L_1$; $l_2 = 1,5l_1$.

Перейдем теперь к рассмотрению зон возможных пусков, учитывающих как движение носителя, так и движение цели. Установим связь между элементами движения в обеих СК для

случая встречных курсов $q_1 = 0$. На рис. 4.4, а приведены характеристики движения носителя, ракеты и цели в абсолютной СК. Здесь D_0 — начальная дальность; V_1 — скорость носителя; V_2 — скорость цели; $V_{\text{ср}}$ — средняя скорость ракеты; $t_{\text{п}}$ — время полета ракеты до встречи с целью (точка B_0). Имеем

$$D = (V_{\text{ср}} + V_2) t_{\text{п}}. \quad (4.18)$$

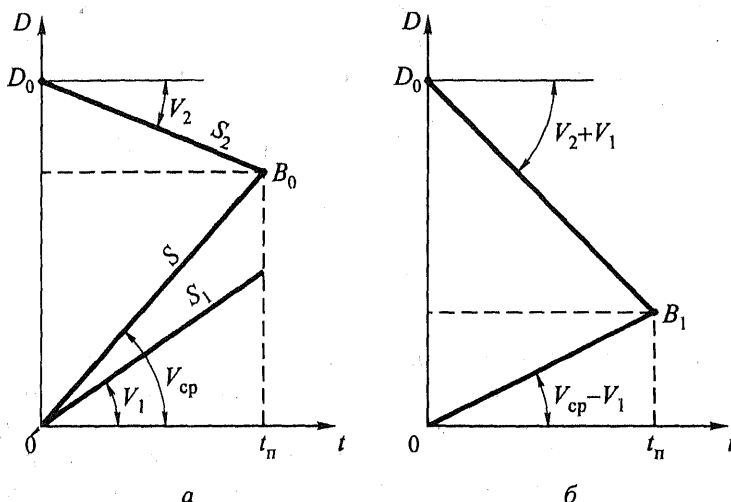


Рис. 4.4

Преобразуем (4.18), прибавив и отняв значение V_1 (рис. 4.4, б)

$$\begin{aligned} D &= (V_{\text{ср}} + V_2 + V_1 - V_1) t_{\text{п}} = \\ &= \left[(V_{\text{ср}} - V_1) + (V_2 + V_1) \right] t_{\text{п}} = (V_{\text{отл}} - V_{\text{отн}}) t_{\text{п}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Здесь обозначено $V_{\text{отл}} = V_{\text{ср}} - V_1$ — относительная скорость отлета (среднее значение); $V_{\text{отн}}$ — относительная скорость сближения самолетов. Из сравнения (4.18) и (4.19) и следует связь между элементами движения в обеих СК.

Введем теперь полярную СК, связанную с вектором V_1 , и будем характеризовать положение цели дальностью D и углом пеленга φ . В этой СК строятся всенаправленные зоны возможных пусков (ВЗВП).

Рассмотрим методику построения дальней границы ВЗВП. С этой целью зафиксируем значение курсового угла цели, в частности, положим $q_1 = 0$ и рассмотрим произвольное значение угла φ .

Как следует из рис. 4.5, а, в начальный момент цель располагается на дальности D под углом φ , а вектор скорости цели V_2 направлен в силу условия $q_1 = 0$ по линии дальности. Для других φ кинематическая картина аналогична.

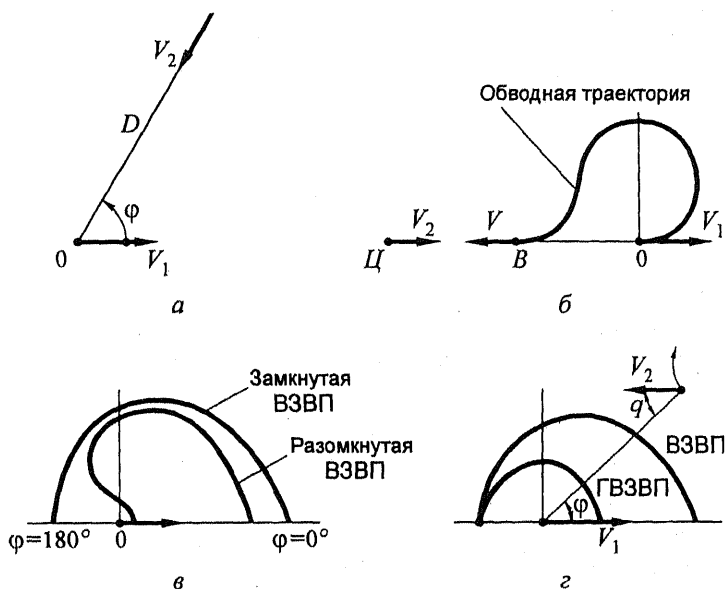


Рис. 4.5

Важным случаем является $\varphi = 180^\circ$, когда ракета осуществляет перехват цели в ЗПС носителя на встречных курсах (в силу $q_1 = 0$), т.е. решает задачу обороны хвоста носителя. Для этого она должна выполнить разворот по так называемой «об-

водной» траектории с изменением угла пеленга от нуля (начальный момент времени) до 180° (момент выхода на курс перехвата). Схематическое изображение обводной траектории приведено на рис. 4.5, б. Здесь точки 0 и Ц определяют начальные положения ракеты и цели; В — точка встречи.

Очевидно, что радиус кривизны обводной траектории должен быть минимальным. Сравним максимальные дальности пуска для случая $q_1 = 0$ при двух значениях угла φ .

1. При $\varphi = 0^\circ$ максимальная дальность пуска определяется первым соотношением (4.10). Этот случай уже был рассмотрен выше в § 4.2.

2. При $\varphi = 180^\circ$ требуется реализация обводной траектории. При этом в связи с различием между дугой и хордой, а также в связи с дополнительной потерей скорости за счет индуктивного сопротивления при полете по обводной траектории соответствующая дальность пуска оказывается существенно меньшей, чем при $\varphi = 0$:

$$D_{180} < D_0, \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{D_{180}}{D_0} < 1. \quad (4.20)$$

Обычно $\lambda \approx 0,5$, т.е. дальность пуска ракеты самолетом № 2 в ЗПС, при которой обеспечивается его перехват, оказывается в два раза меньше, чем дальность пуска в ППС.

Важным свойством ВЗВП является ее замкнутость, характеризующая возможность самолета № 1 перехватывать цель при всех φ , включая $\varphi = 180^\circ$. На рис. 4.5, в приведены примеры замкнутых и разомкнутых ВЗВП.

В этих же координатах могут быть построены гарантированные ВЗВП (ГВЗВП). Под ГВЗВП понимается зона в которой обеспечивается перехват цели независимо от ее маневра на выход из зоны с перегрузкой $n_{\text{ц max}}$. Естественно, что размер ГВЗВП меньше, чем ВЗВП. Сравнение ВЗВП и ГВЗВП приведено на рис. 4.5, г.

Важным техническим средством обеспечения замкнутости ВЗВП и ГВЗВП является задержка включения двигателя ракеты самолета № 1 τ , обеспечивающая улучшение условий разворота по обводной траектории.

Глава 5. ОБЩАЯ СТРУКТУРА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ РАКЕТОЙ

§ 5.1. ФУНКЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СОВРЕМЕННЫХ РАКЕТ И ОСНОВЫ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА К ИХ РАССМОТРЕНИЮ

Возрастание требований к тактико-техническим характеристикам современных ракет, развитие теории управления, успехи приборостроения и электроники привели к существенному усложнению задач, решаемых современными СУ и к увеличению многообразия их функций.

Следующее перечисление дает представление об этом многообразии [16 — 18].

К *основным функциям*, традиционно возлагаемым на СУ ракеты, относятся:

1. Обеспечение точности наведения, количественно определяемой статистическими характеристиками пролета или вероятностью попадания в круг заданного радиуса.

2. Обеспечение требуемого вида траектории.

Это может оказаться необходимым для полного использования баллистических возможностей ракеты (спрямление в целях уменьшения влияния индуктивного сопротивления при полете на малых высотах или навесные траектории при полете на больших высотах). Другой задачей специального формирования траектории может быть ограничение углов наклона вектора скорости относительно земли или направления полета для создания благоприятных условий работы бортовой аппаратуры.

3. Обеспечение оптимальных статических и динамических характеристик реакции ракеты на сигнал управления, требуемых для работы в условиях возмущений, имеющих стохастический характер, например, естественных и организованных помех.

4. Подавление внешних воздействий, приложенных к ракете, таких как влияние ветра, погрешностей нивелировки несущих и управляющих поверхностей, уходов «нулей» аппаратуры и др.

5. Обеспечение стабильности характеристик в широком диапазоне условий применения. Следует отметить, что современные ракеты применяются в достаточно широком диапазоне вы-

сот и скоростей полета, так что скоростной напор в нем может изменяться в 30 и более раз. Это порождает проблему управления объектом при переменной эффективности органов управления и динамических свойств самого объекта.

К *вспомогательным* функциям относят обычно функции СУ, связанные с ограничением критических состояний.

1. Ограничение перегрузок ракеты в интересах прочности для возможности применения бортовых приборов, не допускающих превышения определенного уровня перегрузки.

2. Ограничение углов атаки, которое необходимо реализовать в тех режимах, когда располагаемые перегрузки меньше перегрузок, требуемых для наведения на цель при выбранном законе (обычная ситуация для больших высот). Другой причиной, требующей такого ограничения, может явиться обеспечение устойчивости балансировочных режимов в пространственном движении при больших углах атаки.

3. Ограничение углов пеленга, т.е. углов между продольной осью ракеты и мгновенным направлением на цель — проблема, связанная со стремлением обеспечить достаточно широкие зоны применения ракеты при неизбежном механическом ограничении углов поворота координатора цели.

Как видим, среди перечисленных функций СУ есть связанные как с абсолютным движением ракеты, так и с движением относительно цели или собственного носителя. Физические устройства, входящие в СУ, оказываются включенными одновременно в несколько систем регулирования и преобразования информации.

При более детальном изучении перечень функций СУ можно было бы продолжить, однако на основе сказанного уже можно сделать вывод, что для анализа работы СУ необходим системный подход. Под таким подходом будем подразумевать совокупность рассуждений как формализуемых математически, так и не поддающихся такой формализации, позволяющую построить определенную иерархическую последовательность подсистем сложной системы «ракета — СУ».

В соответствии с принципом системного подхода для этих подсистем могут быть сформулированы содержательные задачи, математические модели и критерии оценки характеристик.

В качестве математического аппарата, используемого в процессе формирования СУ, применяются как методы классиче-

ской, так и современной теории автоматического управления (ТАУ). Классическая теория (КТАУ) основана на операторном методе описания динамических систем и устанавливает связь между множествами входных и выходных сигналов. Понятие оператора связано с физическим понятием отклика, реакции динамической системы на возбуждающее воздействие при определенных начальных условиях [25]. В применении к линейным непрерывным системам, заданным рациональными передаточными функциями (такая математическая модель может быть принята в качестве основной для всех подсистем), операторный метод с учетом его развития дает достаточно строгие и вместе с тем простые инженерные правила исследования динамических систем «в малом». Эти методы оказались достаточно эффективными и использовались в процессе формирования СУ ракет первых трех поколений.

В отличие от классической современная теория (СТАУ) опирается на описание систем в пространстве состояний и обеспечивает исследование «в большом», осуществляемое в реальном времени непосредственно в процессе управления (функционирования) системы [26].

Эти методы в настоящее время эффективно используются при разработке СУ ракет четвертого поколения с БЦВМ.

Для более углубленного знакомства с особенностями математического аппарата СТАУ, используемого в учебнике, отсылаем читателя к «Справочнику по теории автоматического управления» под редакцией А.А. Красовского [26], который охватывает все основные разделы теории управления в свете единой концепции оптимального достижения главной конечной цели управления с соблюдением множества ограничений (информационных, энергетических, вычислительных и др.).

Ниже рассматриваются основные подсистемы системы управления ракетой.

§ 5.2. ОСНОВНЫЕ ПОДСИСТЕМЫ СУ РАКЕТЫ

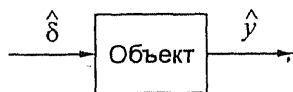
Рассмотрим эти подсистемы в порядке усложнения, принимая, что каждая из последующих подсистем включает предыдущую в качестве составной части. В настоящее время принято выделять пять таких подсистем [16, 23], причем для каждой

из них могут быть сформулированы перечень решаемых задач и критерии оценки характеристик.

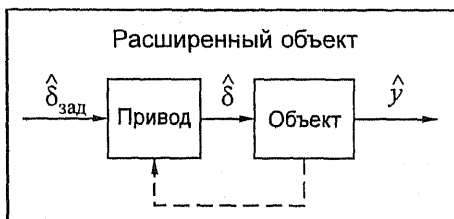
1. *Ракета как объект регулирования (О)*. При заданном положении органов управления и тяге двигателя полностью определяются внешние силы, действующие на ракету в ее абсолютном движении в неподвижной системе отсчета. Этот факт схематично представлен на рис. 5.1, а, где $\hat{\delta}$ — совокупность параметров, определяющих положение (углы отклонения) органов управления; $\hat{y}$ — совокупность параметров, характеризующих указанное движение ракеты (линейные и угловые координаты, скорости, ускорения, углы атаки и т.д.). При этом $\hat{\delta}$ и $\hat{y}$ являются соответственно входом и выходом динамического объекта, математическая модель которого сводится к уравнениям механики полета твердого тела в атмосфере.

2. *Расширенный объект (РО)*. Для отклонения органов управления (рулей) используются приводы — устройства, преобразующие электрические сигналы в параметры механического углового движения рулей. Тем самым образуется надсистема — расширенный объект, для которого сам объект (ракета) и рулевые приводы являются подсистемами (рис. 5.1, б). Здесь $\hat{\delta}_{\text{зад}}$ — многомерный параметр, смысл которого — набор заданных углов отклонения рулей, реализованных в виде электрических сигналов. При переходе от объекта к расширенному объекту математическая модель объекта дополняется уравнениями приводов, отражающих их физический принцип (электро-механика, газодинамика, гидравлика) и конструктивную схему. В расширенном объекте возможны внутренние обратные связи между подсистемами, например, влияние нагружения привода шарнирным моментом, показанные на рис. 5.1, б пунктиром. Однако это не существенно для иллюстрации основного факта — получения расширенного объекта с входом $\hat{\delta}_{\text{зад}}$ и выходом $\hat{y}$.

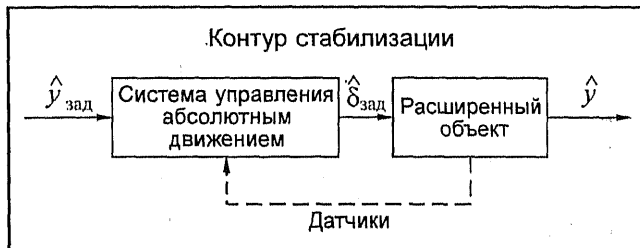
Для современных ракет, используемых при малых или отрицательных запасах статической устойчивости и больших углах атаки, как правило, РО не может быть непосредственно включен в систему наведения на цель, поскольку не обладает необходимыми динамическими свойствами в смысле КТАУ (колебательность, время переходного процесса, запасы устойчивости по амплитуде и фазе и т.п.). На уровне РО не удастся



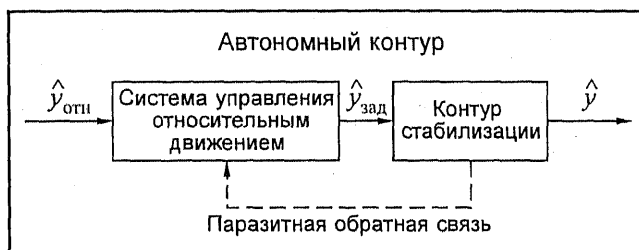
a



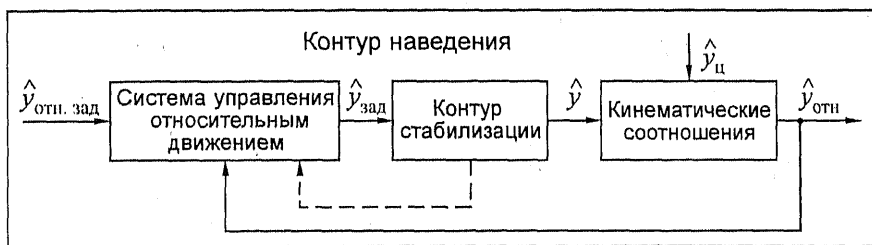
б



в



г



д

Рис. 5.1

качественно обеспечить и функцию ограничения критических состояний ракеты.

3. *Контур стабилизации (КС).* В связи с изложенным построим ближайшую надсистему следующего уровня. Дополним расширенный объект совокупностью устройств, осуществляющих измерение параметров $\hat{y}$ и формирование сигналов $\hat{\delta}_{\text{зад}}$ с учетом требуемых и фактических значений параметров абсолютного движения. Указанную совокупность устройств будем называть СУ абсолютным движением. В сочетании с расширенным объектом она образует (рис. 5.1, в) контур стабилизации, входом для которого является многомерный параметр $\hat{y}_{\text{зад}}$, смысл которого — совокупность заданных параметров абсолютного движения, а выходом — по-прежнему $\hat{y}$. Внутренняя обратная связь между подсистемами отражает факт использования сигналов датчиков, измеряющих $\hat{y}$ для формирования $\hat{\delta}_{\text{зад}}$; их конкретный вид несущественен при включении КС как единого целого в какую-либо более полную систему. Отметим, что термин КС, принятый нами для обозначения полученной надсистемы, не означает, что ему соответствует физически организованный замкнутый контур регулирования. В данном случае он охватывает управление как каналами продольно-бокового движения, и каналами крена, и включает как полезные и паразитные связи (аэродинамические, гироскопические и пр.). СУ абсолютным движением, являясь подсистемой КС, не обязательно реализуется в виде единого агрегата (традиционного автопилота), ее функции могут быть по конструктивно-технологическим или эксплуатационным соотношениям распределены между неиспользованными агрегатами.

На уровне КС удастся получить требуемое качество реакции объекта $\hat{y}$ на сигналы $\hat{y}_{\text{зад}}$ в заданном диапазоне изменения переменных, решить вопросы ограничения критических состояний и компенсировать внешние возмущения, приближенные к объекту, приводу и к аппаратуре СУ абсолютным движением. Математическая модель на этом уровне включает уравнения, отражающие структуру и взаимодействие цепей стабилизации и преобразования входных сигналов, динамику датчиков и т.д. Модель должна отражать также конкретный тип управления: декартовый, полярный — в связанной или стабилизированной системе координат.

4. *Автономный контур (АК)*. До сих пор мы рассматривали последовательность специально организованных контуров (объект, расширенный объект, контур стабилизации), где каждый последующий исправлял недостаток предыдущего. Теперь перейдем к рассмотрению следующей надсистемы — автономного контура, образующегося за счет погрешностей измерения относительного движения (как правило, головок самонаведения). Автономный контур включает КС и СУ относительным движением и представляет собой систему, дополняющую уравнения кинематической связи ракеты с целью для замкнутой системы. Его структура приведена на рис. 5.1, г. Пунктир здесь обозначает паразитную обратную связь (ПОС) и обусловлен синхронной ошибкой, связанной с влиянием параметров абсолютного движения ракеты на измерение $\hat{y}_{отн}$ и формирование $\hat{y}_{зад\ отн}$. Связь по синхронной ошибке в существенной мере изменяет динамические характеристики автономного контура в статике и динамике.

5. *Контур наведения (КН)*. Представляет собой надсистему следующего уровня, ответственную за наведение ракеты на цель с заданной точностью. Поскольку наведение означает наложение связей на относительное движение ракеты и цели, введем в рассмотрение совокупность устройств, осуществляющих измерение параметров относительного движения $\hat{y}_{отн}$ и формирование на их основе сигналов $\hat{y}_{зад}$ с учетом задаваемых $\hat{y}_{зад\ отн}$ и фактических значений этих параметров. Эту совокупность устройств будем называть СУ относительным движением. Каждый из параметров, входящих в $\hat{y}_{отн}$, может быть получен из кинематических соотношений типа $\hat{y}_{отн} = \hat{y}_ц - \hat{y}$, выражающих принцип Галилея.

Мы приходим к системе, представленной на рис. 5.1, д, для которой КС и СУ относительным движением являются подсистемой, именуемой контуром наведения (КН), входами для которого являются $y_{зад\ отн}$ и $y_ц$, выходом — $y_{отн}$. По отношению к КН можно сделать замечания, аналогичные КС: параметры $y_{отн}$ не обязательно измеряются непосредственно аппаратурой ракеты, которая может лишь принимать информацию по линии связи. В структуре КН именно кинематические соотношения характеризуют объект регулирования в смысле КТАУ, а ракета

играет роль регулятора. В частном случае, когда задача наведения сводится лишь к обеспечению малого пролета и никаких ограничений на относительную траекторию не накладывается, под $\hat{y}_{отн}$ подразумевается единственный параметр — фактический пролет, статистика которого характеризует точность наведения.

§ 5.3. ИЕРАРХИЧЕСКАЯ СИСТЕМА МОДЕЛЕЙ СУ

Как показано в § 5.2, расположенные там подсистемы образуют [22] ряд вложенных друг в друга моделей, причем ракета оказывается последовательно включенной в РО, КС, АК и КН. Эта система моделей обладает внешней и внутренней иерархической структурой.

Внешняя иерархическая структура системы отражает основные подсистемы, традиционно выделяемые в задаче управления движением: О, РО, КС, АК, КН.

Внутренняя иерархическая структура вводит для каждой из подсистем математические модели разных уровней, отличающиеся степенью подробности описания. Именно эта особенность системы позволяет для каждого конкретного исследования создать вычислительный алгоритм, адекватный физическому содержанию излагаемой проблемы и оптимальный в смысле сложности математического представления.

Укажем основные особенности этих моделей.

1. Для представления ракеты как объекта (О) регулирования при больших углах атаки используется представление коэффициентов сил и моментов в виде многомерных функций (смешанных полиномов) от угла атаки. В дальнейшем будем именовать $\alpha_{1,2}$ — канальными углами атаки: α , φ — углом атаки (полным) и углом аэродинамического крена. По отношению к углу атаки используются модели следующих уровней: линейная, с круговой симметрией, с круговой несимметрией, с эллиптической несимметрией. По отношению к углам отклонения рулей — модели уровней: линейная, суперпозитивная, с учетом взаимовлияния.

2. Математическая модель РО требует корректного описания привода. Используются модели следующих уровней: привод как независимая следящая система, учет связи с ракетой через шар-

нирный момент и нормальную силу, учет совместной работы привода с источником питания.

3. При исследовании КС ракет, использующих режимы статической неустойчивости, больших углов атаки, малых запасов аэроупругой устойчивости используются модели следующих уровней (две независимые ветви): 1) КС как совокупность изолированных каналов, как связанная трехканальная система с одновременным учетом двух типов связей; 2) КС как система регулирования ракеты как твердого тела, как замкнутая система регулирования упругого тела в потоке.

4. При исследовании АК в целях определения максимальной высоты применения требуется корректный учет модели синхронной ошибки (СО). Учет может последовательно уточняться на основе моделей следующих уровней: учет СО заданием осредненного одномерного градиента; учет основной и кросс компоненты ошибки; четырехкомпонентная модель СО в двух каналах; полное отображение топографии градиента СО в плоскости параметров — составляющих угла пеленга.

5. При исследовании КН в зависимости от его типа существуют модели различных уровней. Важным методическим вопросом является математическое моделирование контура, использующее БЦВМ. Учет особенностей БЦВМ при моделировании на универсальных ЦВМ возможен на одном из следующих уровней: простое воспроизведение функциональных алгоритмов; учет квантования по времени и уровню; учет ограничений по разрядной сетке (ошибок округления); наконец, полное воспроизведение программы и системы команд БЦВМ в универсальной ЦВМ на основе программ-эмулятора.

Отметим следующие общие черты указанных выше моделей. Для их использования должен применяться модульный принцип программирования, обеспечивающий универсальность исследовательских программ, гибкость перехода в подсистемах к моделям другого уровня, сокращение времени на подготовку исследования. Все модели могут быть использованы как в детерминированных, так и в стохастических задачах (учет шумов, разброса параметров, ошибок измерений, регрессионный анализ). Модели допускают обмен информацией между предприятиями — соразработчиками, исследовательскими и испытательными организациями на машинных носителях (магнитные ленты, диски и т.п.).

Глава 6. МОДЕЛЬ РАКЕТЫ КАК ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

§ 6.1. РЕАКЦИЯ РАКЕТЫ НА ОТКЛОНЕНИЕ ОРГАНОВ УПРАВЛЕНИЯ В ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

Рассмотрим уравнения ракеты как совокупность изолированных каналов. Для осесимметричной ракеты $J_{yy} = J_{zz}$, т.е. достаточно рассматривать два канала: тангажа и крена. Запишем линеаризованные уравнения плоского движения для канала тангажа.

Пусть ω_z угловая скорость вращения корпуса; α_1 — угол атаки (канальный); δ_1 — угол отклонения рулей. Связь между углами Θ , ϑ и α см. рис. 6,1, а. Обозначения:

$$a_1 = \frac{-1}{J_{zz}} \frac{\partial M_z}{\partial \omega_z}; \quad a_2 = \frac{-1}{J_{zz}} \frac{\partial M_z}{\partial \alpha}; \quad a_3 = \frac{-1}{J_{zz}} \frac{\partial M_z}{\partial \delta}; \quad (6.1)$$

$$a_4 = \frac{-1}{m} \frac{R_y}{\partial \alpha}; \quad a_5 = \frac{-1}{m} \frac{R_y}{\partial \delta}.$$

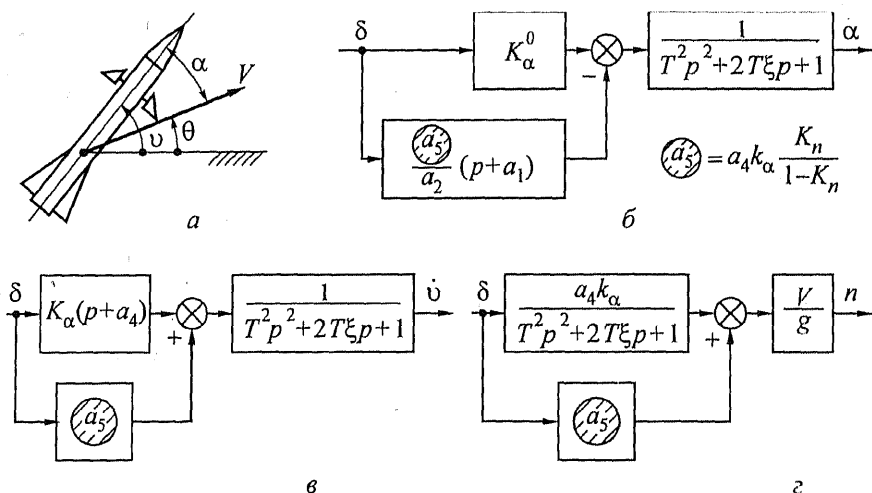


Рис. 6.1

Учитывая уравнения моментов, сил и связи углов, получаем:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_z + a_1 \omega_z + a_2 \alpha_1 &= a_3 \delta_I; \\ \dot{\alpha} + a_4 \alpha_1 + a_5 \delta_I &= \omega_z; \\ \vartheta &= \Theta + \alpha.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Отметим, что в (6.2) мы пренебрегли влиянием веса по сравнению с аэродинамическими силами.

Вводя символ $p = \frac{d}{dt}$, запишем (6.2) в операторной форме:

$$\begin{aligned}(p + a_1) \dot{\vartheta} + a_2 \alpha_1 &= a_3 \delta_I; \\ \dot{\vartheta} &= \dot{\Theta} + p\alpha; \\ \dot{\Theta} &= a_4 \alpha_1 + a_5 \delta_I.\end{aligned}\tag{6.3}$$

Решаем систему (6.3) как алгебраическую относительно $\dot{\Theta}$, ϑ , α_1 при известном δ_I .

1. Передаточные функции и динамические характеристики ракеты по углу атаки (см. рис. 6.1, б).

Решая систему (6.3) относительно α , получаем

$$\alpha_1 = W_{\delta}^{\alpha}(p) \delta_I,\tag{6.4}$$

где передаточная функция от δ до α имеет вид

$$W_{\delta}^{\alpha}(p) = \frac{K_{\alpha}(T_{\alpha}p + 1)}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}\tag{6.5}$$

при обозначениях

$$\begin{aligned}K_{\alpha} &= \frac{a_3 - a_1 a_5}{a_2 + a_1 a_4} \approx \frac{a_3}{a_2} = K_{\alpha}^0; \\ T_{\alpha} &= -\frac{a_5}{a_2 + a_1 a_4} \approx -\frac{a_5}{a_2}; \quad T = \frac{1}{\sqrt{a_2 + a_1 a_4}} \approx \frac{1}{\sqrt{a_2}};\end{aligned}\tag{6.6}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{a_1 + a_4}{\sqrt{a_2 + a_1 a_4}} = \frac{a_1 + a_4}{2\sqrt{a_2}}.$$

Отметим, что постоянная $T_\alpha < 0$ связана с учетом подъемной силы рулей. Для идеальной рулевой схемы при $a_5 = 0$ имеем $T_\alpha = 0$. Тогда

$$W_\delta^\alpha(p) = \frac{K_\alpha}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}, \quad (6.5a)$$

т.е. реакция угла атаки на отклонение руля соответствует колебательному звену с масштабом K_α , резонансной частотой $\omega_p = \sqrt{a_2}$ и малым ξ . Типичные значения этих величин $K_\alpha \approx 0,5 + 1$, $f_p \approx 2 + 2$ гц; $\xi = 0,08$.

2. Передаточные функции и динамические характеристики ракеты по угловой скорости корпуса.

Решая систему (6.3) относительно $\dot{\vartheta}$, получаем:

$$\dot{\vartheta} = \left\{ a_4 W_\delta^\alpha(p) + p W_\delta^\alpha(p) + a_5 \right\} \delta_I. \quad (6.7)$$

Для преобразования (6.7) используем выражение для обобщенного параметра K_n , характеризующего отношение подъемной силы, создаваемой за счет отклонения поворотного органа управления, к полной подъемной силе

$$K_n = \frac{a_5}{a_5 + a_4 K_\alpha}. \quad (6.8)$$

Предельные значения K_n соответствуют: $K_n = 0$ — идеальная рулевая схема; $K_n = 1$ — идеальная схема «поворотное крыло». Как следует из (6.8), $K_n = 0$ обеспечивается при $a_5 = 0$, $K_n = 1$ при $K_\alpha a_4 = 0$. Преобразуем (6.8) к виду

$$\frac{K_\alpha a_4}{1 - K_n} = \frac{a_5}{K_n}. \quad (6.9)$$

Из (6.9) следует, что в предельных случаях $K_n = 0$ и $K_n = 1$ равенство (6.9) приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Поскольку предельные случаи в практике не встречаются, вопрос о раскрытии этих неопределенностей большого практического значения не имеет. Однако для целей проведения сквозного анализа во всем диапазоне K_n было бы желательно эти пределы уметь определять. Из (6.9) можно получить

$$\lim_{K_n \rightarrow 0} \left[\frac{a_5}{K_n} \right] = K_\alpha a_4; \quad \lim_{K_n \rightarrow 1} \left[\frac{K_\alpha a_4}{1 - K_n} \right] = a_5. \quad (6.10)$$

Эти значения пределов и используются при сквозном анализе. Теперь на основании (6.7) с учетом (6.9) получим

$$\dot{\vartheta} = W_{\delta}^{\dot{\vartheta}}(p) \delta_I, \quad (6.11)$$

где передаточная функция (рис. 6.1, в)

$$W_{\delta}^{\dot{\vartheta}}(p) = \frac{K_{\dot{\vartheta}}(T_{\dot{\vartheta}} p + 1)}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}. \quad (6.12)$$

В (6.12) введены обозначения

$$K_{\dot{\vartheta}} = a_4 \frac{K_\alpha}{1 - K_n}; \quad T_{\dot{\vartheta}} = \frac{1 - K_n}{a_4}. \quad (6.13)$$

Из (6.12) с учетом (6.13) имеем:

а) для идеального крыла $K_n = 1$

$$W_{\delta}^{\dot{\vartheta}}(p) = \frac{a_5}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}. \quad (6.12a)$$

Здесь колебательное звено, с теми же значениями T и ξ ;

б) для идеальной рулевой схемы $K_n = 0$

$$W_{\delta}^{\dot{\vartheta}}(p) = a_4 K_\alpha \frac{\frac{1}{a_4} p + 1}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}. \quad (6.126)$$

Как видим, отличие рулевой схемы от схем поворотного крыла состоит в наличии фазопережающего звена в числителе передаточной функции $W_{\delta}^{\alpha}(p)$ с постоянной времени $T_V^{\alpha} = \frac{1}{a_4}$.

Его следствием при $T_V^{\alpha} > T$ является большое перерегулирование в переходном процессе (первое колебание).

3. Передаточные функции и динамические характеристики ракеты по перегрузке. Используя определение перегрузки $n_y = \frac{V\dot{\Theta}}{g}$ и решая (6.3) относительно $\dot{\Theta}$, имеем (рис. 6.1, з)

$$\begin{aligned} n &= \frac{V}{g} \left[a_4 W_{\delta}^{\alpha}(p) + a_5 \right] \delta_1 = \\ &= \frac{V}{g} a_4 K_{\alpha} \left[\frac{K_n}{1 - K_n} + \frac{T_{\alpha} p + 1}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1} \right]. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Для идеальной рулевой схемы $K_n = 0$

$$W_{\delta}^n(p) = a_4 K_{\alpha} \frac{V}{g} \frac{1}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1} = \frac{V}{g} a_4 W_{\delta}^{\alpha}(p). \quad (6.14a)$$

Для идеальной схемы поворотное крыло $K_n = 1$ получим, раскрывая неопределенность

$$\begin{aligned} W_{\delta}^n(p) &= \frac{V}{g} a_5 \left[1 - \frac{\frac{T}{T_V^{\alpha}} p}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1} \right] = \\ &= K_{\delta} \frac{\tau^2 p^2 + 2\tau\xi_1 p + 1}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}. \end{aligned} \quad (6.14b)$$

Рассмотрим реакцию системы на единичный сигнал. Переходный процесс по n в существенной степени зависит от K_n и имеет вид

$$\bar{n} = 1 - e^{-\xi \bar{t}} \left[(1 - K_n) \cos \sqrt{1 - \xi^2} \bar{t} + \frac{\xi + K_n(\xi - 2\xi_1)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \sqrt{1 - \xi^2} \bar{t} \right]. \quad (6.15)$$

Здесь

$$\xi_1 = \frac{1}{2} a_1 \sqrt{\frac{a_5}{a_2 6 a_5 + a_3 a_4}}; \quad \bar{t} = \frac{t}{T}; \quad \bar{n} = \frac{ng}{a_4 K_\alpha V}.$$

На рис. 6.2 приведена зависимость динамических характеристик ракеты при различных K_n : сдвига фазы по перегрузке в зависимости от $z = \omega t$ (рис. 6.2, а), относительной амплитудно-частотной характеристики по угловой скорости корпуса (рис. 6.2, б), зависимости перегрузки от времени $\bar{t} = \frac{t}{T}$ (рис. 6.2, в); зависимостей φ_n и $\bar{A}_0$ от K_n при $z = 0,75$ (рис. 6.2, г).

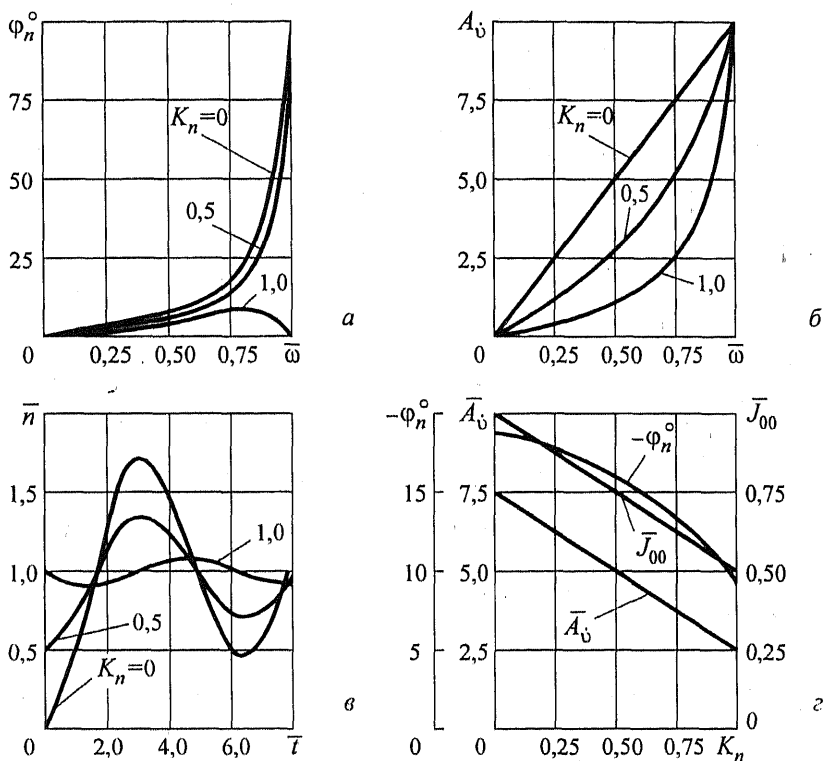


Рис. 6.2

Расчеты выполнены для $\xi = 0,1$; $\xi_1 = 0,05$; $\frac{T^\alpha}{T} = 10$. Как видим, увеличение K_n приводит к улучшению динамических характеристик по перегрузке и ослаблению связи по угловым колебаниям корпуса.

Рассмотрим теперь канал крена. Имеем

$$\dot{\omega}_x + C_1 \omega_x = C_3 \delta_y + \bar{M}_x. \quad (6.16)$$

Здесь введены обозначения (M_x — внешний момент):

$$C_1 = \frac{-1}{J_{xx}} \frac{\partial M_x}{\partial \omega_x}; \quad C_3 = \frac{-1}{J_{xx}} \frac{\partial M_x}{\partial \delta_y}; \quad \bar{M}_x = \frac{-1}{J_{xx}} M_x. \quad (6.17)$$

Уравнение (6.16) в операторной форме

$$(p + C_1) \omega_x = C_3 \delta_y + M_x. \quad (6.18)$$

Решение уравнения (6.18)

$$\omega_x = W_{\delta_y}^{\omega_x}(p) \delta_y + W_{M_x}^{\omega_x}(p) \bar{M}_x. \quad (6.19)$$

Передаточные функции

$$W_{\delta_y}^{\omega_x}(p) = \frac{K_\gamma}{T_\gamma p + 1}; \quad W_{M_x}^{\omega_x}(p) = \frac{1}{J_{xx} C_1} \frac{1}{T_\gamma p + 1}. \quad (6.20)$$

Здесь

$$K_\gamma = \frac{C_3}{C_1}; \quad T_\gamma = \frac{1}{C_1}.$$

Как следует из (6.20), реакция угловой скорости ракеты по крену на отклонение элеронов (внешний момент) соответствует апериодическому звену с масштабом $K_\gamma \left(\frac{1}{C_1 J_{xx}} \right)$ и постоянной времени T_γ . В частности, установившееся значение угловой скорости крена ω_x при постоянных δ_y и M_x будет

$$\omega_x(\infty) = \frac{C_3}{C_3} \delta_a + \frac{1}{C_1 J_{xx}} M_x. \quad (6.21)$$

Рассмотрим недостатки изолированной ракеты как объекта управления. Как показано выше, изолированная ракета имеет следующие недостатки:

1. Высокая колебательность переходных процессов по всем переменным из-за малых значений относительного коэффициента затухания ξ .

2. Возможность статической неустойчивости при отрицательных значениях a_2 .

3. Резкая зависимость параметров передаточных функций от режимов полета (H , M).

4. Зависимость параметров абсолютного движения от внешних возмущений.

Рассмотрим, например, как меняются параметры ξ и T передаточной функции $W_\delta^\alpha(p)$:

а) при $M = \text{const}$ и изменении H от нуля до 30 км они меняются пропорционально $\sqrt{H}$, т.е. в 6,85 раза;

б) при $H = \text{const}$ и изменении числа M от 1 до 4,5 они меняются в 4,5 раза.

Таким образом, совокупное изменение параметров ξ и T составляет более 30 раз. Аналогичным образом могут быть рассмотрены диапазоны изменения параметров и других передаточных функций.

§ 6.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

Трехканальная неустойчивость — обычное затруднение при использовании больших балансировочных углов атаки. Такая неустойчивость, проявляющаяся в виде синхронных расходящихся колебаний относительно всех трех осей ракеты, может иметь место и в том случае, когда анализ движения изолированных каналов продольно-бокового движения и крена формально показывает наличие достаточных запасов устойчивости. Существо проблемы связано с появлением при больших углах атаки перекрестных связей между изолированными каналами ракеты. Ограничимся рассмотрением случая схемы с закреплен-

ными рулями. Целесообразность рассмотрения этого случая связана с возможностью реализации такого режима (работа вблизи механических или электрических ограничений или при малом избытке располагаемого момента привода над потребным).

Система уравнений пространственного движения крестокрылой ракеты с закрепленными рулями может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= -C_1 \omega_x + \boxed{M_x(\alpha, \varphi, \delta_I, \delta_{II})} + M_{x0}; \\ \dot{\omega}_z &= -a_1 \omega_x + M_z(\alpha, \varphi, \delta_I, \delta_{II}) - \boxed{\omega_x \omega_y}; \\ \dot{\omega}_y &= -a_1 \omega_y + M_y(\alpha, \varphi, \delta_I, \delta_{II}) + \boxed{\omega_x \omega_z}; \\ \dot{\alpha}_1 &= -F_y(\alpha, \varphi, \delta_I) + \omega_z - \boxed{\omega_x \alpha_2}; \\ \dot{\alpha}_2 &= -F_z(\alpha, \varphi, \delta_{II}) + \omega_y - \boxed{\omega_x \alpha_2}.\end{aligned}\tag{6.22}$$

Заметим, что система (6.22) обладает свойством симметрии, состоящем в том, что при замене ω_x на $-\omega_x$, α_1 на α_2 , ω_y на ω_z вид уравнений сохраняется. В системе (6.22) члены, взятые в рамку, образуют перекрестные связи.

Система (6.22) получена в предположении, что

- высота и скорость полета фиксированы;
- рассматривается движение на пассивном участке траектории;
- движение происходит в горизонтальной плоскости;
- влияние силы тяжести можно не учитывать;
- рассматривается случай жесткой связи противоположных рулей.

Здесь введены следующие обозначения для перехода к безразмерным аэродинамическим коэффициентам:

$$\begin{aligned}M_x &= m_x M^2 q_1(H) \frac{Sl}{J_{xx}}; \\ M_{y,z} &= m_{y,z} M^2 q_1(H) \frac{Sb}{J_{zz}}; \\ F_{y,z} &= C_{y,z} M \bar{q}_1(H) \frac{S}{m};\end{aligned}\tag{6.23}$$

$$C_1 = m_x^{\bar{\omega}_x} M \bar{q}_1(H) \frac{Sl^2}{J_{xx}};$$

$$a_1 = m_x^{\bar{\omega}_x} M \bar{q}_1(H) \frac{Sb^2}{J_{zz}}.$$

Задача исследования устойчивости балансировочного режима может быть сформулирована следующим образом. Пусть задана пара постоянных значений δ_I и δ_{II} , которой соответствует установившееся движение — частное решение системы (6.23). Набор постоянных α_1^* , α_2^* , ω_x^* , ω_y^* , ω_z^* , соответствующий этому частному решению, называют *балансировочным режимом*.

Под устойчивостью пространственного движения подразумевается устойчивость указанного частного решения — балансировочного режима. Возможны и другие постановки задачи исследования устойчивости пространственного движения. Однако принятая нами постановка согласуется с содержанием летного эксперимента на этапе отработки аэродинамики ракеты и, кроме того, предполагает создание удобного для инженерной практики метода.

Система уравнений в вариациях относительно балансировочного режима согласно (6.22) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= -C_1 \omega_x + \left. \frac{\partial M_x}{\partial \alpha_1} \right|_* \alpha_1 + \left. \frac{\partial M_x}{\partial \alpha_2} \right|_* \alpha^*; \\ \dot{\omega}_z &= -a_1 \omega_z - \left. \frac{\partial M_z}{\partial \alpha_1} \right|_* \alpha_1 + \left. \frac{\partial M_z}{\partial \alpha_2} \right|_* \alpha_2 - \omega_x^* \omega_y - \omega_y^* \omega_x; \\ \dot{\omega}_y &= -a_1 \omega_y - \left. \frac{\partial M_y}{\partial \alpha_1} \right|_* \alpha_1 + \left. \frac{\partial M_y}{\partial \alpha_2} \right|_* \alpha_2 - \omega_x^* \omega_z + \omega_z^* \omega_x; \\ \dot{\alpha}_1 &= - \left. \frac{\partial F_y}{\partial \alpha_1} \right|_* \alpha_1 - \left. \frac{\partial F_y}{\partial \alpha_2} \right|_* \alpha_2 + \omega_z - \omega_x^* \alpha_2 - \alpha_2^* \omega_x; \\ \dot{\alpha}_2 &= - \left. \frac{\partial F_z}{\partial \alpha_1} \right|_* \alpha_1 - \left. \frac{\partial F_z}{\partial \alpha_2} \right|_* \alpha_2 + \omega_y + \omega_x^* \alpha_1 + \alpha_1^* \omega_x, \end{aligned} \quad (6.24)$$

где частные производные берутся при значениях углов атаки, отвечающих балансировочному режиму (α_1^* , α_2^*).

Здесь и далее в отличие от (6.22) α_1 , α_2 , ω_x , ω_y , ω_z обозначают уже не углы и угловые скорости, а их вариации относительно балансировочного режима. Таким образом, исследование устойчивости балансировочного режима для фиксированной δ -конфигурации сведено к исследованию нулевого решения системы (6.24) линейных однородных дифференциальных уравнений пятого порядка с постоянными коэффициентами.

В соответствии с построенной [8] математической моделью запишем следующие выражения для приведенных моментов и сил:

$$\begin{aligned} m_x &= m_{x1}(\alpha, \varphi) - v_x(\alpha) \left[m_{x\delta}(\delta_{II}) \cos \varphi - m_{x\delta}(\delta_I) \sin \varphi \right]; \\ m_z &= m(\alpha, \varphi) \cos \varphi - \bar{m}(\alpha, \varphi) \sin \varphi + m_\delta(\delta_I) v_z(\alpha, \varphi) + \\ &\quad + \bar{m}_\delta(\delta_{II}) \bar{v}_z(\alpha, \varphi); \\ m_y &= m(\alpha, \varphi) \sin \varphi - \bar{m}(\alpha, \varphi) \cos \varphi + m_\delta(\delta_{II}) v_y(\alpha, \varphi) + \\ &\quad + \bar{m}_\delta(\delta_I) \bar{v}_y(\alpha, \varphi); \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$F_y = f(\alpha, \varphi) \cos \varphi + \bar{f}(\alpha, \varphi) \sin \varphi + f_\delta(\delta_I) \mu_y(\alpha, \varphi);$$

$$F_z = f(\alpha, \varphi) \sin \varphi - \bar{f}(\alpha, \varphi) \cos \varphi - f_\delta(\delta_{II}) \mu_z(\alpha, \varphi),$$

где m , $\bar{m}$, f , $\bar{f}$, m_x — функции нуль-конфигураций; m_δ , f_δ , $m_{x\delta}$ — функции эффективности руля первого рода; $\bar{m}_\delta$ — функция эффективности руля второго рода; μ_y , μ_z , v_z , v_y , $\bar{v}_z$ — безразмерные корректирующие функции.

Для функций нуль-конфигурации в составе смешанного полинома будем учитывать главную часть, дополнительно оговаривая в каждом случае учет гармоник более высокого порядка. Для корректирующих функций ограничимся учетом гармоник до второго порядка включительно, что для крестокрылой ракеты приводит к выражениям:

$$\mu_y(\alpha, \varphi) = \mu_0(\alpha) - \mu_2(\alpha) \cos 2\varphi;$$

$$\mu_z(\alpha, \varphi) = \mu_0(\alpha) + \mu_2(\alpha) \cos 2\varphi; \quad (6.26)$$

$$v_y(\alpha, \varphi) = v_0(\alpha) + v_2(\alpha) \cos 2\varphi;$$

$$v_z(\alpha, \varphi) = v_0(\alpha) - v_2(\alpha) \cos 2\varphi.$$

Для углов атаки в баланси́ровочном режиме воспользуемся полярной формой представления:

$$\begin{aligned} \alpha_1^* &= \alpha^* \cos \varphi^*; \\ \alpha_2^* &= \alpha^* \sin \varphi^*. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Далее перейдем от вариаций α_1 , α_2 , ω_y , ω_z к новым переменным u , v , p , q согласно выражениям:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 \cos \varphi^* + \alpha_2 \sin \varphi^*; \\ v &= -\alpha_1 \sin \varphi^* + \alpha_2 \cos \varphi^*; \\ p &= \omega_z \cos \varphi^* + \omega_y \sin \varphi^*; \\ q &= -\omega_z \sin \varphi^* + \omega_y \cos \varphi^*. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Этот переход физически соответствует рассмотрению составляющих векторов, характеризующих движение ракеты в плоскости баланси́ровочного угла атаки (переменные u и p) и в плоскости, ей перпендикулярной (переменные v и q).

Переменная v связана с вариацией угла φ очевидным соотношением $v = \alpha^* \varphi$. Преобразование уравнений (6.24) производится с помощью оператора

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right|_* \alpha_1 + \left. \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right|_* \alpha_2 = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \right|_* u + \frac{1}{\alpha^*} \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \right|_* v.$$

Система дифференциальных уравнений в вариациях относительно новых переменных имеет вид:

$$\dot{u} = B_{uu} u + \left(B_{uv} + \omega_x^* \right) v - p = 0;$$

$$\begin{aligned}
\dot{v} - \left(B_{uu} + \omega_x^* \right) u + B_{vv} v - q - \alpha \omega_x &= 0; \\
\dot{p} + a_1 p + B_{pu} u - B_{pv} v + \omega_x^* q + q^* \omega_x &= 0; \\
\dot{q} + a_1 q + B_{qu} u + B_{qv} v - \omega_x^* p + p^* \omega_x &= 0; \\
\dot{\omega}_x + C_1 \omega_x - B_{xu} u - B_{xv} v &= 0,
\end{aligned} \tag{6.29}$$

где коэффициенты B_{ij} выражаются через значения функций в баланси́ровочном режиме.

Для баланси́ровочных значений угловых скоростей, входящих в (6.29), приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
p^* &= \omega_z^* \cos \varphi + \omega_y^* \sin \varphi; \\
q^* &= -\omega_z^* \sin \varphi + \omega_y^* \cos \varphi,
\end{aligned} \tag{6.30}$$

аналогичные (6.28).

Установившиеся значения переменных, отвечающие баланси́ровочному режиму, являются решением системы нелинейных уравнений, получаемой из (6.22) подстановкой (6.25) и приравниванием правых частей нулю. При известных функциях, входящих в модель (6.25), система алгебраических уравнений должна быть разрешена относительно переменных ω_x , p , q , α , φ для каждой пары заданных отклонений рулей δ_I и δ_{II} . Однако, как видно из структуры уравнений, система проще разрешается относительно переменных ω_x , p , q , δ_I , δ_{II} при заданных α^* и φ^* . Выбирая этот путь, мы тем самым формулируем задачу исследования как отыскание значений углов атаки предельных по устойчивости баланси́ровочного режима. Таким образом, задаваясь значениями α^* и φ^* , мы найдем значения ω_x^* , p^* , q^* , δ_I , δ_{II} , решая систему алгебраических уравнений. Затем, подставляя полученные значения в коэффициенты (B_{ij}) и уравнения системы (6.29), мы выразим все коэффициенты системы уравнений в вариациях через α^* и φ^* . Условия устойчивости последней определяют границу допустимых значений в плоскости параметров α^* , φ^* , (α_1^* , α_2^*).

На рис. 6.3 приведена структурная схема, представляющая полученную систему уравнений в вариациях (6.29) в виде системы регулирования. В схеме можно выделить следующие основные элементы: 1) канал вариации модуля угла атаки, 2) канал вариации фазы угла атаки, 3) канал вариации угловой скорости крена, 4) главную обратную связь, 5) перекрестные связи.

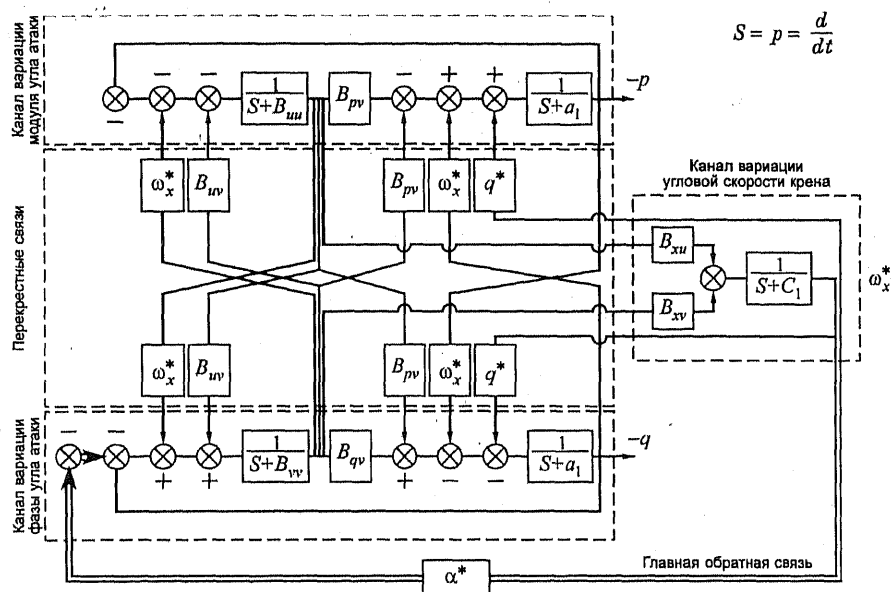


Рис. 6.3

Канал вариации модуля и канал вариации фазы угла атаки имеют идентичную структуру, совпадающую с обычным представлением уравнений плоского движения ракеты в виде уравнений сил и моментов. Однако существенное различие между каналами состоит в том, что в канале вариации модуля сопряжения частота B_{uu} и коэффициент усиления прямого тракта

B_{pv} определяются частными производными функций нуль-конфигурации и корректирующих функций по углу атаки, в то время как в канале вариации фазы эти параметры B_{vv} и B_{qv} определяются соотношением конечных значений тех же функций и угла атаки. Каналы становятся идентичными не только по структуре, но и по параметрам только тогда, когда аэродинамические силы и моменты линейны.

Канал вариации угловой скорости крена связан коэффициентами B_{xu} и B_{xv} с выходами указанных выше каналов, при этом первый из них определяется частными производными функций, определяющих момент крена по углу атаки, второй — отношением конечных значений этих функций к углу атаки.

В составе перекрестных связей можно выделить три группы связей, обусловленных 1) гироскопическими моментами ракеты как твердого тела; 2) вращательными производными вектора скорости; 3) свойствами функций, входящих в модель аэродинамических СиМ. Первые две группы образуют антисимметричные обратные связи и имеют место в тех случаях, когда угловая скорость крена в балансировочном режиме отлична от нуля. Аэродинамические перекрестные связи: прямые с коэффициентами B_{pv} и B_{qu} и обратные с коэффициентами B_{uv} и B_{vu} имеют место при отсутствии круговой симметрии СиМ нуль-конфигурации или при наличии не равных нулю корректирующих функций и, вообще говоря, не являются антисимметричными. Главная обратная связь в схеме охватывает канал вариации фазы угла атаки по сигналу вариации угловой скорости крена и имеет место для любого балансировочного режима с углом атаки, отличным от нуля.

Указанная схема удобней для анализа по сравнению со схемами, основанными на рассмотрении движения в плоскостях исходной системы координат, которые обычно представляют в виде двух полностью идентичных каналов продольно-бокового движения, охваченных обратными связями через канал крена. Удобство заключается, во-первых, в том, что главная обратная связь охватывает только один из основных каналов — канал вариации фазы. Во-вторых, в этой схеме аэродинамические перекрестные связи каналов отсутствуют и при нелинейных аэродинамических характеристиках, если последние обладают круговой симметрией, в то время как для традиционной схемы перекрестные связи в этом случае имеют место.

Построенный таким образом метод анализа устойчивости пространственного движения использует полярную форму представления для установившихся значений углов атаки и декартову форму для вариаций угла атаки в повернутой связанной системе координат. Тем самым используется удобство полярных переменных для выражения аэродинамических сил и моментов и декартовых переменных для образования идентичных каналов регулирования в составе структурной схемы.

В общем случае для произвольной δ -конфигурации исследование устойчивости пространственного движения с помощью уравнений требует применения ЭВМ. Для этой цели может быть использована специальная вычислительная программа, основанная на: 1) вычислении установившихся значений переменных в балансировочном режиме для определения элементов матрицы коэффициентов системы уравнений в вариациях; 2) исследовании устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений по заданной матрице. В первом случае использован алгоритм, основанный на замене задачи решения системы нелинейных алгебраических уравнений задачей отыскания экстремума функций нескольких переменных [27].

Исходная система (6.22) сводится к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} f_1(\delta_I, \delta_{II}) &= 0; \\ f_2(\delta_I, \delta_{II}) &= 0. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Очевидно, что между решениями системы (6.31) и точками, в которых функция $f = f_1^2 + f_2^2$ принимает нулевое значение, имеется взаимно однозначное соответствие. Последние находятся как экстремумы функции методом градиентного спуска (с переменным шагом). Пусть $A_0(\delta_I^0, \delta_{II}^0)$ — начальная точка. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \Phi &= f\left(\delta_I^0 + \chi_1 \frac{\partial f}{\partial \delta_I}; \delta_{II}^0 + \chi_2 \frac{\partial f}{\partial \delta_{II}}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^2 f_i^2\left(\delta_I^0 + \chi_1 \frac{\partial f}{\partial \delta_I}; \delta_{II}^0 + \chi_2 \frac{\partial f}{\partial \delta_{II}}\right) \end{aligned} \quad (6.32)$$

как функцию от χ_1, χ_2 . Здесь все производные вычисляются в точке A_0 . Упростим выражение (6.32), представив слагаемые в первой части степенными полиномами от χ_1, χ_2 в окрестности нуля и ограничимся квадратными членами:

$$\bar{\Phi}(\chi_1, \chi_2) = \left[f_1(\delta_I^0, \delta_{II}^0) + \chi_1 \frac{\partial f}{\partial \delta_I} \frac{\partial f_1}{\partial \delta_I} + \chi_2 \frac{\partial f}{\partial \delta_{II}} \frac{\partial f_1}{\partial \delta_{II}} \right]^2 + \\ + \left[f_2(\delta_I^0, \delta_{II}^0) + \chi_1 \frac{\partial f}{\partial \delta_I} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_I} + \chi_2 \frac{\partial f}{\partial \delta_{II}} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_{II}} \right]^2.$$

В качестве χ_1, χ_2 , определяющих переменный шаг метода, выберем значения, обеспечивающие минимум функции $\Phi(\chi_1, \chi_2)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \chi_1} = \left[f_1(\delta_I^0, \delta_{II}^0) + \chi_1 \frac{\partial f}{\partial \delta_I} \frac{\partial f_1}{\partial \delta_I} + \chi_2 \frac{\partial f}{\partial \delta_{II}} \frac{\partial f_1}{\partial \delta_{II}} \right] \frac{\partial f_1}{\partial \delta_I} \frac{\partial f}{\partial \delta_I} + \\ + \left[f_2(\delta_I^0, \delta_{II}^0) + \chi_1 \frac{\partial f}{\partial \delta_I} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_I} + \chi_2 \frac{\partial f}{\partial \delta_{II}} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_{II}} \right] \frac{\partial f_2}{\partial \delta_I} \frac{\partial f}{\partial \delta_I} = 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \chi_2} = \left[f_1(\delta_I^0, \delta_{II}^0) + \chi_1 \frac{\partial f}{\partial \delta_I} \frac{\partial f_1}{\partial \delta_I} + \chi_2 \frac{\partial f}{\partial \delta_{II}} \frac{\partial f_1}{\partial \delta_{II}} \right] \frac{\partial f_1}{\partial \delta_{II}} \frac{\partial f}{\partial \delta_{II}} + \\ + \left[f_2(\delta_I^0, \delta_{II}^0) + \chi_1 \frac{\partial f}{\partial \delta_I} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_I} + \chi_2 \frac{\partial f}{\partial \delta_{II}} \frac{\partial f_2}{\partial \delta_{II}} \right] \frac{\partial f_2}{\partial \delta_{II}} \frac{\partial f}{\partial \delta_{II}} = 0.$$

Мы получили нелинейную систему относительно χ_1, χ_2 .

Определитель этой системы отличен от нуля, если система (2.31) не вырождена (имеет якобиан, отличный от нуля). Отсюда окончательные формулы метода будут:

$$\delta_{Ik+1} = \delta_{Ik} - \chi_{1k} \frac{\partial f}{\partial \delta_I}(\delta_{Ik}, \delta_{IIk});$$

$$\delta_{IIk+1} = \delta_{IIk} + \chi_{2k} \frac{\partial f}{\partial \delta_{II}}(\delta_{Ik}, \delta_{IIk}); \quad k = 0, 1, \dots$$

Более подробно см. [27].

В блоке анализа устойчивости использован алгоритм, предложенный В.И. Зубовым и основанный на свойстве предела степенной функции от матрицы. Пусть матрица коэффициентов системы уравнений в вариациях есть A , вектор-столбец неизвестных функций x . Тогда система уравнений, записанная в виде $\dot{x} = Ax$ имеет характеристический полином $f(S) = \det |ES - A|$, где E — единичная матрица. Нули полинома $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ есть, вместе с тем, собственные значения матрицы A . Степенной ряд от матрицы A
$$e^A = E + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$
 достаточно быстро сходится. Метод основан на известном факте, что если все собственные значения некоторой матрицы B по модулю меньше единицы, то $\lim_{n \rightarrow \infty} B^n = 0$. Если теперь решения системы дифференциальных уравнений асимптотически устойчивы, то все числа λ_k находятся в левой полуплоскости. Последнее означает, что для всех λ_k величины $|e^{\lambda_k}|$, являющиеся модулями собственных значений матрицы e^A , будут меньше единицы. Поэтому, если составить последовательность матриц $e^A, (e^A)^2, (e^A)^3, \dots$, то члены этой последовательности будут убывать, стремясь к нулю; напротив, если хотя бы одно λ_k находится в правой полуплоскости, то члены последовательности степеней матрицы λ_k будут неограниченно возрастать.

Таким образом, для суждения об устойчивости необходимо ввести в ЭВМ исходную матрицу системы уравнений в вариациях, а затем выполнять последовательное возведение в квадрат матриц, начиная, например, с такой:
$$e^A = E + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \frac{1}{4!} A^4.$$
 После 4—5 шагов следует убедиться либо в том, что элементы матрицы, полученной после последнего возведения в квадрат, близки к нулю — и тогда система устойчива, либо в том, что они весьма велики — и тогда система неустойчива.

Изложенный алгоритм, как показывают расчеты, является наиболее удобным для использования на ЭВМ, достаточно точным и универсальным для применения к ракетам разных компоновок. Блок-схема рис. 6.3 может быть использована как для

исследования балансировочного режима при заданных α^* и φ^* , так и для автоматического получения зависимости $\alpha_{\text{гран}}^*(\varphi^*)$ в виде полярной диаграммы [27]. Для этого схема дополняется блоком «движения по границе». В этот блок вводятся координаты точки $(\alpha_0^*, \varphi_0^*)$, свойства балансировочного режима в которой известны заранее. В качестве примера использования описанной выше программы на рис. 6.4 приведены полученные с помощью ЭВМ для крестокрылой компоновки границы устойчивости балансировочного режима в плоскости па-

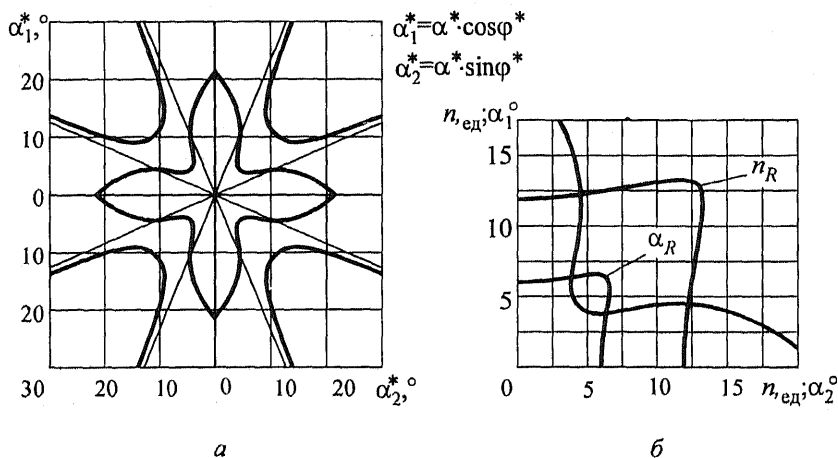


Рис. 6.4

раметров (α_1^*, α_2^*) . Как видим, с увеличением α^* при каждом φ^* имеется сначала переход в область неустойчивости, затем вновь в область устойчивости. Существование последней в этом случае связано с немонотонным характером зависимости $m_x(\alpha)$. Для практического использования имеет смысл только внутренняя из областей устойчивости. Ограничение углов атаки по устойчивости имеется как в плоскостях каналов управления $\left(\varphi^* = 0, \frac{\pi}{2}\right)$, так и в биссекторных плоскостях $\left(\varphi^* = \frac{\pi}{4}\right)$, что

объясняется нелинейностью продольно-бокового момента и значительным моментом крена в указанных условиях. Тот факт, что наименьшее значение $\alpha_{\text{гран}}^*$ имеет место при $\varphi^* = \frac{\pi}{4}$, а наибольшее — при $\varphi^* = 0$, связан со знаком момента крена. Чтобы решить вопрос о том, является ли полученная граница устойчивости приемлемой, необходимо сопоставить найденные допустимые значения углов атаки с максимальными углами, которые могут быть реализованы для каждого φ^* в пределах возможных δ -конфигураций данной компоновки. Значения этих последних углов даются диаграммой располагаемых углов атаки α_R и управляющих сил F_R . Сопоставление диаграммы располагаемых перегрузок (n_R) и углов атаки (α_R) с границей устойчивости приведено на рис. 6.4, б. Как видим, при заданном максимальном угле отклонения руля наибольшие перегрузки и углы атаки могут быть реализованы в биссекторной плоскости, т.е. там, где допустимы наименьшие значения α в балансировочном режиме. Поэтому балансировка в биссекторной плоскости является в большинстве практических случаев расчетным режимом для выбора параметров аэродинамической схемы и ограничений привода рулей крестокрылых ракет. В данном случае, как видно из рис. 6.4, при всех φ^* , обеспечивается неравенство $\alpha_{\text{пред}}^* < \alpha_{\text{гран}}^*$ за исключением φ^* близких к $\frac{\pi}{4}$. Поэтому для этой компоновки при отклонении обоих рулей на максимальный угол может иметь место пространственная неустойчивость.

§ 6.3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАКЕТЫ С ДВУМЯ ПАРАМИ ОРГАНОВ УПРАВЛЕНИЯ

В практике разработки отечественных ракет известны ракеты, имеющие две пары органов управления в каждом из продольно-боковых каналов. Рассмотрим теоретические основы построения такой ракеты [7]. Положим, что ракета имеет два органа управления: поворотные крылья и хвостовые рули. Их углы поворота соответственно δ_1^1 и δ_1^2 . Очевидно, что по отношению к δ_1^1 ракета имеет балансировку, соответствующую схеме

«утка», по отношению к δ_1^2 — балансировку типа нормальной схемы. Это означает, что $K_{\alpha_1} > 0$; $K_{n_1} > 0$; $K_{\alpha_2} < 0$; $K_{n_2} < 0$. Выведем выражения для передаточных функций ракеты с двумя парами органов управления.

Если $\dot{\vartheta}^{(1,2)}$ — составляющие угловой скорости корпуса по каждому из каналов управления, то для линейной системы в силу принципа суперпозиции

$$\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}^{(1)} + \dot{\vartheta}^{(2)}. \quad (6.33)$$

Уравнению (6.33) соответствует структурная схема рис. 6.5, а. Здесь

$$W_{\delta}^{\dot{\vartheta}}(p) = \frac{K_{\dot{\vartheta}_i} (T_{\dot{\vartheta}_i} p + 1)}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}. \quad (6.34)$$

Отметим прежде всего, и это важно, что параметры T и ξ передаточной функции (6.34) являются общими для двух каналов. Параметрами, зависящими от номера канала являются:

$$K_{\dot{\vartheta}_i} = \frac{1}{T_V^\alpha} \frac{K_{\alpha_i}}{1 - K_{n_i}}; \quad (6.35)$$

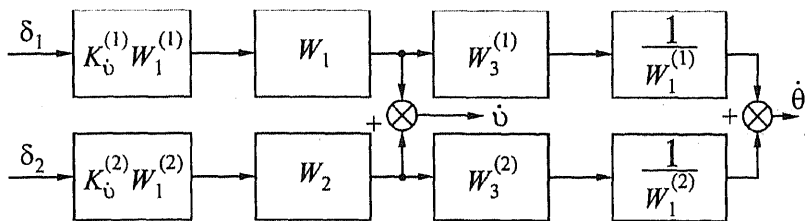
$$T_{\dot{\vartheta}_i} = T_V^\alpha (1 - K_{n_i}); \quad K_{\dot{\vartheta}_i} T_{\dot{\vartheta}_i} = K_{\alpha_i}.$$

Отметим, что параметр T_V^α — также общий для двух каналов. С учетом отмеченного структурную схему можно преобразовать к виду рис. 6.5, б.

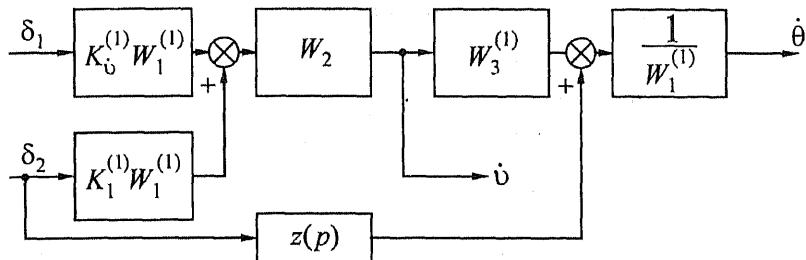
Установим следующую связь между законами управления органами:

$$\delta_2(p) = -W_{\delta_1^2}^{\delta_2}(p) \delta_1(p). \quad (6.36)$$

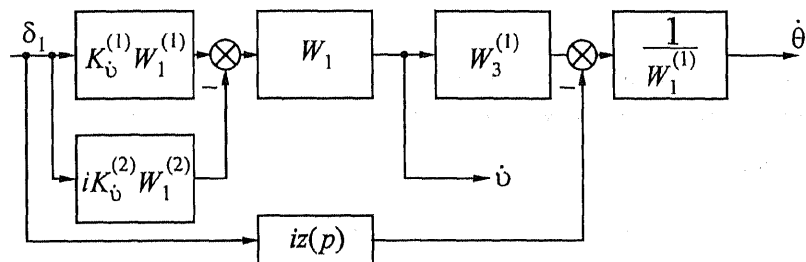
Закон (6.36) является достаточно общим и позволяет формировать различные схемы для ракеты с двумя органами управления. В целях упрощения исследования далее ограничимся простейшей формой закона, положив



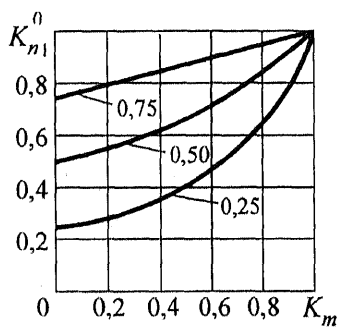
a



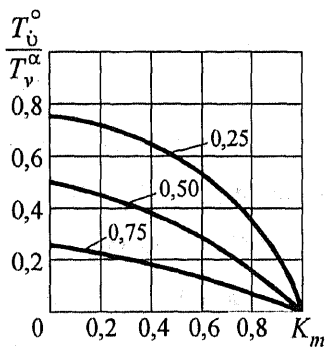
б



в



z



д

Рис. 6.5

$$W_{\delta_1}^{\delta_2}(p) = i. \quad (6.37)$$

Здесь i — передаточное число. С учетом (6.37) уравнение (6.36) приводится к виду

$$\delta_2 = -i \delta_1. \quad (6.38)$$

Структурная схема, соответствующая (6.37), представлена на рис. 6.5, в. Здесь введены обозначения:

$$K_{\delta}^* = K_{\delta_1} \left[1 - K_m \frac{1 - K_{n_1}}{1 - K_{n_2}} \right];$$

$$T_{\delta} = T_{\delta_1} \frac{\frac{1 - K_m}{1 - K_m} \frac{1 - K_{n_1}}{1 - K_{n_2}}}{1 - K_m \frac{1 - K_{n_1}}{1 - K_{n_2}}}; \quad K_m = i \frac{K_{\alpha_2}}{K_{\alpha_1}}. \quad (6.39)$$

Далее рассмотрим случай, когда второй контур построен по идеальной рулевой схеме ($K_{n_2} = 0$). Тогда выражения (6.39) примут вид

$$K_{\delta}^* = K_{\delta_1} \left[1 - K_m (1 - K_{n_1}) \right];$$

$$T_{\delta}^* = T_{\delta_1} \frac{1 - K_m}{1 - K_m (1 - K_{n_1})}; \quad K_n^* = \frac{K_{n_1}}{1 - K_m (1 - K_{n_1})}. \quad (6.40)$$

Из (6.40) следует, что изменяя K_m , можем управлять величинами K_{δ}^* и T_{δ}^* . Например, полагая $K_m = 0$ (компенсация отсутствует), получаем $T_{\delta}^* = T_{\delta_1}$; $K_{\delta}^* = K_{\delta_1}$; полагая $K_m = 1$ (случай полной компенсации), получаем $T_{\delta}^* = 0$; $K_{\delta}^* = K_{\delta_1}$, $K_{n_1} = a_5$. Как видим, в случае полной компенсации можно обеспечить $T_{\delta}^* = 0$, что эквивалентно идеальному поворотному кры-

лу. Этот важный результат связан с увеличением эффективного значения K_n^* . Из третьего равенства (6.40) следует:

$$K_n^* = \begin{cases} K_{n_1} & \text{при } K_m = 0; \\ 1 & \text{при } K_m = 1. \end{cases} \quad (6.41)$$

На рис. 6.5, а приведены зависимости K_n^* от K_m , рассчитанные для $K_{n_1} = 0,25; 0,5; 0,75$. Аналогичный результат имеет место и по отношению к зависимости $T_{\dot{\delta}}$. На рис. 6.5, б приведена зависимость $T_{\dot{\delta}}$ от K_m .

Передаточная функция $W_{\dot{\delta}}(p)$ при $K_n^* = 1$ имеет вид

$$\left[W_{\dot{\delta}} \right]_{K_n^*=1} = a_5 \left[\frac{\frac{T}{T} \alpha p}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1} \right]. \quad (6.42)$$

Итак, в ракете с двумя органами управления можно при произвольном K_{n_1} обеспечить эффективное значение $K_{n1}^* = 1$, т.е. получить высокие динамические характеристики и отсутствие паразитной связи по угловым колебаниям корпуса.

Глава 7. РАСШИРЕННЫЙ ОБЪЕКТ

§ 7.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РУЛЕВОГО ПРИВОДА И ЕЕ АНАЛИЗ

С точки зрения СУ рулевые приводы являются исполнительным устройством, перемещающим органы управления в соответствии с управляющими сигналами. Используемые в настоящее время рулевые приводы построены по схеме замкнутой следящей системы. Входным сигналом этой системы является заданный угол поворота руля $\delta_{\text{зад}}$, выходным — отработанное значение угла поворота δ , причем выходной сигнал «следит» за входным с некоторой ошибкой ε .

$$\varepsilon = \delta_{\text{зад}} - \delta, \quad (7.1)$$

называемой углом рассогласования.

В прямом тракте этой системы имеется передаточная функция $W(p)$. Естественно, что структура этой передаточной функции зависит от его типа (электрический, гидравлический, пневматический, газовый и др. приводы), конструктивных особенностей и схемы управления. Нашей целью является создание универсальной модели.

Универсальная структурная схема привода включает (рис. 7.1, а) исполнительный двигатель ИД, усилительное устройство УУ, датчик обратной связи ДОС. На этапе выбора привода к его выходным характеристикам предъявляются следующие требования, вытекающие из анализа характеристик ракеты как объекта управления:

1. Максимальный угол $\delta_{\max}$ отклонения органов управления.
2. Максимальная угловая скорость $\dot{\delta}_{\max}$ органов управления.
3. Точность $\epsilon_{\text{уст}}$ отработки заданного угла отклонения (ошибка рассогласования).
4. Располагаемый момент $M_{\text{дв}}$ двигателя.
5. Фазовое запаздывание $\Delta\varphi(f_k)$ на контрольной частоте.

Типовые значения указанных характеристик для современных ракет: 1) $\delta_{\max}=30^\circ$; 2) $\dot{\delta}_{\max}=300^\circ/\text{с}$, 3) $\epsilon_{\text{уст}}=1^\circ$; 4) $M_{\text{дв}}=(5 \div 25)$ кгс·м (в зависимости от типа ракеты и схемы балансировки); 5) $\Delta\varphi \leq 20^\circ$ на $f_k=10$ Гц.

Указанные требования с достаточной полнотой определяют статические и динамические характеристики привода и относятся ко всем типам приводов. Используемая ниже терминология в наибольшей степени соответствует электроприводу, работающему в генераторном режиме.

Механической характеристикой ИД называется зависимость угловой скорости $\Omega_{\text{дв}}$ от вращающего момента $M_{\text{дв}}$ при постоянном значении на обмотке якоря, т.е.

$$\Omega_{\text{дв}} = f(M_{\text{дв}}) \quad \text{при} \quad U_{\text{дв}} = \text{const.}$$

Регулировочной характеристикой называется зависимость угловой скорости от напряжения $U_{\text{дв}}$ при постоянном значении

вращающего момента (в статическом режиме момент двигателя равен моменту нагрузки).

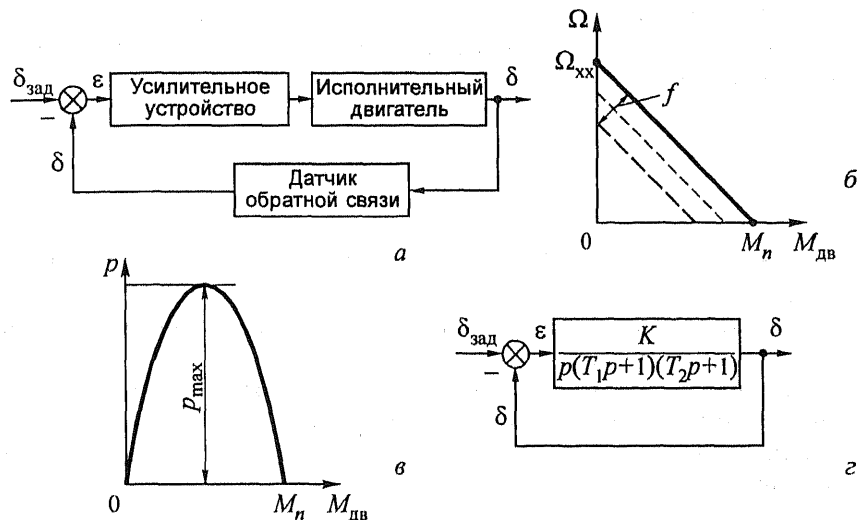


Рис. 7.1

Выражение для механической характеристики имеет вид

$$\Omega_{\text{дв}} = \Omega_{xx} = \frac{1}{f_{\text{дв}}} M_{\text{дв}}, \quad (7.2)$$

где Ω_{xx} — угловая скорость двигателя в режиме идеального холостого хода; M_n — пусковой момент; $f_{\text{дв}}$ — жесткость механической характеристики.

Статические характеристики приведены на рис. 7.1, б.

На основе (7.2) определим мощность на валу двигателя

$$P = M_{\text{дв}} \Omega_{\text{дв}} = \Omega_{xx} M_{\text{дв}} - \frac{1}{f_{\text{дв}}} M_{\text{дв}}^2. \quad (7.3)$$

Отсюда следует, что $P = 0$ как при $M_{\text{дв}} = 0$, так при $\Omega_{\text{дв}} = 0$. Зависимость $P = f(M_{\text{дв}})$ приведена на рис. 7.1, в. Максимальную мощность определим из условия $\frac{\partial P}{\partial M_{\text{дв}}} = 0$. Имеем

$$P_{\max} = \frac{1}{4} \Omega_{xx} M_{\Pi}. \quad (7.4)$$

Динамические характеристики привода определяются структурой его передаточной функции $W(p)$, которую для универсальной математической модели примем в виде

$$W(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}. \quad (7.5)$$

Здесь K — коэффициент усиления, или «добротность» привода; T_1, T_2 — постоянные времени, которые мы не отождествляем с конкретными элементами привода и которые могут рассматриваться как аппроксимации.

Наличие в передаточной функции (7.5) интегрирующего звена означает, что ИД, нагруженный только инерционной нагрузкой, сообщает следящему приводу свойство *астатизма первого порядка*.

Отметим, что появление составляющей нагрузки, зависящей от угла поворота выходного вала приводит к исчезновению интегрирующих свойств ИД.

Математическая модель следящего привода с учетом (7.5) имеет вид, представленный на рис. 7.1, з. Передаточная функция замкнутого следящего привода имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{1}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + K}. \quad (7.6)$$

Отметим, что из выражения (7.6) следует основное преимущество замкнутой системы над разомкнутой

$$\lim_{W(p) \rightarrow \infty} \Phi(p) = 1.$$

Найдем еще передаточную функцию замкнутой системы по ошибке

$$\Phi(p) = \frac{\delta(p)}{\delta_{\text{зад}}(p)} = \frac{\delta_{\text{зад}}(p) - \varepsilon(p)}{\delta_{\text{зад}}(p)} = 1 - \Phi_{\Sigma}(p),$$

отсюда

$$\Phi_{\Sigma}(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{1}{1 + W(p)}. \quad (7.7)$$

Проведем теперь анализ математической модели (ММ) следящего привода. Как следует из (7.5), основным параметром привода является его добротность K . При ее выборе необходимо удовлетворять требования по точности и устойчивости замкнутой системы, к рассмотрению которых и перейдем.

1. *Точность следящего привода* в установившемся режиме с учетом (7.7) можно записать как

$$\varepsilon(p) = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + K} \dot{\delta}_{\max}. \quad (7.8)$$

В установившемся режиме ($p = 0$) имеем

$$\varepsilon_{\text{уст}} = \frac{\dot{\delta}_{\max}}{K}. \quad (7.9)$$

Таким образом, для уменьшения статической ошибки по скорости (аналогично по моменту) необходимо увеличивать добротность. Требуемое ее значение определим из условия $\dot{\delta}_{\max} = 300^\circ/\text{с}$, $\varepsilon_{\text{уст}} = 1^\circ$. Имеем

$$K^{**} = \frac{\dot{\delta}_{\max}}{\varepsilon_{\text{уст}}} = 300 \frac{1}{\text{с}}. \quad (7.10)$$

Итак, для обеспечения заданной точности необходимо обеспечить (7.10). Этому обычно препятствуют условия устойчивости систем.

2. *Устойчивость следящего привода.* Знаменатель передаточной функции замкнутой системы есть характеристический полином, который в рассматриваемом случае имеет вид:

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0, \quad (7.11)$$

где

$$a_0 = K; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = T_1 + T_2; \quad a_3 = T_1 T_2.$$

Исследование устойчивости проведем на основе критерия Гурвица $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$. Откуда

$$T_1 + T_2 - T_1 T_2 K > 0. \quad (7.12)$$

Максимальное значение добротности, при котором обеспечивается условие (7.12), есть

$$K < K^* = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}. \quad (7.13)$$

Пусть $T_1 = 0,04$; $T_2 = 0,02$, тогда из (7.12) получим

$$\dot{K}^* = 75 \frac{1}{c}. \quad (7.14)$$

Таким образом, устойчивость систем обеспечивается лишь при $K < K^*$, в то время как требуемая точность при $K > K^{**}$. Указанное противоречие является основным содержанием процесса проектирования замкнутой системы привода.

Возможный путь ликвидации указанного противоречия состоит в введении стабилизирующих связей. Рассмотрим, например, вместо (7.5) передаточную функцию разомкнутой системы вида

$$W(p) = \frac{K(\tau p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad (7.15)$$

отличающуюся от (7.5) наличием форсирующего звена $(\tau p + 1)$ в числителе. Используя критерий Гурвица, получим вместо (7.13)

$$K \leq K^* = \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \frac{1}{1 - \tau}. \quad (7.16)$$

Здесь $\bar{\tau} = \tau \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$. Из (7.16) получим:

$$K^* = 75 \text{ при } \bar{\tau} = 0; \quad K^* = 150 \text{ при } \bar{\tau} = 0,5;$$

$$K^* = 300 \text{ при } \bar{\tau} = 0,75; \quad K^* = \infty \text{ при } \bar{\tau} = 1.$$

Таким образом, введение стабилизирующей связи с $\bar{\tau} = 0,75$ позволяет ликвидировать противоречие между точностью и устойчивостью.

§ 7.2. АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СЛЕДЯЩЕГО РУЛЕВОГО ПРИВОДА НА ОСНОВЕ ДИАГРАММЫ ВЫШНЕГРАДСКОГО

Учитывая особую важность характеристического уравнения третьего порядка, вернемся к уравнению (7.11) и приведем его к нормированному виду. С этой целью разделим все члены на a_0 и введем новую (комплексную) переменную:

$$q = p \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}} = \frac{p}{\Omega_0}. \quad (7.17)$$

Здесь $\Omega_0 = \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}} = \sqrt[3]{p_1 p_2 p_3}$ — среднегеометрический корень. В результате получим нормированное уравнение

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0, \quad (7.18)$$

где введены параметры Вышнеградского [25]:

$$A = \frac{a_2 \Omega_0^2}{a_0} = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_3^2 a_0}}; \quad B = \frac{a_1 \Omega_0^2}{a_0} = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_3 a_0^2}}. \quad (7.18a)$$

Преимущество (7.18) по сравнению с (7.11) состоит в том, что оно зависит от двух (вместо четырех) переменных, т.е. допускает рассмотрение на плоскости этих параметров (см. рис. 7.2, а). Условие устойчивости записывается в виде

$$A > 0; \quad B > 0; \quad AB > 1. \quad (7.19)$$

Граница колебательной устойчивости $AB = 1$ есть равнобокая гипербола с асимптотами: оси OA и OB . Область устойчивости располагается выше гиперболы. Разобьем область устойчивости на части, соответствующие различному расположению корней.

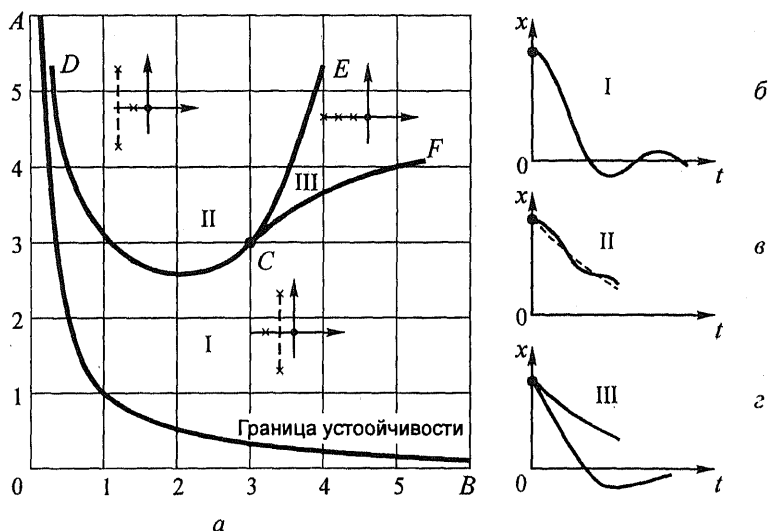


Рис. 7.2

В точке C , где $A = B = 3$, уравнение (7.18) принимает вид $(q + 1)^3 = 0$, следовательно, $q_1, q_2, q_3 = -1$ и на основе (7.17) $p_1 = p_2 = p_3 = \Omega_0$.

На рис. 7.2, а приведено разбиение области устойчивости на три подобласти:

1) в подобласти I один корень вещественный, два — комплексных сопряженных, причем вещественный корень расположен дальше от мнимой оси;

2) в подобласти II также один корня вещественный и два комплексно-сопряженных причем вещественный корень расположен ближе к мнимой оси;

3) в подобласти III все корни вещественные. Граница между этими случаями определяется равенством нулю дискриминанта D уравнения (7.18):

$$A^2 B^2 - 4(A^3 + B^3) - 18AB - 27 = 0.$$

Это уравнение дает на плоскости A, B две кривые: CE и CF . Граница между случаями $D > 0$ и $D < 0$ соответствует кри-

вой, когда все три корня лежат на одной прямой, параллельной оси j и определяются уравнением

$$A^3 - 9AB + 27 = 0.$$

Характер переходных процессов в областях I, II, III приведен на рис. 7.2, б—г. Диаграмма Вышнеградского получила дальнейшее развитие [25]. Обычно на нее наносят линии равных значений устойчивости, затухания, интегральной оценки.

§ 7.3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ КОНТУРОВ ДЕМПФИРОВАНИЯ РАКЕТЫ С УЧЕТОМ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ПРИВОДА

В качестве примера влияния передаточной функции замкнутого следящего привода рассмотрим проблему устойчивости контуров демпфирования по основному каналу и каналу крена.

Ограничиваясь рассмотрением случая вещественных корней передаточной функции привода, возьмем ее в виде

$$\Phi_{\delta_{\text{зад}}}^{\delta}(p) = \frac{1}{(\tau p + 1)^k} \quad (7.20)$$

Здесь k — степень двучлена знаменателя, $k = 0, 1, 2$.

Очевидно, что $k = 0$ соответствует $\Phi(p) = 1$, т.е. привод безинерционный.

Начнем с рассмотрения контура демпфирования по основному каналу. Передаточную функцию ракеты от δ к $\dot{\delta}$ возьмем в виде ($K_n = 0$):

$$W_{\delta}^{\dot{\delta}}(p) = a_4 K_{\alpha} \frac{T_V^{\alpha} p + 1}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}. \quad (7.21)$$

Система уравнений, подлежащая исследованию на устойчивость, на основании (7.21) и (7.20) приводится к виду

$$\begin{aligned} (T^2 p^2 + 2T\xi p + 1) \dot{\delta}(p) &= a_4 K_{\alpha} (T_V^{\alpha} p + 1) \delta(p); \\ \delta(p) &= \frac{1}{(\tau p + 1)^k} \delta_{\text{зад}} = - \frac{k_0}{(\tau p + 1)^k} \dot{\delta}(p). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Характеристическое уравнение системы (7.22) есть

$$T^2 p^2 + 2T\xi p + k_0 k_\alpha a_4 \left(T_V^\alpha p + 1 \right) \frac{1}{(\tau p + 1)^k} = 0. \quad (7.23)$$

Рассмотрение устойчивости характеристического уравнения (7.23) проведем последовательно, увеличивая значение степени двучлена k .

1) $k = 0$, привод безинерционный. Имеем

$$T^2 p^2 + p \left(2T\xi + k_\alpha k_0 \right) + 1 + k_0 k_\alpha a_4 = 0. \quad (7.23a)$$

Поскольку, как следует из (7.23 а) все коэффициенты второй степени положительные, то проблема устойчивости здесь не возникает и k_0 может быть взят любым;

2) $k = 1$, привод — аperiodическое звено. Имеем

$$\left(T^2 p^2 + 2T\xi p + 1 \right) (\tau p + 1) + k_0 k_\alpha a_4 \left(T_V^\alpha p + 1 \right) = 0 \quad (7.23б)$$

или

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0,$$

$$a_3 = \tau T^2; \quad a_2 = 2T\xi \tau + T^2; \quad a_1 = \tau + 2T\xi + k_0 k_\alpha;$$

$$a_0 = 1 + \frac{k_0 k_\alpha}{T_V^\alpha}.$$

Условие устойчивости (критерий Гурвица) дает

$$k_0 k_\alpha \left(1 - \frac{\tau}{T_V^\alpha} \right) > 0.$$

Это условие выполняется при любом k_0 и при $\frac{\tau}{T_V^\alpha} < 1$. Таким образом, и в этом случае проблема устойчивости не возникает;

3) $k = 2$, привод — звено второго порядка. Имеем

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0,$$

$$a_4 = T^2 \tau^2; \quad a_3 = 2\tau T^2 + 2T\xi\tau_0^2; \quad a_2 = T^2 + \tau^2 + 2T\xi\tau \cdot 2\tau;$$

$$a_1 = 2\tau + 2T\xi + k_0 k_\alpha; \quad a_0 = 1 + \frac{k_0 k_\alpha}{T^\alpha_V}. \quad (7.23в)$$

Условие Гурвица для уравнения четвертой степени имеет вид

$$\Delta_3 = a_1(a_3 a_2 - a_4 a_1) - a_0 a_3^2 > 0.$$

Полагая далее $\xi = 0$ и $a_4 = 1$ получим условие устойчивости в виде

$$k_0 < \frac{2T}{k_\alpha} \left(\frac{T}{\tau} - \frac{\tau^2}{T} \right).$$

Введем $\bar{k}_0 = \frac{k_\alpha}{2T} k_0$; $\bar{\tau} = \frac{\tau}{T}$, тогда

$$\bar{k}_0 < \frac{1}{\bar{\tau}} - \bar{\tau}. \quad (7.24)$$

Как видим, область устойчивости имеет ограничение: при данном $\bar{\tau}$ величина $\bar{k}_0$ ограничена. Например, при $\bar{\tau} = 0,5$ коэффициент $\bar{k}_0$ должен быть меньше 1.

Перейдем теперь к анализу устойчивости контура демпфирования канала крена. Имеем

$$(T_\gamma p + 1) \dot{\gamma} = k_\gamma \delta_a;$$

$$\delta_a = - \frac{k_0}{(\tau p + 1)^k} \dot{\gamma}. \quad (7.25)$$

Учитывая результаты исследования устойчивости контура демпфирования основного канала, ограничимся рассмотрением случая $k = 2$. Из (7.25) имеем характеристическое уравнение

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0,$$

$$a_3 = T_\gamma \tau^2; \quad a_2 = T^2 + 2\tau T_\gamma; \quad a_1 = T_\gamma + 2\tau; \quad (7.26)$$

$$a_0 = 1 + k_0 k_\gamma.$$

Используя условие Гурвица, получим

$$k_0 < \frac{2}{k_\gamma} \frac{(1+z)^2}{z}, \quad z = \frac{T_\gamma}{\tau}. \quad (7.27)$$

Таким образом, и в этом случае коэффициент k_0 ограничен.

§ 7.4. РАСШИРЕННЫЙ ОБЪЕКТ С ПРИВОДОМ, ЗАМКНУТЫМ ПО ШАРНИРНОМУ МОМЕНТУ

До сих пор мы рассматривали привод с позиционной обратной связью, используемой в большинстве ракет рассматриваемого типа. Имеются, однако, ракеты, в которых используется привод, замкнутый по шарнирному моменту [7]. Линеаризованные уравнения плоского движения ракеты идеальной рулевой схемы ($k_n = 0$) возьмем в виде

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_z + a_1 \omega_z + a_2 \alpha_1 &= a_3 \delta_I; \\ \dot{\alpha} + a_4 \alpha &= \omega_z; \\ \dot{\delta} &= k [M_y - M_{III}]; \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$M_{III} = M_{III}^\alpha \alpha + M_{III}^\delta \delta.$$

Здесь M_y — управляющий момент; M_{III} — момент нагрузки (шарнирный момент).

Суммирование составляющих шарнирного момента означает, что рассматривается ракета схемы «утка». В соответствии с третьим уравнением (7.28) угловая скорость руля — $\dot{\delta}$ пропорциональна разности моментов.

Структурная схема основного канала ракеты представлена на рис. 7.3, а. Условие устойчивости (7.28) имеет вид

$$k < k^* \cup k > k^{**}, \quad (7.29)$$

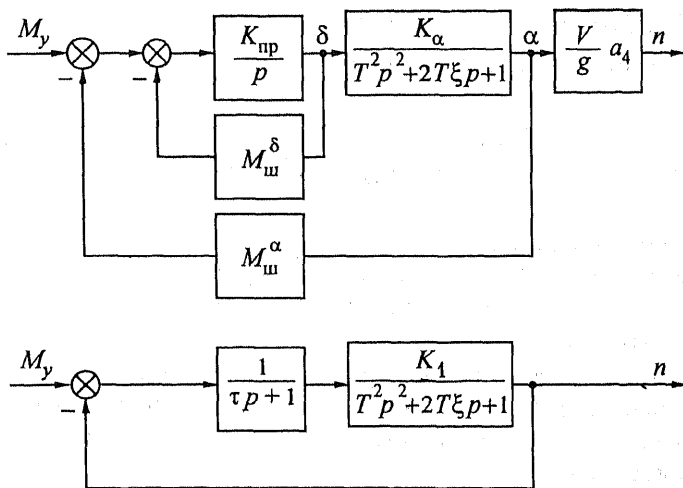


Рис. 7.3

где k^* и k^{**} — соответственно меньший и больший корни квадратного уравнения.

$$\begin{aligned} & \left(a_1 + a_4 + M_{ш}^\delta K \right) \left[\left(a_1 + a_4 \right) M_{ш}^\delta K + a_2 + a_1 a_4 \right] = \\ & = \left[\left(a_2 + a_1 a_4 \right) M_{ш}^\delta + a_3 M_{ш}^\alpha \right] K, \end{aligned} \quad (7.30)$$

отвечающего условию Гурвица.

Интересен случай малой добротности $k < k^*$. В этом случае на уровне РО удастся получить динамические свойства, приемлемые для использования в СУ без дополнительных цепей стабилизации. При достаточно большом запасе статической устойчивости $a_2 > a_1 + a_4$ имеем

$$k^* = \frac{a_2}{a_3} \frac{1}{M_{ш}^\alpha} \left(a_1 + a_4 \right). \quad (7.31)$$

Как видим, допустимая добротность привода определяется геометрическими параметрами компоновки, площадью и формой руля (через a_3 и $M_{ш}^\alpha$), площадью и расположением крыла (через

a_2). При соблюдении условия (7.31) удается получить РО с отношением перегрузки к сигналу

$$\frac{n}{M_{\text{зад}}} = \frac{a_3 a_4 v}{\left(a_2 M_{\text{ш}}^{\delta} + a_3 M_{\text{ш}}^{\alpha} \right) g}, \quad (7.32)$$

практически не зависящим от скоростного напора, что позволяет обеспечить стабильность свойств ракеты в широких условиях полета и простое ограничение перегрузки уровнем входного сигнала.

Рассмотренное техническое решение реализовано в зарубежных и отечественных ракетах и является примером безавтоматической ракеты (крен здесь демпфируется с помощью механических ролеронов).

Рассмотрим более подробно характеристики привода. С этой целью преобразуем структурную схему привода к виду, представленному на рис. 7.3, б. Здесь обозначено $\tau = \frac{1}{K_{\text{пр}} M_{\text{ш}}^{\delta}}$;

$K_1 = K_{\alpha} \frac{M_{\text{ш}}^{\alpha}}{M_{\text{ш}}^{\delta}}$. При $K_{\text{пр}} = 15 \frac{\text{град}}{\text{кгмс}}$ величина τ в зависимости от режима полета изменяется от 0,1 с ($H = 0$; $M = 1,25$) до 0,6 с ($H = 18$ км, $M = 3$). Сопрягающие частоты $\omega_1 = \frac{1}{\tau}$ от 10 до $1,65 \frac{1}{\text{с}}$. Отметим, что частота ракеты $\omega_2 = \frac{1}{T}$ при этом изменяется от 44 до 23, а их разность $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ от 4,5 до 14. Наиболее тяжелый режим есть режим q_{max} , где разность частот минимален. В связи с этим для повышения устойчивости необходимо увеличивать ω_2 и уменьшать ω_1 . Отметим, что эти выводы получены без учета запаздывания в нарастании давления под поршнем τ_1 . Для оценки можно считать, что учет этого эквивалентен переходу от τ к $\tau + \tau_1$, т.е. учет τ_1 является полезным.

Глава 8. МОДЕЛЬ КОНТУРА СТАБИЛИЗАЦИИ

§ 8.1. СТАБИЛИЗИРУЮЩИЕ СВЯЗИ И СТРУКТУРА КС

Выше указывалось (§ 6.1), что изолированная ракета обладает рядом недостатков, преодоление которых является основной задачей КС и реализующей его аппаратуры (автопилот, ИСУ).

Недостатки изолированной ракеты, связанные с высокой колебательностью переходного процесса и возможностью статической неустойчивости ракеты на отдельных режимах полета, могут быть преодолены за счет использования обратных стабилизирующих связей. Основную идею введения этих связей проследим на плоских уравнениях движения ракеты по основным каналам и каналу крена.

Рассмотрим уравнение движения по основному каналу:

$$\dot{\omega}_z + a_1 \omega_z + a_2 \alpha_1 = a_3 \delta_I. \quad (8.1)$$

Как уже указывалось выше, высокая колебательность, приводящая к затяжному переходному процессу, связана с малостью естественного демпфирования, т.е. с малым значением коэффициента a_1 в уравнения (8.1).

С целью устранения этого недостатка подадим на рули наряду с управляющим сигналом u стабилизирующую добавку, пропорциональную угловой скорости корпуса ω_z , т.е. положим

$$\delta_I = u - K_0 \omega_z. \quad (8.2)$$

Подставляя (8.2) в (8.1), получаем

$$\dot{\omega}_z + a_1^* \omega_z + a_2 \alpha_1 = a_3 u; \quad a_1^* = a_1 + K_0 a_3. \quad (8.3)$$

Таким образом, стабилизирующая связь по ω_z (аналогично по ω_y) позволяет исправить первый недостаток изолированной ракеты — ликвидировать ее высокую колебательность.

Рассмотрим теперь, как может быть преодолен второй недостаток изолированной ракеты. С этой целью подадим на рули наряду с управляющим сигналом u стабилизирующую добавку, пропорциональную каналному углу атаки α_1 , т.е. положим

$$\delta_1 = u - K_1 \alpha_1. \quad (8.4)$$

Подставляя (8.4) в (8.1), получаем

$$\dot{\omega}_z + a_1 \omega_z + a_2^* \alpha_1 = a_3 u; \quad a_2^* = a_2 + K_1 a_3. \quad (8.5)$$

Таким образом, стабилизирующая связь по α_1 (аналогично по α_2) позволяет исправить второй недостаток изолированной ракеты — ликвидировать ее статическую неустойчивость.

Объединяя законы (8.2) и (8.4), получаем

$$\dot{\omega}_z + a_1^* \omega_z + a_2^* \alpha_1 = a_3 \delta_1. \quad (8.6)$$

Таким образом, если на борту ракеты имеется информация о параметрах движения ω_z , ω_y и α_1 , α_2 , то представляется возможным с помощью обратных стабилизирующих связей по $\omega_{z,y}$ и $\alpha_{1,2}$, существенно смягчить или полностью устранить недостатки 1 и 2 (см. § 6.1). Аналогичным образом в канале крена

$$\dot{\omega}_x + C_1 \omega_x = C_3 \delta_3 \quad (8.7)$$

для ликвидации первого недостатка положим

$$\delta_3 = u - K_\gamma \omega_x, \quad (8.8)$$

подставляя (8.8) в (8.7) получаем

$$\dot{\omega}_x + C_1^* \omega_x = C_3 u; \quad C_1^* = C_1 + K_\gamma C_3. \quad (8.9)$$

Рассмотрим теперь, как может быть получена на борту ракеты информация по $\omega_{x,y,z}$ и $\alpha_{1,2}$. Информация об угловых скоростях $\omega_{x,y,z}$ получается за счет наличия на борту ракеты трех датчиков угловых скоростей (ДУС), представляющих собой двухстепенные гироскопы. Хуже обстоит дело с информацией по составляющим угла атаки. Поскольку на ракетах рассматриваемого класса датчики углов атаки не используются, измерить углы $\alpha_{1,2}$ не представляется возможным.

В ракетах четвертого поколения, имеющих БЦВМ, углы атаки считаются в ИСУ.

В ракетах первых поколений для рулевых схем вместо углов атаки использовались поперечные перегрузки, измеряемые датчиками линейных ускорений (ДЛУ). Действительно, из уравнения сил следует пропорциональность n_y и α_1 . Однако коэффициент пропорциональности

$$n_y = \frac{C_y^\alpha S M^2 q_1(H)}{mg} \alpha_1 \quad (8.10)$$

зависит от режима полета (H, M), что необходимо учитывать. Отметим, что проведенное рассмотрение весьма схематично, так как не учитывает влияние свойств передаточных функций привода и датчиков.

Анализ устойчивости контуров демпфирования с учетом передаточной функции привода был проведен выше в § 7.3. Аналогичный анализ может быть проведен и по отношению к передаточным функциям датчиков. Опыт отработки современных ракет показывает, что к датчикам (ДУС, ДЛУ) должны предъявляться следующие требования:

- собственная частота датчика как колебательного звена должна быть не ниже 80 Гц;
- относительное затухание, обеспечивающее малый фазовый сдвиг, не выше $\xi < 0,1$.

Рассмотрим теперь, как могут быть преодолены третий и четвертый недостатки изолированной ракеты § 6.1. Их преодоление может быть обеспечено за счет выбора структуры КС. Рассмотрим, в частности, КС основных каналов, выполненный по схеме следящей системы по перегрузке. Такой контур широко используется в современных ракетах и ракетах предшествующих поколений, начиная со второго.

Пусть u — управляющий сигнал (в единицах перегрузки); n — боковая перегрузка ракеты; $K W_k(p)$ — передаточная функция корректирующего устройства, тогда закон управления рулями может быть представлен в виде

$$\delta = K W_k(p) (u - n). \quad (8.11)$$

Характеристики КС в существенной мере зависят от вида оператора $W_k(p)$.

Наиболее полное преодоление недостатков изолированной ракеты, связанных со стабилизацией коэффициента передачи и независимостью параметров абсолютного движения ракеты от постоянных возмущений обеспечивается, когда $W_k(p)$ содержит полюс первого порядка в начале координат. В этом случае система оказывается *астатической*, причем ограничение перегрузки осуществляется за счет ограничения управляющего сигнала на входе КС.

В простейшем случае

$$K W_k(p) = \frac{K}{p}. \quad (8.12)$$

Динамические характеристики КС с оператором (8.12) рассматриваются в следующем параграфе.

§ 8.2. ТЕОРИЯ ИДЕАЛИЗИРОВАННОГО КС

Идеализированным будем называть КС, в котором не учитывается динамика движения ракеты относительно центра масс, а также динамика приводов и измерителей. Такая идеализация позволяет получить простые зависимости, связывающие характеристики КС с его параметрами, требованиями и условиями применения.

Характеристики идеализированного КС являются тем верхним пределом, к которому стремятся характеристики реального контура при неограниченном увеличении собственных частот ракеты, привода и измерителей.

Ракету представим передаточными функциями $W_{\delta}^{\dot{\circ}}(p)$ и $W_{\delta}^{\ddot{\circ}}(p)$. Очевидно, что $W_{\delta}^{\ddot{\circ}}(p) = W_{\delta}^{\dot{\circ}}(p) \cdot W_{\dot{\delta}}^{\ddot{\circ}}(p)$. Выражения для этих передаточных функций имеют вид

$$W_{\delta}^{\dot{\circ}}(p) = K_{\dot{\delta}} \frac{\tau^2 p^2 + 2T\xi p + 1}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1};$$

$$W_{\delta}^{\ddot{\circ}}(p) = \frac{\tau_{\ddot{\delta}} p + 1}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}. \quad (8.13)$$

Полагая теперь в (8.13) $T = \tau = 0$, получаем

$$W_{\Theta}^{\dot{\Theta}}(p) = K_{\Theta}; \quad (8.14)$$

$$W_{\delta}^{\dot{\delta}}(p) = T_{\delta}p + 1.$$

На основании равенства (8.14) получим передаточные функции замкнутой системы

$$\Phi_u^n(p) = \frac{1}{T_1 p + 1}; \quad (8.15)$$

$$\bar{\Phi}_u^{\dot{\delta}}(p) = \frac{T_{\dot{\delta}} + 1}{T_1 p + 1}; \quad T_1 = \frac{1}{\kappa K}; \quad \kappa = \frac{V}{g} K_{\Theta}.$$

Переходя к частотным характеристикам, определим: фазовый сдвиг $\varphi_n(\omega)$ по перегрузке, относительную амплитуду по угловым колебаниям корпуса $\bar{A}_{\dot{\delta}}(\omega)$:

$$\varphi_n(\omega) = -\arctg \omega T_1;$$

$$\bar{A}_{\dot{\delta}}(\omega) = \sqrt{\frac{1 + (\omega T_{\dot{\delta}})^2}{1 + (\omega T_1)^2}}. \quad (8.16)$$

Таким образом, частотные характеристики идеализированного астатического КС аналитически связаны с коэффициентом усиления K и условием полета $(T_{\dot{\delta}}, \kappa)$. Требования к КС обычно задаются в виде

$$\varphi_n(\omega_1) \leq \varphi_n^*; \quad \bar{A}_{\dot{\delta}}(\omega_2) \leq \bar{A}_{\dot{\delta}}^*, \quad (8.17)$$

где ω_1 и ω_2 — фиксированные частоты, причем $\omega_1 < \omega_2$. По опыту разработки ряда ракет $f_1 = 0,25$ Гц, $f_2 = 2$ Гц. Используя (8.16), можно для заданных условий и заданном значении коэффициента усиления K определить его характеристики $\varphi_n(\omega_1)$ и $\bar{A}_{\dot{\delta}}(\omega_2)$ — задача анализа, либо при заданных требованиях (8.17) выбрать настройку коэффициента K — задача синтеза. Легко видеть, что, меняя K изменяем одновременно обе характеристики $\varphi_n(\omega_1)$ и $\bar{A}_{\dot{\delta}}(\omega_2)$, причем характер их изменения таков, что улучшение одной из характеристик неизбежно сопровождается ухудшением дру-

гой. Рассмотрим на плоскости характеристик φ_n и $\bar{A}_{\dot{\vartheta}}$ (рис.8.1) кривую, соответствующую переменному K . Полагая в (8.16)

$$\operatorname{arctg} \omega_1 T_1 = \omega_1 T_1; \quad \sqrt{\frac{1 + (\omega_2 T_{\dot{\vartheta}})^2}{1 + (\omega_1 T_1)^2}} = \zeta \frac{T_{\dot{\vartheta}}}{T_1} \quad (\zeta = 0,9)$$

получим

$$\varphi_n(\omega_1) = \bar{A}_{\dot{\vartheta}}(\omega_2) = \zeta \omega_1 T_{\dot{\vartheta}} = C = \text{const.} \quad (8.18)$$

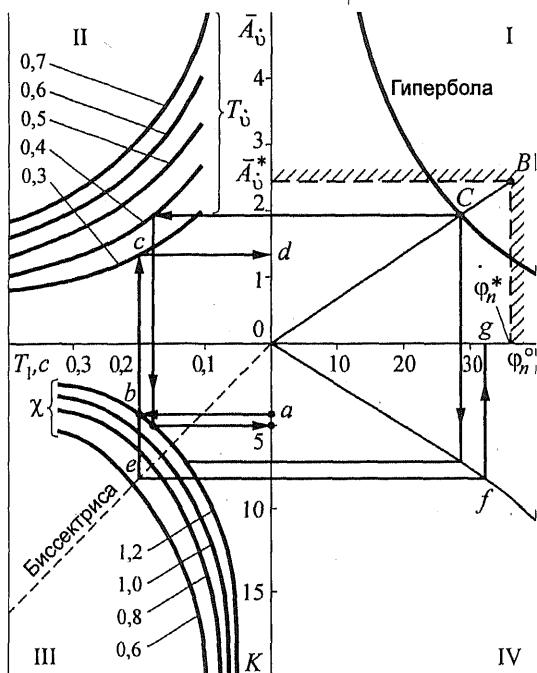


Рис. 8.1

Таким образом, величины $\bar{A}_{\dot{\vartheta}}$ и φ_n связаны гиперболической зависимостью. Отметим, что параметр C однозначно определяется величиной $T_{\dot{\vartheta}}$ и не зависит от величины k . Коэффициент k совместно с K определяет лишь положение точки настрайки на гиперболе.

Рассмотрим более подробно связь между коэффициентом усиления контура K , его характеристиками φ_n и $\bar{A}_{\dot{\vartheta}}$ и условиями применения. Эта связь устанавливается на основе (8.16) и может быть представлена в форме номограммы (рис. 8.1). В первом квадранте номограммы (оси φ_n и $\bar{A}_{\dot{\vartheta}}$) приведена область допустимых значений характеристик, определяемая неравенствами (8.17), а также диагональ ОВ прямоугольника требований. Во втором квадранте номограммы (оси $\bar{A}_{\dot{\vartheta}}$ и T_1) для различных $T_{\dot{\vartheta}}$ приведена зависимость $\bar{A}_{\dot{\vartheta}}(T_1)$. В третьем квадранте диаграммы (оси K и T_1) приведена зависимость $K T_1 = \frac{1}{K}$ для различных K . Там же пунктиром приведена биссектриса квадранта.

В четвертом квадранте диаграммы (оси K и φ_n) приведена зависимость $\varphi_n(T_1)$.

Рассмотрим примеры пользования номограммой.

Пусть режим полета задан. Тогда заданы величины $T_{\dot{\vartheta}}$ и K .

1. *Задача анализа.* Задано значение K , требуется определить характеристики КС φ_n и $\bar{A}_{\dot{\vartheta}}$.

Для определения $\bar{A}_{\dot{\vartheta}}$ проводим ломаную $a-b-c-d$ (точки b и c соответствуют заданным значениям K и $T_{\dot{\vartheta}}$). Искомое значение $\bar{A}_{\dot{\vartheta}}$ соответствует точке d .

Для определения φ_n проводим ломаную $a-b-e-f-g$. Искомое значение φ_n соответствует точке f .

2. *Задача синтеза.* Заданы требования (неравенства (8.17)).

Требуется определить значение K . Задача имеет решение лишь в случае, когда оба требования обеспечиваются с одинаковым запасом $\varepsilon = 1 - \alpha$, где $\alpha = \frac{\bar{A}_{\dot{\vartheta}}}{\bar{A}_{\dot{\vartheta}}^*} = \frac{\varphi_n}{\varphi_n^*}$.

Рассмотрим численный пример анализа характеристик для ракеты идеальной рулевой схемы $K_n = 0$.

Пусть заданы

$$T_{\dot{\vartheta}} = T_V^{\alpha} = 1 \text{ с}, \quad K_{\dot{\vartheta}} = K_{\dot{\alpha}} a = 0,5 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_1 = 1,57 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_2 = 12,5 \text{ с}^{-1}, \quad V = 1000 \text{ м/с}.$$

Вычислим

$$C = \zeta \omega_1 T_{\dot{\vartheta}} = 81^\circ; \quad \bar{A}_{\dot{\vartheta}} = \frac{C}{\varphi_n} = \frac{81}{\varphi_n};$$

$$\kappa = \frac{V}{57,3g} = 1,73 \frac{1}{g}; \quad \varphi_n^\circ = \frac{52}{K}.$$

Отсюда при $K=3$ имеем $\bar{A}_{\dot{\vartheta}} = 4,7$, $\varphi_n = 17^\circ$; при $K=5$: $\bar{A}_{\dot{\vartheta}} = 8,1$, $\varphi_n = 10^\circ$.

Как видим, увеличение K уменьшает φ_n , но увеличивает $\bar{A}_{\dot{\vartheta}}$. Указанное противоречие является основной трудностью формирования КС. Рассмотрим теперь зависимость характеристик φ_n и $\bar{A}_{\dot{\vartheta}}$ на плоскости M и H . Пусть область возможного применения ракеты представляет собой прямоугольник

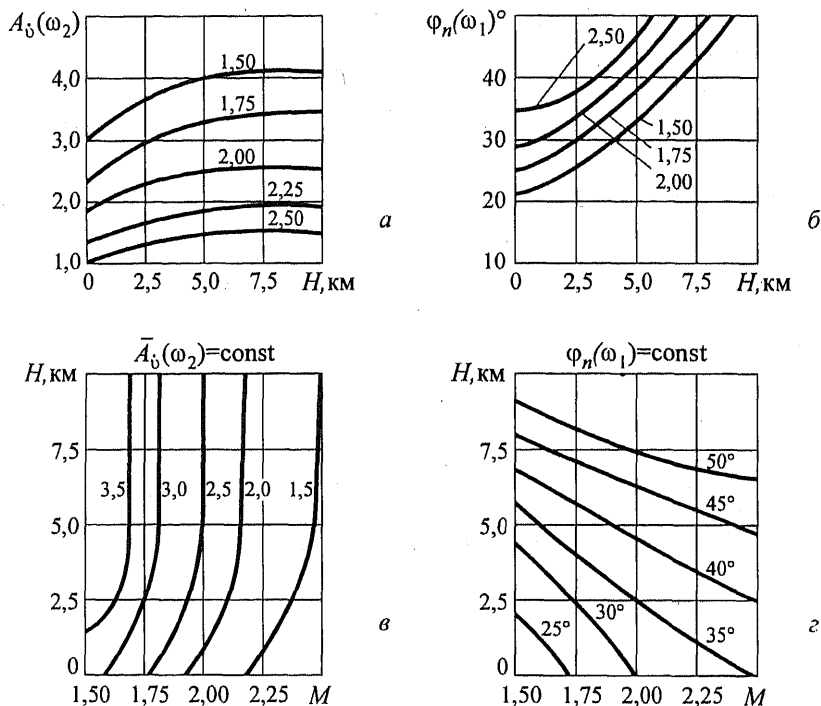


Рис. 8.2

$$H_{\min} \leq H \leq H_{\max}; \quad M_{\min} \leq M \leq M_{\max}.$$

Поскольку изменение условий применения приводит к изменению $T_{\dot{\vartheta}}$ и K , то для контура с фиксированной настройкой K можно с помощью номограмм построить кривые $\bar{A}_{\dot{\vartheta}}(H)$ и $\varphi_H(H)$, а также $\bar{A}_{\dot{\vartheta}} = \text{const}$ и $\varphi_n = \text{const}$ на плоскости M, H .

Соответствующие зависимости приведены на рис. 8.2, а—г. Как видим, увеличение области возможного применения приводит к увеличению $\bar{A}_{\dot{\vartheta}}$ и φ_n . Требованиями обычно задаются $\bar{A}_{\dot{\vartheta}} \leq 2,5 + 3,0$; $\varphi_n \leq 35 + 40^\circ$.

§ 8.3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА АСТАТИЧЕСКИХ КС

Здесь мы рассмотрим основные свойства астатических КС в основных каналах и канале крена, не прибегая к их идеализации.

Структурная схема КС основного канала имеет вид, представленный на рис. 8.3, а. Найдем реакцию перегрузки ракеты на управляющий сигнал u и возмущенный момент $\bar{M}_B = \frac{M_B}{J_{zz} a_3}$.

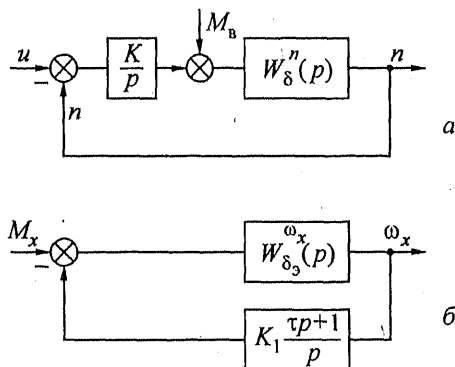


Рис. 8.3

Согласно принципу суперпозиции

$$n = \Phi_u^n(p) u + \Phi_{\bar{M}_B}^n(p) M_B. \quad (8.19)$$

Передаточные функции $\Phi_u^n(p)$ и $\Phi_{\bar{M}_B}^n(p)$ имеют вид

$$\Phi_u^n(p) = \frac{\frac{K}{p} W_\delta^n(p)}{1 + \frac{K}{p} W_\delta^n(p)} = \frac{K W_\delta^n(p)}{p + K W_\delta^n(p)}; \quad (8.20)$$

$$\Phi_{\bar{M}_B}^n(p) = \frac{W_\delta^n(p)}{1 + \frac{K}{p} W_\delta^n(p)} = \frac{p W_\delta^n(p)}{p + K W_\delta^n(p)}. \quad (8.21)$$

Обратим внимание, что в (8.20) оператор (8.12) стоит в прямом тракте, в (8.21) — в обратной связи.

Подставляя (8.20) и (8.21) в (8.19) и полагая $P = 0$ (установившееся значение перегрузки), получаем

$$n_{уст} = 1 \cdot u_{уст} + 0 \cdot \bar{M}_B = u_{уст}. \quad (8.22)$$

Таким образом, при отклонении руля по закону (8.12) коэффициент передачи $\left[\frac{n}{u} \right]_{уст}$ оказывается тождественно равным единице (независимо от режима полета), а постоянное возмущение $\bar{M}_B$ не вызывает ухода перегрузки. Тем самым исправляются недостатки 3 и 4 (§ 6.1) изолированной ракеты, связанные с зависимостью параметров передаточных функций от режимов полета и абсолютного движения от внешних возмущений.

Рассмотрим теперь КС канала крена. Структура контура приведена на рис. 8.3, б.

Будем отклонять элероны по закону

$$\delta_y = -K_0 \omega_x - K_\gamma \int_0^t \omega_x dt = -K_1 \frac{\tau p + 1}{p} \omega_x; \quad \tau = \frac{K_0}{K_\gamma}. \quad (8.23)$$

Найдем реакцию ω_x на возмущение $\bar{M}_x$. Имеем

$$\omega_x = \Phi_{\bar{M}_x}^{\omega_x}(p) \bar{M}_x. \quad (8.24)$$

Входящая в (8.24) передаточная функция

$$\Phi_{\frac{\omega_x}{M_x}}(p) = \frac{\frac{K}{T_\gamma p + 1}}{1 + K_\gamma} = \frac{1}{K_\gamma} \frac{p}{T_1^2 p^2 + 2T_1 \xi_1 p + 1}; \quad (8.25)$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{T_\gamma}{K_1 K_\gamma}}; \quad \xi_1 = \frac{1 + K_1 K_\gamma \tau}{2 \sqrt{K_1 K_\gamma} \tau}.$$

Из (8.25) при $P = 0$ получим $\omega_{уст} = 0$. Итак, постоянный внешний момент не вызывает вращения ракеты по крену.

Выбором коэффициентов усиления K_0 и K_1 (τ и K_1) можно оптимизировать колебательное звено в (8.25) и тем самым реакцию на переменное возмущение.

§ 8.4. АППАРАТУРНЫЕ МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ БАЛАНСИРОВКИ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ

Рассмотрим аппаратурные методы повышения пространственной устойчивости за счет компенсации перекрестных связей между каналами*. Эта компенсация может быть осуществлена как с помощью основных каналов, так и с помощью канала крена. Рассмотрим их последовательно.

8.4.1. Компенсация пространственных связей с помощью основных каналов

Систему пространственного движения запишем в виде (гирокосиническими членами $\omega_x \omega_y$ и $\omega_x \omega_z$ пренебрегаем):

$$\ddot{\omega}_x + C_1 \omega_x - m_x (\alpha_1, \alpha_2, \delta_I, \delta_{II}) = C_3 \delta_y;$$

$$\ddot{\alpha}_1 + (a_1 + a_4) \dot{\alpha}_1 + (a_2 + a_1 a_4) \alpha_1 + a_1 (\omega_x \alpha_2) + (\omega_x \alpha_2)' = a_3 \delta_I; \quad (8.26)$$

$$\ddot{\alpha}_2 + (a_1 + a_4) \dot{\alpha}_2 + (a_2 + a_1 a_4) \alpha_2 - a_1 (\omega_x \alpha_1) - (\omega_x \alpha_1)' = a_3 \delta_{II}.$$

* Наряду с методами компенсации могут также использоваться следующие методы: 1) увод ракеты (по крену) из плоскости, где балансировочный режим неустойчив; 2) использование независимых законов отклонения рулей.

Будем управлять в основных каналах по закону

$$\begin{aligned}\delta_I &= u_1 + \hat{K}_n (\omega_x \alpha_2) + \tau (\omega_x \alpha_2)' \\ \delta_{II} &= u_2 + \hat{K}_n (\omega_x \alpha_1) - \tau (\omega_x \alpha_1)'. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Подставив (8.27) в (8.26), получим

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x + C_1 \omega_x - m_x (\alpha_1, \alpha_2, \delta_I, \delta_{II}) &= C_3 \delta_9; \\ \ddot{\alpha}_1 + (a_1 + a_4) \dot{\alpha}_1 + (a_2 + a_1 a_4) \alpha_1 + a_1 (\omega_x \alpha_2) - (\omega_x \alpha_2)' &= \\ &= a_3 \left\{ U_1 + \hat{K}_n \left[(\omega_x \alpha_2) + \tau (\omega_x \alpha_2)' \right] \right\}; \\ \ddot{\alpha}_2 + (a_1 + a_4) \dot{\alpha}_2 + (a_2 + a_1 a_4) \alpha_2 - a_1 (\omega_x \alpha_1) - (\omega_x \alpha_1)' &= \\ &= a_3 \left\{ U_2 - \hat{K}_n \left[(\omega_x \alpha_1) + \tau (\omega_x \alpha_1)' \right] \right\}; \end{aligned} \quad (8.28)$$

В (8.28) коэффициенты $\hat{K}_n$ и τ выберем из условия компенсации перекрестных связей в каналах (члены $\omega_x \alpha_1$, $\omega_x \alpha_2$, $(\omega_x \alpha_1)'$, $(\omega_x \alpha_2)'$). Имеем

$$\hat{K}_n = \frac{a_2}{a_3}; \quad \tau = \frac{1}{a_1}. \quad (8.29)$$

С учетом (8.29) система (8.28) приводится к виду

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x + C_1 \omega_x - m_x (\alpha_1, \alpha_2, \delta_I, \delta_{II}) &= C_3 \delta_9; \\ \ddot{\alpha}_1 + (a_1 + a_4) \dot{\alpha}_1 + (a_2 + a_1 a_4) \alpha_1 &= a_3 u_1; \\ \ddot{\alpha}_2 + (a_1 + a_4) \dot{\alpha}_2 + (a_2 + a_1 a_4) \alpha_2 &= a_3 u_2. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Мы получили систему изолированных плоских каналов. Физически это означает, что при отклонении рулей по закону (8.27) обеспечивается ликвидация перекрестных связей. Эта компенсация может использоваться только при углах атаки, превышающих допустимые (большие H , малые q).

Основным достоинством этого способа является независимость структуры управляющих сигналов (8.27) от структуры момента косого обдува.

8.4.2. Компенсация пространственных связей с помощью канала крена

Рассмотрим уравнение движения ракеты по крену. Имеем

$$\dot{\omega}_x + C_1 \omega_x - m_x(\alpha_1, \alpha_2, \delta_I, \delta_{II}) = C_3 \delta_9. \quad (8.31)$$

Предположим, что мы знаем точное аналитическое выражение для m_x в виде

$$\hat{m}_x(\alpha_1, \alpha_2, \delta_I, \delta_{II}) = \kappa(\alpha_1^3 \alpha_2 - \alpha_2^3 \alpha_1) + \kappa_1(\alpha_1 \delta_{II} - \alpha_2 \delta_I). \quad (8.32)$$

Тогда, отклоняя элероны по закону

$$\delta_9 = u_9 - \frac{1}{C_3} \hat{m}_x(\alpha_1, \alpha_2, \delta_I, \delta_{II}), \quad (8.33)$$

получаем после подстановки (8.33) в (8.31)

$$\dot{\omega}_x + C_1 \omega_x = C_3 u_9. \quad (8.34)$$

Из (8.34) следует, что канал крена будет работать так, как будто косого обдува нет. Недостатком этого способа является необходимость знать аналитическое выражение для момента косого обдува.

Рассмотрим случаи, когда эти зависимости известны.

1. *Ракета схемы «утка».* В этом случае

$$\hat{m}_x(\alpha_1, \alpha_2, \delta_I, \delta_{II}) = \kappa_1(\alpha_1 \delta_{II} - \alpha_2 \delta_I), \quad (8.35)$$

тогда

$$\delta_9 = u_9 - \frac{\kappa_1}{C_3} \hat{m}_x(\alpha_1 \delta_{II} - \alpha_2 \delta_I). \quad (8.36)$$

Отметим, что вместо углов атаки для рулевой схемы можно использовать поперечные перегрузки ракеты.

2. *Ракета нормальной схемы.* В этом случае

$$m_x(\alpha_1, \alpha_2) = \kappa(\alpha_1^3 \alpha_2 - \alpha_2^3 \alpha_1) = m_x \sin 4\varphi, \quad (8.37)$$

тогда

$$\delta_3 = u_3 - \frac{\kappa}{C_3} (\alpha_1^3 \alpha_2 - \alpha_2^3 \alpha_1). \quad (8.38)$$

При реализации эту формулу обычно упрощают, заменяя $\sin 4\varphi$ линейной аппроксимацией.

Глава 9. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В РАЗЛИЧНЫХ ПОСТАНОВКАХ

§ 9.1. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ И МОМЕНТОВ ОТ УГЛОВ АТАКИ И ОТКЛОНЕНИЯ РУЛЕЙ

Такая модель используется в тех случаях, когда исследуется влияние на устойчивость пространственного движения только составляющих моментов крена, для которого сохраняют при этом достаточно подробное нелинейное выражение. Мы используем представление вида:

$$m_x = m_{x1}(\alpha, \varphi) + v_x(\alpha) \left[-\delta_I \sin \varphi + \delta_{II} \cos \varphi \right], \quad (9.1)$$

которое получается из полной модели при линейных функциях эффективности рулей по крену. Для исследования устойчивости пространственной балансировки воспользуемся аппаратом передаточных функций. Рассмотрим вначале общепринятые уравнения плоского движения ракеты:

$$\dot{\omega}_z + a_1 \omega_z + a_2 \alpha_1 = a_3 \delta_I;$$

$$\dot{\alpha}_1 + a_4 \alpha_1 - \omega_z = -\lambda_f;$$

$$\dot{\omega}_x + C_1 \omega_x = \lambda_m.$$

Этой системе уравнений отвечают следующие передаточные функции:

$$W_{y,z}(p) = \frac{\alpha_1(p)}{\lambda_f(p)} = \frac{p + a_1}{p^2 + (a_1 + a_4)p + a_2 + a_1 a_4} ; \quad (9.2)$$

$$W_x(p) = \frac{\omega_x(p)}{\lambda_{fm}(p)} = \frac{1}{p + c_1} .$$

При этом $W_{y,z}(p)$ характеризует реакцию угла атаки на возмущающую поперечную силу, а $W_x(p)$ — реакцию угловой скорости крена на возмущающий момент крена. Для крестокрылой ракеты рулевой схемы исходная система дифференциальных уравнений пространственного движения, записанная относительно полных значений неизвестных угловых скоростей и проекций угла атаки, в рассматриваемом случае имеет вид (гироскопические моменты опущены):

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= -c_x \omega_x + m_{x1}(\alpha, \varphi) + v_x(\alpha) \left[-\delta_I \sin \varphi + \delta_{II} \cos \varphi \right] ; \\ \dot{\omega}_{z,y} &= -a_1 \omega_{z,y} - a_2 \alpha_{1,2} - a_3 \delta_{I,II} ; \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\dot{\alpha}_{1,2} = -a_4 \alpha_{1,2} + \omega_{z,y} \mp \omega_x \alpha_{2,1} .$$

Система алгебраических уравнений для определения установившихся значений неизвестных в балансировочном режиме дает решение:

$$\begin{aligned} \omega_x^* &= \frac{m_{x1}(\alpha, \varphi)}{c_1 + a_1 \frac{v_x(\alpha)}{a_3} \alpha} ; \\ \delta_I^* &= \frac{1}{a_3} \left(a_2 + a_1 a_4 \right) \cos \varphi + \frac{a_1}{a_3} \alpha \omega_x^* ; \\ \delta_{II}^* &= \frac{1}{a_3} \left(a_2 + a_1 a_4 \right) \sin \varphi - \frac{a_1}{a_3} \alpha \omega_x^* ; \end{aligned} \quad (9.4)$$

$$p^* = a_4 \alpha ; \quad q^* = \frac{m_{x1}(\alpha, \varphi)}{c_1 + a_1 \frac{v_x(\alpha)}{a_3} \alpha} ;$$

Система дифференциальных уравнений в вариациях в данном случае отвечает структурная схема, приведенная на рис. 9.1, а. Подобно последней, полученная система включает канал модуля и канал вариации фазы угла атаки, перекрестные обратные и параллельные связи. Однако в данном случае элементарными звеньями схемы являются звенья с передаточными функциями $W_{y,z}(p)$ и $W_x(p)$ для изолированных каналов и не зависящие от параметров балансирующего режима α и φ . Коэффициентами передачи в полученной схеме являются установившаяся угловая скорость крена ω_x^* и частные производные момента крена $\frac{\partial m_x}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial m_x}{\partial \varphi}$, вычисленные для балансирующего режима. Они зависят от параметров режима α и φ и вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial m_x}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} m_{x1}(\alpha, \varphi) - \frac{\partial v_x(\alpha)}{\partial \alpha} \cdot \frac{m_{x1}(\alpha, \varphi)}{v_x(\alpha) + \frac{a_3 c_1}{a_1 \alpha}}; \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} m_{x1}(\alpha, \varphi) - \frac{a_2 + a_1 a_4}{a_3} \alpha v_x(\alpha).$$

Эквивалентными преобразованиями полученная схема приводится к одноконтурной структуре с единичной обратной связью, представленной на рис. 9.1, б. Тем самым исследование устойчивости балансирующего режима в пространственном движении сведено к анализу устойчивости линейной системы регулирования с передаточной функцией разомкнутого тракта:

$$W(s) = \frac{\omega_x^* W_{y,z}^2(p) \left[\alpha \frac{\partial m_x}{\partial \alpha} W_x(p) + \omega_x^* \right]}{1 + \frac{\partial m_x}{\partial \varphi} W_{y,z}(p) W_x(p)}. \quad (9.6)$$

Дальнейшее исследование может быть приведено методами линейной теории регулирования, например, методом частотных характеристик. Из полученной схемы следует, что для полуплоскостей $\varphi = \varphi^*$, в которых функции нуль-конфигурации

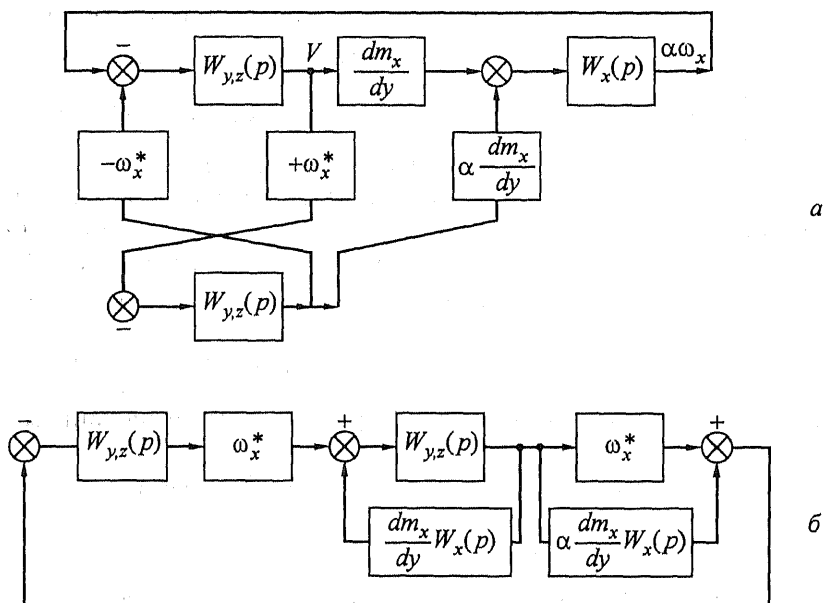


Рис. 9.1

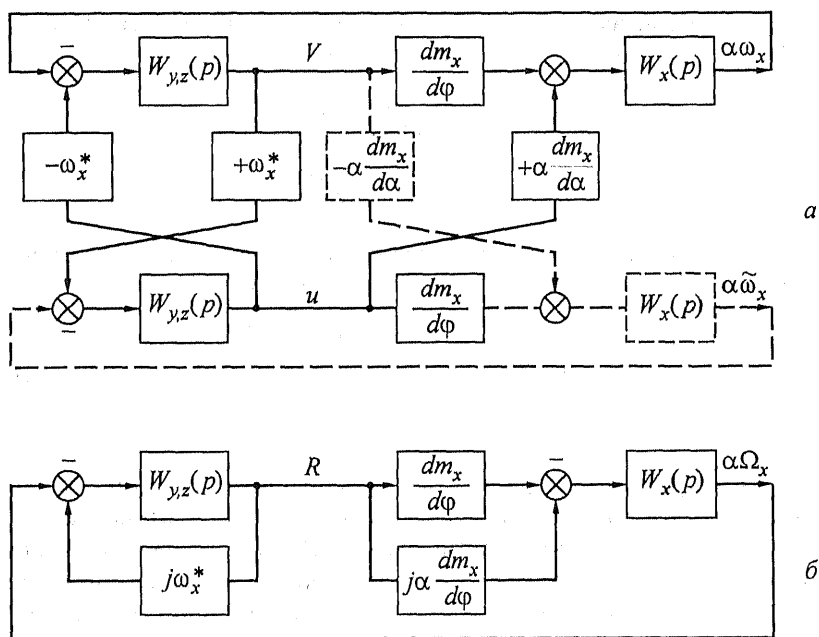


Рис. 9.2

$m_{x1}(\alpha, \varphi)$ отличаются только знаком, имеют место одинаковые граничные значения α , так как одновременное изменение знака ω_x^* и $\frac{\partial m_x}{\partial \alpha}$ не меняет схемы (рис. 9.1) и передаточной функции (9.6). Для полуплоскостей зеркальной симметрии условие устойчивости балансировки в пространстве сводится к независимому обеспечению устойчивости системы с передаточной функцией $W_{y,z}(p)$ (канал вариации модуля угла атаки) и такой же системы, охваченной отрицательной обратной связью с оператором $\frac{\partial m_x}{\partial \varphi} W_x(p)$ (канал вариации фазы угла атаки), так как в этом случае $\omega_x^* = 0$. Пусть момент крена дается выражением

$$m_x = k \alpha^\lambda \sin 4\varphi + k_1 \alpha \left(-\delta_I \sin \varphi + \delta_{II} \cos \varphi \right), \quad (9.7)$$

где k, k_1 — постоянные.

Выражение (9.7) получается из (9.1), если в составе $m_{x1}(\alpha, \varphi)$ удерживается лишь основная гармоника с одночленной аппроксимацией амплитуды, а корректирующая функция линейна. Тогда из рассмотрения передаточной функции

$$W(p) = \frac{W_{y,z}^2(p)}{1 + \frac{\partial m_x}{\partial \varphi} W_{y,z}(p) W_x(p)}.$$

для балансировки в плоскости зеркальной симметрии получается следующее условие колебательной устойчивости:

$$a_2 + a_1 a_4 > \pm \frac{4 c_1 k \alpha^\lambda}{a_1 + a_4 + \frac{1}{a_3} k_1 \alpha^2}. \quad (9.8)$$

Из полученного неравенства, в частности, следует, что при любом значении λ устойчивость балансировки в пространственном движении накладывает на выбор параметров более жесткие ограничения, чем обычное требование динамической устойчивости плоского движения в изолированном канале. На этом же примере можно показать важность отказа от аппроксимации

$m_{x1}(\alpha_1, \alpha_2)$ аналитическими функциями и перехода к форме смешанных полиномов $m_{x1}(\dot{\alpha}, \varphi)$ с частными производными по α_1 и α_2 , разрывными в нуле. При этом оказывается, что математическая модель крена, основанная на использовании только аналитических функций от α_1 и α_2 , приводит к неверной (заниженной) оценке влияния запасов устойчивости в изолированных каналах на устойчивость в пространственном движении.

§ 9.2. ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ГРАНИЧНЫХ ПО УСЛОВИЯМ УСТОЙЧИВОСТИ ЗНАЧЕНИЙ УГЛА АТАКИ, ОСНОВАННАЯ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим способ приближенной оценки граничных значений α , основанный на представлении системы уравнений пространственного движения ракеты в виде двухканальной системы автоматического регулирования с антисимметричными связями, методы исследования которых с использованием передаточных функций с комплексными коэффициентами разработаны А.А. Красовским.

Рассмотрим наряду со схемой рис. 9.1, а дополненную структурную схему рис. 9.2, а, отличающуюся от нее наличием уравнения, определяющего дополнительную функцию ω_x , а также членом $\alpha\omega_x$ в уравнении для $\dot{y}$. Дополнительные связи системы показаны пунктиром. В схеме можно выделить два идентичных канала, передаточные функции разомкнутого тракта которых содержат последовательно включенные операторы $W_{y,z}$ и W_x , и перекрестные антисимметричные связи: обратную с коэффициентом усиления $\pm \omega_x^*$ и параллельную с коэффициентом $\pm \frac{\partial m_x}{\partial \alpha}$. Схема рис. 9.2, б эквивалентна структурной схеме, приведенной на рис. 9.2, а, и получена за счет введения комплексных переменных:

$$R = v + ju; \quad Q = q + jp; \quad \Omega = \omega_x + j\bar{\omega}_x. \quad (9.9)$$

Передаточная функция разомкнутого тракта этой системы имеет вид:

$$W(s) = \left(\frac{\partial m_x}{\partial \varphi} - j \alpha \frac{\partial m_x}{\partial \alpha} \right) \frac{W_{y,z}(p) W_x(p)}{1 + j \omega_x^* W_{y,z}(p)}, \quad (9.10)$$

а характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} & \left(p + c_1 \right) \left[p^2 + \left(a_1 + a_4 \right) p + a_2 + a_1 a_4 + j \omega_x^* \left(p + a_1 \right) \right] + \\ & + \left(s + c_1 \right) \left(\frac{\partial m_x}{\partial \varphi} - j \alpha \frac{\partial m_x}{\partial \alpha} \right) = 0. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Это уравнение с комплексными коэффициентами третьей степени, в то время как исходной системе соответствует характеристическое уравнение пятой степени.

Сравнивая рис. 9.1, а и 9.2, а, и учитывая выражения для установившихся значений переменных, видим, что условия устойчивости этих систем для балансировки в плоскости зеркальной симметрии ракеты $\left(\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4} \right)$ совпадают. При других значениях φ устойчивость дополненной системы накладывает ограничения еще и на функцию ω_x , поэтому устойчивость системы рис. 9.2, а является достаточным, но не необходимым условием устойчивости системы рис. 9.1, а. Вместе с тем вычисления по уравнению (9.11) менее громоздки. В частности, упрощается применение метода D -разбиения, так как для определения параметров $z_1 = \frac{\partial m_x(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi}$ и $z_2 = m_x(\alpha, \varphi)$ получается более простая система уравнений:

числения по уравнению (9.11) менее громоздки. В частности, упрощается применение метода D -разбиения, так как для определения параметров $z_1 = \frac{\partial m_x(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi}$ и $z_2 = m_x(\alpha, \varphi)$ получается более простая система уравнений:

$$\begin{aligned} A_0 z_1 + B_1 \omega z_2 &= -C_0 + C_2 \omega^2; \\ A_1 \omega z_1 + (B_0 - B_2 \omega^2) z_2 &= -C_1 \omega + \omega^3, \end{aligned} \quad (9.12)$$

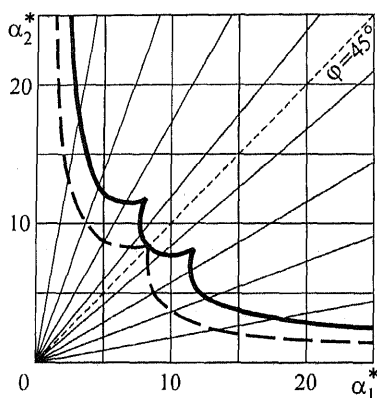


Рис. 9.3

где выражения для A, B, C через функции, определяющие силы и моменты, получаются из (9.3). На рис. 9.3 пунктиром приведена граница устойчивости, рассчитанная методом комплексных функций. Там же для сравнения приведена соответствующая граница для исходной системы. Как видно, граничные значения α , рассчитанные по формулам (9.12), нигде не превосходят точных значений (сплошная линия), а при $\varphi = 45^\circ$ оба метода дают одно и то же значение α .

§ 9.3. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ КОНСТРУКТИВНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ИСКАЖЕНИЙ СИММЕТРИИ КОМПОНОВКИ НА ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

Все предыдущее рассмотрение предполагало точное соблюдение свойств симметрии компоновки. Для реальных конструкций управляемых ракет такая модель является лишь приближенной геометрической идеализацией. Искажение симметрии может быть обусловлено как наличием дополнительных конструктивных элементов (бугели, гаргроты, антенны), так и технологическими погрешностями нивелировки несущих плоскостей и т.п.

Построенная математическая модель аэродинамических сил и моментов и метод исследования устойчивости пространственного движения принципиально применимы и к такому типу компоновок. В настоящей работе искажения симметрии рассматриваются как «паразитное» явление и оценивается влияние их на устойчивость пространственных балансировочных режимов. Будем рассматривать два вида искажения симметрии: 1) наличие элемента типа протяженного гаргрота; 2) наличие погрешности нивелировки консолей, приводящее к винтообразности крыла. По сравнению с идеальной компоновкой мы имеем дело с нарушением в первом случае осевой симметрии, во втором случае — зеркальной. Будем учитывать влияние указанных искажений только на структуру и параметры момента крена, поскольку влияние их на поперечные аэродинамические силы и моменты, как правило, незначительно. Для представления последних мы сохраним линейную математическую модель, что позволит применить изложенный в предыдущем параграфе упрощенный метод анализа.

1. *Влияние гаргрота.* Рассмотрим компоновку с гаргротом, установленном в биссекторной плоскости, и составим для нее

математическую модель момента крена. Наличие гаргрота обуславливает вырожденную осевую симметрию компоновки. Поэтому в состав смешанного полинома, определяющего момент крена нуль-конфигурации, могут входить гармоники любого периода, кратного 2π . Имея в виду получение качественной оценки влияния гаргрота на устойчивость пространственного балансировочного режима, мы будем удерживать в составе момента крена четвертую гармонику как основную, отражающую свойства симметрии идеализированной компоновки, и первую гармонику, отражающую наличие гаргрота. Выбирая надлежащую аппроксимацию для $m_{x1}(\alpha)$ и $m_{x4}(\alpha)$, можно учесть характер влияния гаргрота при разных α . Примем

$$m_x = m_{x1}(\alpha) \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + m_{x4}(\alpha) \sin 4\varphi + \\ + v_x(\alpha) \left[-\delta_1 \sin \varphi + \delta_1 \cos \varphi \right]. \quad (9.13)$$

Для получения границы устойчивости балансировочного режима в плоскости α, φ пользуясь схемой рис. 9.1, б или рис. 9.2, б, необходимо вычислить параметры передаточных функций $W_{y,z}(s)$ и $W_x(s)$, которые для заданного режима полета H, M фиксированы, а также коэффициенты передач ω_x^* , $\frac{\partial m_x}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial m_x}{\partial \varphi}$, являющиеся функциями α и φ . Граничные значения α удобно определять для полуплоскостей зеркальной симметрии исходной идеальной компоновки $\varphi = k \frac{\pi}{4}$ ($k = 0, 1, \dots, 7$).

В этом случае указанные выше коэффициенты передачи выражаются формулами:

$$\omega_x^* = \left[\sin(k-1) \frac{\pi}{4} \right] \frac{m_{x1}}{c_1 + \frac{a_1}{a_3} \alpha v_x}; \\ \frac{\partial m_x}{\partial \alpha} = \left[\sin(k-1) \frac{\pi}{4} \right] \left[\frac{\partial m_{x1}}{\partial \alpha} - \frac{a_1}{a_3} \alpha \frac{\partial v_x}{\partial \alpha} \frac{m_{x1}}{c_1 + \frac{a_1}{a_3} \alpha v_x} \right]; \quad (9.14)$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial \varphi} = \left[\cos(k-1) \frac{\pi}{4} \right] m_{x1}' + (-1)^k m_{x4} \left(\frac{-a_2 + a_1 a_4}{a_3} \alpha v_x \right).$$

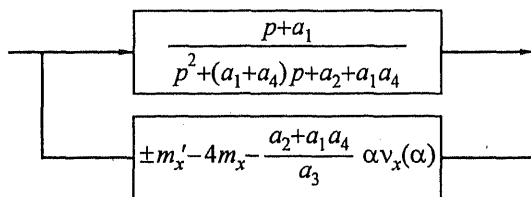
Рассматривая выражения для коэффициентов передачи (9.14) заключаем:

1) условия устойчивости и граничные значения α при балансировке в плоскости крыла одинаковы для пары $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ и различны для полуплоскостей из разных пар;

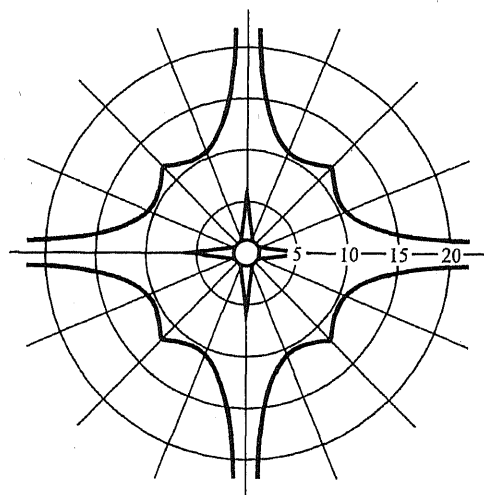
2) условия устойчивости и граничные значения α при балансировке в биссекторной плоскости одинаковы для пары полуплоскостей $\varphi = \frac{3}{4}\pi$, $\varphi = \frac{7}{4}\pi$;

3) условия устойчивости при балансировке в плоскости, содержащей гаргрот, различны для полуплоскостей $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{5}{4}\pi$ и не совпадают с условиями для $\varphi = \frac{3}{4}\pi$, $\varphi = \frac{7}{4}\pi$. Граничные значения α для полуплоскостей $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{5}{4}\pi$ определяются из рассмотрения простейшей структурной схемы рис. 9.4, а, а знаки $\pm m_{x1}$ относятся соответственно к $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{5}{4}\pi$. Сказанное согласуется с тем фактом, что плоскость $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{5}{4}\pi$, содержащая гаргрот, является единственной плоскостью зеркальной симметрии компоновки. На рис. 9.4, б сопоставляются границы устойчивости балансировочного режима при идеальной симметрии и симметрии, нарушенной гаргротом. Расчет проведен с использованием комплексных функций и схемы рис. 9.2, б. Графики рис. 9.4, б показывают характер изменения границы устойчивости из-за наличия гаргрота для случая $m_{x4}(\alpha) > 0$.

2. *Влияние погрешности нивелировки.* Перейдем к оценке влияния погрешности нивелировки на устойчивость балансировки в пространственном движении. Мы рассматриваем такое искажение геометрической формы, при которой сохраняется порядок осевой симметрии компоновки и исключается зеркальная симметрия. Поэтому для момента крена можно принять выражение:



a



б

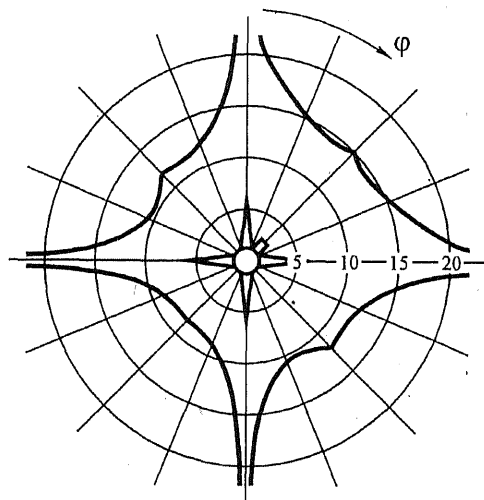


Рис. 9.4

$$m_x = m_{x0}(\alpha) + \tilde{m}_{x4}(\alpha) \cos 4\varphi + m_{x4}(\alpha) \sin 4\varphi + \\ + v_x(\alpha) \left[-\delta_I \sin \varphi + \delta_I \cos \varphi \right], \quad (9.15)$$

которое отличается от (9.13) наличием четных гармоник в составе функции нуль-конфигурации.

Амплитуды дополнительных гармоник являются функциями угла атаки и угловой ошибки установки крыльев. Для определения $m_{x0}(\alpha)$, $\tilde{m}_{x4}(\alpha)$, $m_{x4}(\alpha)$, строго говоря, следовало бы провести гармонический анализ результатов продувки модели, отражающей погрешность нивелировки несущих плоскостей. В практических расчетах обычно принимают, что моменты крена, обусловленные перекосом крыльев, обладают круговой симметрией ($m_{x4} = 0$), а величину m_{x0} оценивают расчетным путем, полагая угловую погрешность крыльев σ одинаковой для всех консолей. Для определения границы устойчивости пространственной балансировки в настоящем случае удобно рассматривать полуплоскости $\varphi = \frac{k}{8} \pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 15$). При k четном эта последовательность определяет полуплоскости зеркальной симметрии исходной идеальной компоновки, при этом k , сравнимые по модулю 4 с нулем, определяют балансировку в плоскости крыла, а сравнимые с 2 — балансировку в биссекторной плоскости. При нечетном k эта последовательность определяет полуплоскости, в которых достигает экстремума момент крена нуль-конфигурации идеальной компоновки. Для указанной последовательности φ справедливы следующие формулы для коэффициентов передачи, входящих в структурные схемы рис. 9.1, б и рис. 9.2, б:

$$\omega_x^* = \frac{m_{x0} + \left(\sin k \frac{\pi}{2} \right) m_{x4}}{c_1 + \frac{a_1}{a_3} \alpha v_x};$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[m_{x0} + \left(\sin k \frac{\pi}{2} \right) m_{x4} \right] -$$

$$-\frac{a_1}{a_3} \propto \frac{\partial v_x}{\partial \alpha} \frac{m_{x0} + \left(\sin k \frac{\pi}{2} \right) m_{x4}}{c_1 + \frac{a_1}{a_3} \propto v_x};$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \alpha} = \left(\cos k \frac{\pi}{2} \right) 4 m_{x4} \frac{-a_2 + a_1 a_4}{a_3} \propto v_x.$$

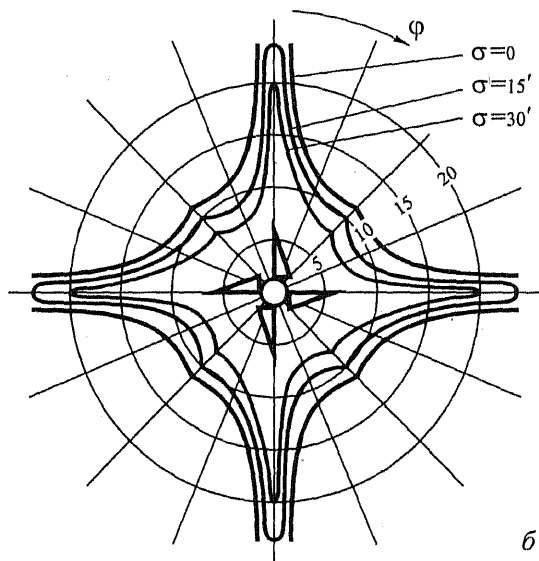
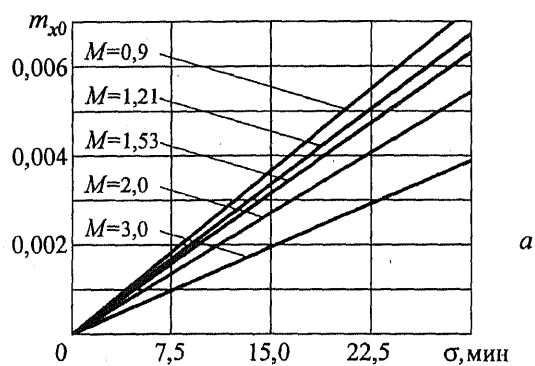


Рис. 9.5

Рассматривая свойства получаемых при этом изменений структуры заключаем:

1. Наличие искажения $m_{x0} \neq 0$ изменяет условия устойчивости и граничные значения α при балансировке как в плоскости крыла, так и в плоскости биссектора (см. рис. 9.5,а).

2. При наличии искажения $m_{x0} \neq 0$ условия устойчивости и граничные значения α оказываются различными для промежуточных полуплоскостей расположенных относительно плоскости зеркальной симметрии идеальной компоновки (совпадение имеет место отдельно для k , сравнимых по модулю 4 с 1 и соответственно с 3).

3. При любом знаке m_{x0} в плоскостях симметрии идеальной компоновки граничные значения α уменьшаются.

Сказанное наглядно подтверждает полярные диаграммы рис. 9.5, б, где сопоставлены границы устойчивости пространственного балансировочного режима для идеальной нивелировки крыльев $\sigma = 0$ и двух значений погрешности $\sigma = 15'$ и $\sigma = 30'$. Изменение знака σ и m_{x0} приводит лишь к зеркальному отражению диаграмм. Приведенные примеры предназначены для иллюстрации применения упрощенного метода анализа устойчивости в частных случаях и дают лишь качественную картину влияния параметров. Для получения достаточной количественной оценки влияния параметров компоновки на устойчивость пространственной балансировки управляемых ракет целесообразно использовать изложенный выше общий метод анализа устойчивости с помощью ЭВМ, алгоритм которого включает более полную математическую модель аэродинамических сил и моментов.

§ 9.4. УСТОЙЧИВОСТЬ БАЛАНСИРОВОЧНЫХ РЕЖИМОВ РАКЕТЫ В СОСТАВЕ КОНТУРА СТАБИЛИЗАЦИИ

При анализе устойчивости пространственного движения управляемой ракеты с произвольной структурой контура стабилизации может быть использован изложенный выше общий метод исследования балансировочных режимов с помощью ЭВМ. Здесь мы рассмотрим случай, когда для момента крена принимается подробная математическая модель в форме смешанных

полиномов, а силы и моменты относительно поперечных осей считаются линейными. В этом случае исследование можно провести путем обобщения метода, примененного для фиксированных δ -конфигураций, на случай ракеты с автономными обратными связями. Примем в качестве исходной следующую систему дифференциальных уравнений, описывающую движение ракеты в составе контура стабилизации:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= -c_1 \omega_x + m_{x1}(\alpha, \varphi) + v_x(\alpha) \left[-\delta_I \sin \varphi + \delta_{II} \cos \varphi \right] + c_3 \delta_x; \\ \dot{\omega}_{z,y} &= -a_1 \omega_{z,y} - a_2 \alpha_{1,2} + a_3 \delta_{I,II}; \\ \dot{\alpha}_{1,2} &= -a_4 \alpha_{1,2} - a_5 \delta_{I,II} + \omega_{z,y} \mp \omega_x \alpha_{2,1}; \\ \delta_{I,II} &= -W_1(p) \omega_{z,y} - W_2(p) \left(\alpha_{1,2} + \frac{a_5}{a_4} \delta_{I,II} \right) + W_3(p) u_{1,2}; \\ \delta_x &= -W_4(z) \omega_x.\end{aligned}\tag{9.16}$$

Последние два уравнения выражают закон отклонения рулей по основным каналам и крену в соответствии с сигналами бортовых датчиков. Известными в этой системе являются функции u_1 и u_2 , представляющие собой сигналы управления от независимого источника (командной линии, головки самонаведения и др.), углы δ_I , δ_{II} и δ_x являются неизвестными функциями, вариации их связаны с вариациями остальных неизвестных функций системы. Предполагается, что $W_1(p)$, $W_2(p)$, $W_3(p)$, $W_4(p)$ — суть дробно-рациональные передаточные функции звеньев, каждое из которых включает бортовые измерительные, преобразующие устройства и приводы рулей. Такая форма записи закона отклонения рулей является достаточно общей: ниже будет показано, что она охватывает большинство распространенных типов бортовой аппаратуры ракеты. Система (9.16) справедлива для различных аэродинамических компоновок, при этом рулевым схемам соответствует $a_5 = 0$. Перейдем от системы (9.16) к уравнениям в вариациях относительно переменных в связанной повернутой системе координат, рассуждая аналогично случаю фиксированных δ -конфигураций. Вве-

дем переменные u, v, p, q , а вместо углов δ_I и δ_{II} и их вариаций — переменные δ_u, δ_v , определяемые соотношениями:

$$\begin{aligned}\delta_u &= \delta_I \cos \varphi + \delta_{II} \sin \varphi; & u_u &= u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi; \\ \delta_v &= -\delta_I \sin \varphi + \delta_{II} \cos \varphi; & u_v &= -u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi.\end{aligned}\quad (9.17)$$

Тогда, пользуясь перестановочностью операций варьирования и применения к функции интегродифференциального оператора, получаем:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x + c_1 \omega_x - \left[\partial \alpha + \frac{\partial v_x}{\partial \alpha} \right] u + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial m_{x1}}{\partial \varphi} + v_x \delta_u^* \right] v - \\ - v_x \delta_x - c_3 \delta_x' = 0; \\ \dot{p} + a_1 p + a_2 u - a_3 \delta_u = 0; \\ \dot{q} + a_1 q + a_2 v - a_3 \delta_v = 0; \\ \dot{u} + a_4 u + a_5 \delta_u - p + \omega_x^* v = 0;\end{aligned}\quad (9.18)$$

$$\dot{v} + a_4 v + a_5 \delta_v - q - \omega_x^* u - \alpha \omega_x = 0;$$

$$\left[1 + \frac{a_5}{a_4} W_2(p) \right] \delta_u + W_1(p) p + W_2(p) u = 0;$$

$$\left[1 + \frac{a_5}{a_4} W_2(p) \right] \delta_v + W_1(p) q + W_2(p) v = 0;$$

$$\delta_x + W_4(p) \omega_x = 0.$$

Установившиеся значения неизвестных являются решением нелинейной системы алгебраических уравнений, получаемой из (9.16) при обращении производных в нуль. Имея в виду отыскание границы устойчивости в плоскости параметров α, φ , мы будем вычислять установившиеся значения $\omega_x^*, p^*, q^*, \delta_u^*, \delta_v^*, \delta_x^*$, считая u_1 и u_2 искомыми, а a_i, α, φ — заданными.

Отметим свойства установившихся значений переменных в зависимости от вида передаточных функций в формулах законов управления:

а) если $W_4(p)$ имеет полюс $p = 0$ (жесткая стабилизация крена), то имеет место:

$$\omega_x^* = 0; \quad q^* = 0; \quad \delta_v^* = 0; \quad u_v^* = 0; \quad \delta_v^* = -\frac{m_{x1}}{c_3};$$

$$p^* = \frac{a_3 a_4 + a_2 a_5}{a_3 - a_1 a_5} \alpha; \quad \delta_u^* = \frac{a_2 + a_1 a_4}{a_3 - a_1 a_5} \alpha; \quad (9.19)$$

$$u_u^* = \left\{ \frac{W_2(0)}{W_3(0)} + \frac{W_1(0)}{W_3(0)} \frac{a_3 a_4 + a_2 a_5}{a_3 - a_1 a_5} + \frac{1 + \frac{a_5}{a_4} W_2(0)}{W_3(0)} \frac{a_2 + a_1 a_4}{a_3 - a_1 a_5} \right\} \alpha,$$

б) если $W_4(p)$ и $W_3(p)$ имеют полюс первого порядка при $p = 0$ (случай астатической следящей системы по боковой перегрузке), то следует принять:

$$u_u^* = \frac{W_2(0)}{W_3(0)} \left\{ 1 + \frac{\frac{a_2}{a_4} + 1}{\frac{a_2}{a_4} + 1} \right\} \alpha;$$

в) если $W_4(p)$ не имеет полюса при $s = 0$, то

$$\omega_x^* = \frac{m_{x1}}{c_1 + c_3 W_4(0)} \neq 0$$

и решение проще находить с помощью ЭВМ;

г) если моменты крена нуль-конфигурации малы $[m_{x1}(\alpha, \varphi) = 0]$ или рассматривается балансировка в плоскости зеркальной симметрии $\left(\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4} \right)$, то имеет место решение, отличающееся от (9.19) тем, что $\delta_x^* = 0$.

Представим теперь структурную схему, соответствующую системе (9.18). Исключив переменные p , q , δ_u , δ_v , δ_x и воспользовавшись операционной записью уравнений, получим систему относительно ω_x , u и v , равносильную (9.18):

$$\begin{aligned} \frac{1}{W_{z,y}(p)} u &= -\omega_x^* v; \\ \frac{1}{W_{z,y}(p)} v &= -\omega_x^* u + \alpha \omega_x; \\ \frac{1}{W_x(p)} \omega_x &= \left\{ \frac{\partial m_{x1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_x}{\partial \alpha} \delta_u^* \right\} u + \\ &+ \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\partial m_{x1}}{\partial \phi} + v_x \delta_u^* \right] - v_x W_v(p) \right\} v, \end{aligned} \quad (9.20)$$

где передаточные функции имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{W_{z,y}(p)} &= \frac{a_2 + \left[a_3 + a_2 \frac{a_5}{a_4} - a_5(p + a_1) \right] W_2(p) + a_5 a_2 W_1(p)}{\left[1 + \frac{a_5}{a_4} W_2(p) \right] (p + a_1) + a_3 W_3(p)} (p + a_4); \\ \frac{1}{W_x(p)} &= s + c_1 + c_3 W_4(p); \end{aligned} \quad (9.21)$$

$$W_v(p) = \frac{(p + a_1) W_2(p) - a_2 W_1(p)}{\left[1 + \frac{a_5}{a_4} W_2(p) \right] (p + a_1) + a_3 W_3(p)};$$

На основании (9.20) получаем структурную схему, приведенную на рис. 9.6. Как видим, эта схема аналогична структурной схеме рис. 9.1, б. справедливой для фиксированных δ -конфигураций. Обе схемы построены по одному принципу из звеньев, характеризующих изолированные каналы продольно-бокового движения и крена. Передаточные функции $W_{z,y}(p)$ и $W_x(p)$, входящие в схему рис. 9.6, имеют тот же физический смысл, что и функции, входящие в схему рис. 9.1, б, но оп-

Рассмотрим теперь случай, когда управляющие сигналы подаются в стабилизированной системе координат так, что при вращении ракеты по крену происходит их ортогональное преобразование, зависящее от угла крена. Это имеет место, например, в системах самонаведения. Изложенный выше метод анализа устойчивости обобщается в данном случае. Исходная система дифференциальных уравнений имеет при этом вид:

$$\delta_{II} = -W_1(p)\omega_y - W_2(p)\left(\alpha_2 + \frac{a_5}{a_4}\delta_{II}\right) + W_3(p)(-u_1\sin\gamma + u_2\cos\gamma);$$

$$\delta_x = W_4(p) \omega_x;$$

$$\dot{\gamma} = \omega_x.$$

Здесь отклонения рулей δ_I и δ_{II} зависят от угла крена γ , введенного в систему в качестве дополнительной неизвестной функции. Взаимное расположение углов и, геометрический смысл функций γ и φ в системе (9.22) показан на рис. 9.7, а. Переходя, как и прежде, к переменным в повернутой связанной системе координат, получаем систему алгебраических уравнений для нахождения установившихся значений неизвестных функций, которую также будем разрешать, определяя неизвестные ω_x^* , δ_x^* , δ_v^* , δ_u^* , p^* , q^* , γ^* , u_1 и u_2 при заданных α и φ . Тогда система дифференциальных уравнений в вариациях относительно указанного частного решения будет:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x + c_1 \omega_x - \left[\frac{\partial m_{x1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_x}{\partial \alpha} \delta_v^* \right] u + \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\partial m_{x1}}{\partial \varphi} + v_x \delta_u^* \right] v - \\ - v_x \delta_v - c_3 \delta_x = 0; \end{aligned}$$

$$\dot{p} + a_1 p + a_2 u - a_3 \delta_u = 0;$$

$$\dot{q} + a_1 q + a_2 v - a_3 \delta_v = 0;$$

$$\dot{u} + a_4 u + a_5 \delta_u - p + \omega_x^* v = 0; \quad (9.23)$$

$$\dot{v} + a_4 v + a_5 \delta_v - q + \omega_x^* u - \alpha \omega_x = 0;$$

$$\left[1 + \frac{a_5}{a_4} W_2(p) \right] \delta_u + W_1(p) p + W_2(p) u - u_v^* W_3(p) \gamma = 0;$$

$$\left[1 + \frac{a_5}{a_4} W_2(p) \right] \delta_v + W_1(p) q + W_2(p) v - u_u^* W_3(p) \gamma = 0;$$

$$\delta_x + W_4(p) \omega_x = 0;$$

$$\dot{\gamma} - \omega_x = 0,$$

где обозначено

$$\begin{aligned} u_u^* &= u_1 \cos(\gamma^* + \varphi) + u_2 \sin(\gamma^* + \varphi); \\ u_v^* &= -u_1 \sin(\gamma^* + \varphi) + u_2 \cos(\gamma^* + \varphi). \end{aligned} \quad (9.24)$$

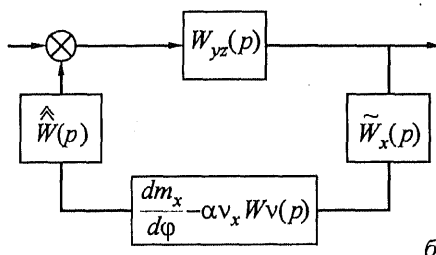
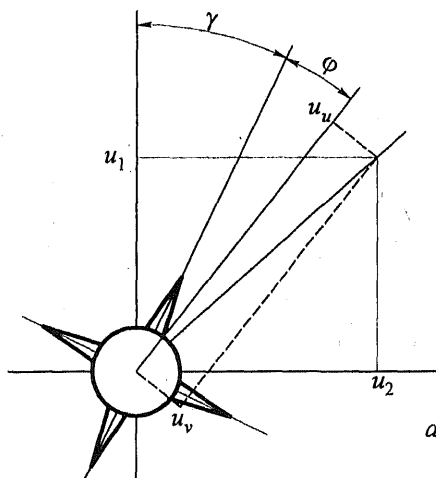


Рис. 9.7

В данном случае рассматриваются такие установившиеся движения, для которых $(\gamma^* + \varphi) = \text{const}$, при этом u_1 и u_2 — проекции неподвижного вектора. Поэтому без ущерба для общности рассмотрения можно принять $\gamma^* + \varphi = 0$, $u_2 = 0$, откуда $u_u^* = u_1$, $u_v^* = 0$, для балансировки в биссекторной плоскости

$\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\gamma^* = -\frac{\pi}{4}$. Как следует из (9.21), при подаче управляющих сигналов в стабилизированной системе координат равновесие с $\omega_x^* = 0$ и $\gamma^* = \text{const}$ для произвольного угла возможно лишь при жесткой стабилизации крена. В общем же случае такое равновесие имеет место лишь при балансировке в плоскостях зеркальной симметрии $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{4}$, где для установившихся значений неизвестных справедливы выражения (9.19). Система уравнений в вариациях распадается на две независимых, при этом уравнения для p , u , δ_u , относящихся к каналу вариации модуля угла атаки, не отличаются от случая управления в связанной системе координат.

Система остальных уравнений, относящихся к каналу вариации фазы угла атаки, исключением промежуточных неизвестных q , δ_v , δ_x и γ сводится к двум уравнениям:

$$\left\{ (p + a_4) + \frac{a_2 + \left[1 + \frac{a_5}{a_4} W(p) \right] + a_3 W_2(p) - a_5 [(p + a_1) W_2(p) - a_2 W_1(p)]}{(p + a_1) \left[1 + \frac{a_5}{a_4} W_2(p) \right] + a_3 W_1(p)} \right\} v =$$

$$= \left\{ 1 + \frac{u_u^*}{\alpha} \frac{a_3 - a_5 (p + a_1)}{(p + a_1) \left[1 + \frac{a_5}{a_4} W_2(p) \right] + a_3 W_3(p)} \frac{W_3(p)}{p} \right\} \alpha \omega_p;$$
(9.25)

$$\left\{ p + c_1 + c_3 W_3(p) - v_x u_u^* \frac{(p + a_1) W_3(p)}{s \left\{ (p + a_1) \left[1 + \frac{a_5}{a_4} W_2(p) \right] + a_3 W_1(p) \right\}} \right\} v =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{\partial m_{x1}}{\partial \varphi} + v_x \delta_u^* - \alpha v_x \frac{(p + a_1) W_2(p) - a_2 W_2(p)}{(p + a_1) \left[1 + \frac{a_5}{a_4} W_2(p) \right] + a_3 W_1(p)} \right\} v,$$

откуда для этого канала легко получить структурную схему, представленную на рис. 9.7, б.

Как видим, отличие от случая управления в связанной системе координат состоит в наличии в замкнутом контуре дополнительного звена — оператора перераспределения команд, передаточная функция которого имеет вид:

$$\hat{W}(p) = 1 + \frac{u_u^*}{\alpha} \frac{[a_3 - a_5(p + a_1)] W_3(p)}{p \left\{ (p + a_1) \left[1 + \frac{a_5}{a_4} W_2(p) \right] + a_3 W_1(p) \right\}}, \quad (9.26)$$

Для компоновок, у которых $v_x(\alpha) \neq 0$ ("утка", «поворотное крыло»), роль передаточной функции изолированного канала крена в схеме рис. 9.7, б играет функция $W_x(p)$, определяемая соотношением:

$$\frac{1}{W(p)} = \frac{1}{W(p)} - v_x(\alpha) u_u^* \times \\ \times \frac{(s + a_1) W_3(p)}{s \left\{ (p + a_1) \left[1 + \frac{a_5}{a_4} W_2(p) \right] + a_3 W_1(p) \right\}}. \quad (9.27)$$

Таким образом, структурная схема, а следовательно, условия устойчивости балансировочных режимов для случаев подачи управляющих сигналов в связанной и стабилизированной системах координат отличаются. Можно сказать, что наличие перераспределения управляющих сигналов приводит к компенсации влияния канала продольно-бокового движения на устойчивость балансировки в пространстве.

Глава 10. МОДЕЛЬ АВТОНОМНОГО КОНТУРА

§ 10.1. ОШИБКИ ОБТЕКАТЕЛЯ И ИХ ПРОЯВЛЕНИЯ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ РАКЕТЫ. СТРУКТУРА АК

Передняя часть ГСН закрывается специальным колпаком — обтекателем. Форма обтекателя выбирается так, чтобы наиболее полно удовлетворить требованиям как со стороны аэродинами-

ки, так и со стороны ГСН. Эти требования противоречивы: так, аэродинамика требует увеличения удлинения обтекателя $\lambda_{\text{нос}}$, радиотехника — его уменьшения.

Вследствие того, что обтекатель имеет криволинейную несферическую форму, а его стенка конечный размер, в сигнале ГСН неизбежно присутствует ошибка, связанная со смещением электрической оси ГСН относительно истинного направления на цель на угол $\Delta\varphi$ порядка $0,5^\circ$ и выше. Зависимость $\Delta\varphi = f(\varphi)$ (φ_k — угол пеленга рис. 10.1, а) называется *статической пеленгационной характеристикой*.

Пусть φ_r — угол пеленга, соответствующий направлению электрической оси ГСН; φ_k — угол пеленга, соответствующий направлению на цель (рис. 10.1, б).

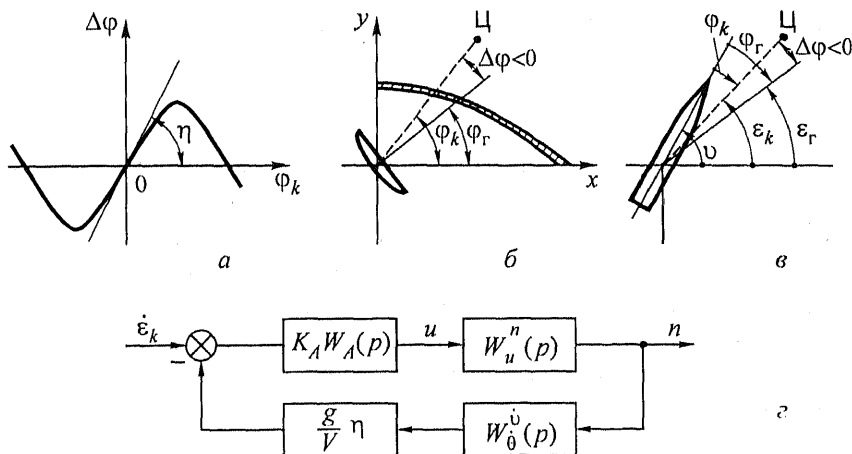


Рис. 10.1

Тогда ошибка

$$\Delta\varphi = \varphi_r - \varphi_k. \quad (10.1)$$

Условимся, что $\Delta\varphi > 0$, если $\varphi_r > \varphi_k$, т.е. ось ГСН опережает направление на цель. Наряду с углами пеленга будем рассматривать углы ε_r и ε_k (рис. 10.1, в), характеризующие соответст-

венно направление электрической оси и направление на цель относительно направлению отсчета. Направление оси ракеты характеризуем углом тангажа ϑ . Тогда

$$\varepsilon_r = \vartheta - \varphi_k = \vartheta - (\varphi_k + \Delta \varphi). \quad (10.2)$$

Угловую скорость электрической оси головки получаем дифференцируя (10.2) по времени

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r &= \frac{d}{dt} [\vartheta - (\varphi_k + \Delta \varphi)] = \frac{d}{dt} (\vartheta - \varphi_k) - \frac{d}{dt} \Delta \varphi = \\ &= \dot{\varepsilon}_k - \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \varphi_k} \frac{d \varphi_k}{dt} = \left(1 + \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \varphi_k} \right) \dot{\varepsilon}_k - \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \varphi_k} \vartheta. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Введем обозначение η — градиент ошибки (тангенс угла наклона кривой $\Delta \varphi(\varphi_k)$), $\eta = \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \varphi_k}$. Тогда

$$\dot{\varepsilon}_r = (1 + \eta) \dot{\varepsilon}_k - \eta \dot{\vartheta}. \quad (10.4)$$

Из (10.4) следует, что при $\eta \neq 0$ имеют место два эффекта: изменяется коэффициент передачи по $\dot{\varepsilon}_k$ появляется ложная составляющая. Поскольку для современных ракет η имеет порядок сотых, то первый эффект несуществен, а второй существен. Последнее следует из того, что $\dot{\varepsilon}$ имеет порядок единиц град/с, а $\dot{\vartheta}$ — десятков град/с, т.е. ложная составляющая может быть больше, чем измеряемый сигнал. С учетом сказанного представим (10.4) в виде

$$\dot{\varepsilon}_r = \dot{\varepsilon}_k - \eta \dot{\vartheta}. \quad (10.5)$$

Составим структурную схему АК, соответствующую наведению ракеты на цель по методу пропорциональной навигации. Этот метод лежит в основе всех методов наведения современных и перспективных ракет. В соответствии с этим методом ускорение j ракеты пропорционально угловой скорости $\dot{\varepsilon}_k$ линии дальности. Имеем

$$j = V \dot{\Theta} = dn = N |\dot{D}| \dot{\varepsilon}_k. \quad (10.6)$$

Здесь N — навигационная постоянная; $\dot{D}$ — скорость сближения ракеты с целью.

Соотношение (10.6) соответствует *идеальному закону наведения*. В действительности передача от $\dot{\epsilon}_k$ к n осуществляется некоторым оператором u , формирующим сигнал на входе КС. Введем

$$\frac{u(p)}{\dot{\epsilon}_k(p)} = K_A W_A(p). \quad (10.7)$$

Сравнивая (10.7) с (10.6), получаем

$$K_A = N |D| / g. \quad (10.8)$$

Структурная схема АК представлена на рис. 10.1, а. Комбинацию $\frac{g}{v} \eta = \bar{\eta}$ назовем *приведенным градиентом*. Рассмотрим основные особенности структурной схемы.

1. АК представляет собой замкнутую систему с гибкой (зависящей от p) обратной связью.

2. Эта обратная связь образуется естественно из-за наличия ошибок обтекателя, т.е. является паразитной (ПОС).

3. Поскольку градиент $\bar{\eta}$ может иметь различные знаки, то исследование характеристик АК необходимо проводить на оба знака $\bar{\eta}$.

4. Обратная связь исчезает (АК — размыкается) только при $\bar{\eta} = 0$.

5. В дальнейшем будем понимать под $\bar{\eta}$ — модуль, а у элемента сравнения ставить оба знака плюс и минус.

§ 10.2. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ, ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И УСТОЙЧИВОСТЬ АК

Ограничимся рассмотрением ракеты идеальной рулевой схемы ($K_n = 0$). тогда $\tau = 0$; $T_\partial = T_V^\alpha$. Обозначим $T_V^\alpha = T_0$ и положим

$$W_1(p) = K_A W_A(p) W_u^n(p) = K_A \prod_{i=1}^k \frac{1}{T_i p + 1}; \quad (10.9)$$

$$W_2(p) = \bar{\eta} (T_0 p + 1).$$

Таким образом, мы полагаем, что АК в прямом тракте содержит k аperiodических звеньев. например, при $k=4$ постоянные времени T_i могут соответствовать: T_1 — ГСН, T_2 — фильтру, $T_{3,4}$ — КС. Структурная схема АК в этом случае имеет вид (рис. 10.2, а).

Для дальнейшего рассуждения удобно ввести

$$W_I(p) = W_1(p) W_2(p). \quad (10.10)$$

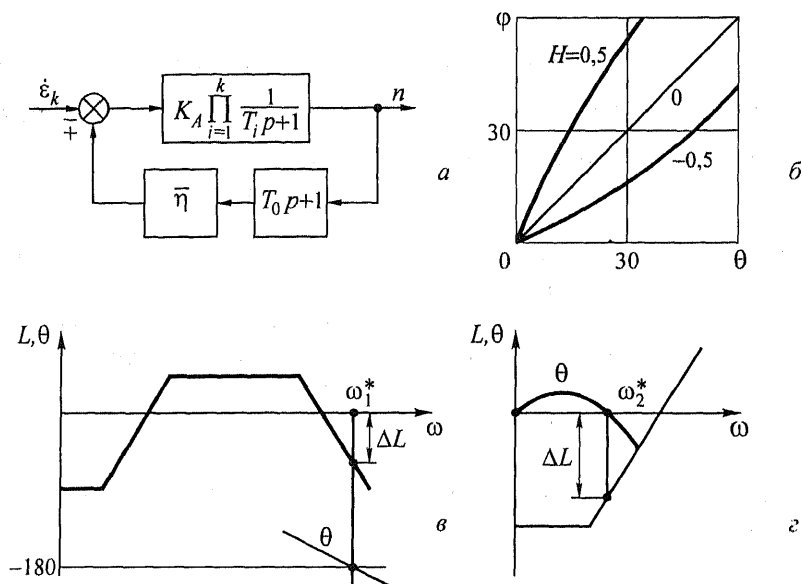


Рис. 10.2

Тогда передаточная функция замкнутой системы (АК)

$$\Phi_{AK}(p) = \frac{1}{W_2(p)} \frac{W_I(p)}{1 \pm W_I(p)} = \frac{1}{W_2(p)} \Phi_I(p). \quad (10.11)$$

Рассмотрим свойства передаточной функции $\Phi_I(p)$.

1. Для отрицательной обратной связи частотные характеристики $\Phi_I(p)$ могут быть получены через частотные характери-

стики передаточной функции $W_1(p)$ с помощью известных [25] номограмм замыкания.

2. Для положительной обратной связи (знак минус в формуле (10.11)) можно пользоваться этими же номограммами, но в обратном порядке, переходя от замкнутой системы к разомкнутой. Однако значительно удобнее использовать графики, связывающие фазу замкнутой системы с амплитудой и фазой разомкнутой. Пусть $\varphi(\omega)$ — фаза замкнутой системы, $\Theta(\omega)$ и $H(\omega)$ — фаза и амплитуда разомкнутой системы. Тогда получим

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{\sin \Theta(\omega)}{\cos \Theta(\omega) \pm H(\omega)}. \quad (10.12)$$

Здесь знак плюс соответствует отрицательной обратной связи, минус — положительной. На рис. 10.2, б приведена зависимость $\varphi(\omega)$, рассчитанная по (10.12) для $H = -0,5; 0; 0,5$. Как видим, отрицательная обратная связь приводит к уменьшению фазового сдвига по сравнению с разомкнутой системой, положительная обратная связь — к увеличению. Общее изменение фазового сдвига при изменении знака обратной связи зависит от амплитуды H . Величина H для малых частот имеет порядок $H = \bar{\eta} \cdot K_A = \eta N \frac{|D|}{V}$. При $\frac{|D|}{V} = 2,5; N = 4; \eta = 0,05$ получим $H = 0,5$. При $\Theta = 45^\circ$ получим $\Delta \varphi \approx 45^\circ$. Таким образом, изменение фазового сдвига замкнутой системы при изменении градиента является существенным и его необходимо учитывать.

Перейдем теперь к анализу устойчивости. Его также необходимо проводить на оба знака градиента. В качестве критерия устойчивости здесь удобно использовать логарифмическую форму частотного критерия. Из (10.11) следует, что анализ устойчивости следует проводить по передаточной функции $W_1(p)$. С учетом (10.9) и (10.10) получим

$$W_1(p) = \frac{\bar{\eta} K_A (T_0 p + 1)}{\prod_1^4 (T_i p + 1)}. \quad (10.13)$$

Начнем со случая отрицательной обратной связи. Легко увидеть, что проблема устойчивости возникает лишь в том случае, когда в прямом тракте имеется не менее четырех

апериодических звеньев, т.е. $k \geq 4$ (контур с меньшим числом звеньев структурно устойчив). Действительно, необходимым условием неустойчивости является пересечение фазой прямой 180° . Поскольку $T_0 \gg T_i$, то общий фазовый сдвиг $\varphi_m = 90 - 4 \cdot 90 = -270^\circ$ и пересечение обеспечивается. Асимптотическая частотная характеристика приведена на рис. 10.2, в.

Пусть ω_1^* частота, соответствующая значению фазы $\varphi = -180^\circ$. $\Delta L(\omega_1^*) < 0$ — запас по амплитуде. Потере устойчивости соответствует $\Delta L(\omega_1^*) \geq 0$. Обычно $\omega_1^* \approx 1 \text{ с}^{-1}$.

Перейдем теперь к случаю положительной обратной связи. Отметим, что изменение знака обратной связи не изменяет вида частотных характеристик, а изменяет формулировку критерия. В этом случае необходимо рассматривать частоту ω_2^* , соответствующую нулевому фазовому сдвигу, т.е. $\varphi(\omega_2^*) = 0$. Величина

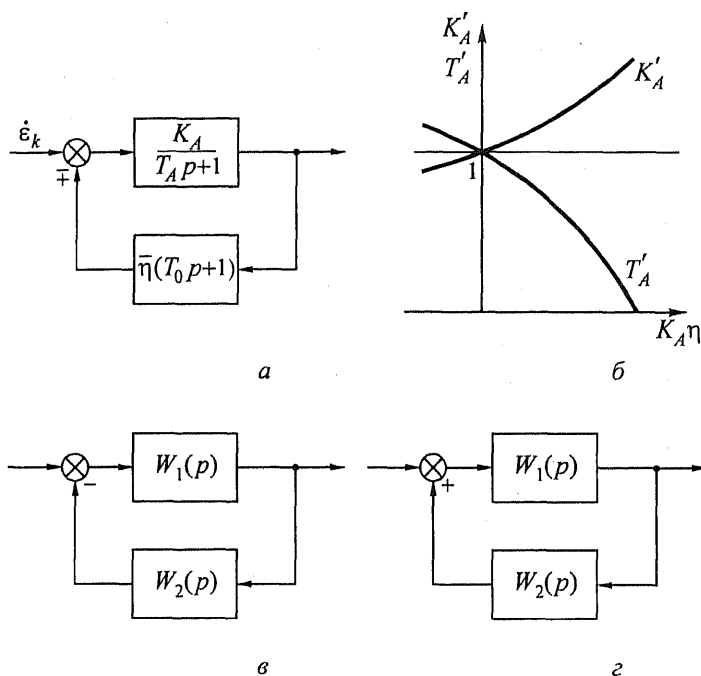


Рис. 10.3

$\Delta L(\omega_2^*) < 0$ — запас по амплитуде. Потере устойчивости соответствует $\Delta L(\omega_2^*) \geq 0$. Обычно $\omega_2^* = 1 \text{ с}^{-1}$ (рис. 10.2, з). Таким образом, частоты ω_1^* и ω_2^* разнесены ~ на декаду.

Рассмотрим в качестве примера простейшую структуру автономного контура (рис. 10.3, а). Здесь, как и ранее плюс, соответствует отрицательной обратной связи, знак минус — положительной. Передаточная функция замкнутой системы имеет вид $\Phi_A(p) = \frac{K_A}{T_A' p + 1}$, где $K_A = \frac{K_A}{1 \pm \bar{\eta} K_A}$, $T_A' = \frac{T_A \pm K_A \bar{\eta} T_0}{1 \pm \bar{\eta} K_A}$. Зависимости $K_A' = f(K_A \bar{\eta})$ и $T_A' = f(K_A \bar{\eta})$ приведены на рис. 10.3, б.

§ 10.3. ПУТИ СНИЖЕНИЯ ВЛИЯНИЯ ПОС. ИНВАРИАНТНЫЙ АК

Поскольку, как показано выше, влияние ПОС является весьма существенным, необходимо рассмотреть пути снижения. Их два:

1. *Компенсация ошибок* (полная или частичная) с помощью специальных связей (вплоть до полного воспроизведения топографии ошибок для каждого конкретного обтекателя). Этот путь широко используется в практике отработки ракет четвертого поколения, имеющих БЦВМ.

2. *Обеспечение инвариантности АК* (полной или частичной) к изменению знака градиента $\bar{\eta}$, причем эта инвариантность должна обеспечиваться при отсутствии информации о величине и знаке η . Остановимся подробнее на втором пути, который до настоящего времени в реальных разработках еще не использовался. Пусть (рис. 10.3, в, г) $\Phi_I^-(p)$ и $\Phi_{II}^+(p)$ — передаточные функции АК, причем $\Phi_I^-(p)$ соответствует отрицательной обратной связи, $\Phi_{II}^+(p)$ — положительной. Найдем разность этих передаточных функций:

$$\Delta \Phi(p) = \Phi_{II}^+(p) - \Phi_I^-(p) = 2 W_1(p) \frac{W_1(p) W_2(p)}{1 - W_1(p) W_2(p)}. \quad (10.14)$$

Рассмотрим случай, когда $W_1(p) W_2(p) \neq 1^*$.

Положив $p = j\omega$, рассмотрим условие $\Delta\Phi(j\omega) = 0$. Имеем

$$W_1(j\omega) W_2(j\omega) = 0. \quad (10.15)$$

Положим $W_1(j\omega) = A_1 + jB_1$; $W_2(j\omega) = a_2 + jB_2$. Из (10.14) получим

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(j\omega) &= (A_1 + jB_1)(A_2 + jB_2) = \\ &= A_1 A_2 - B_1 B_2 + j(A_1 B_2 + A_2 B_1). \end{aligned} \quad (10.16)$$

Фазовая характеристика передаточной функции $\Delta\Phi(j\omega)$ на основании (10.16)

$$\operatorname{tg} \varphi_{\Delta} = \frac{A_1 B_2 + A_2 B_1}{A_1 A_2 - B_1 B_2}. \quad (10.17)$$

Полагая в (10.17) $\varphi_{\Delta} = 0$, получим

$$\frac{B_1}{A_1} + \frac{B_2}{A_2} = \operatorname{arctg} \varphi_1(\omega) + \operatorname{arctg} \varphi_2(\omega) = 0,$$

или

$$\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) = 0. \quad (10.18)$$

Подведем итоги. Если существует частота $\omega = \omega^*$ (их может быть и несколько), на которой выполняется условие (10.18), то АК оказывается нечувствительным (инвариантным) по отношению к знаку η , точнее инвариантным на частоте ω^* .

Поскольку $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$ имеют разные знаки: $\varphi_1 < 0$ (в прямом тракте стоит звено с интегрирующими свойствами), а $\varphi_2 > 0$ (в обратной связи стоит звено с дифференцирующими свойствами), то выполнение условия (10.18) оказывается принципиально возможным.

* Условие $W_1(p)W_2(p)=1$ приводит к $W_2(p)=1/W_1(p)$, т.е. $W_2(p)$ и $W_1(p)$ — обратные передаточные функции.

Физически условие (10.18) означает, что потеря фазы в прямом тракте полностью компенсируется ее восстановлением в обратной связи. Отметим, и это важно, что условие (10.18) выполняется лишь на одной частоте ω^* . Однако, если частота ω^* удовлетворяет некоторым дополнительным требованиям, то этого, как правило, оказывается достаточным для обеспечения требуемой инвариантности (разумеется приближенной).

Рассмотрим теперь вопрос о количестве частот, на которых выполняется условие (10.18).

Представим передаточную функцию $W_I(p)$ в виде

$$W_I(p) = \frac{b_l p^l + \dots + b_1 p + 1}{a_m p^m + \dots + a_1 p + 1}. \quad (10.19)$$

Здесь $m \geq l$. Полагая $p = j\omega$, получаем

$$W_I(j\omega) = \frac{A(\omega) + jB(\omega)}{C(\omega) + jD(\omega)}. \quad (10.20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 1 - b^2 \omega^2 + b_4 \omega^4 - \dots; \\ B(\omega) &= b_1 \omega - b^3 \omega^3 + b_5 \omega^5 - \dots; \\ C(\omega) &= 1 - a^2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots; \\ D(\omega) &= a_1 \omega - a^3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - \dots \end{aligned} \quad (10.21)$$

На основании (10.20) и (10.17) условие $\Phi_\Delta = 0$ может быть представлено в виде

$$B(\omega) C(\omega) - A(\omega) D(\omega) = 0 \quad (10.22)$$

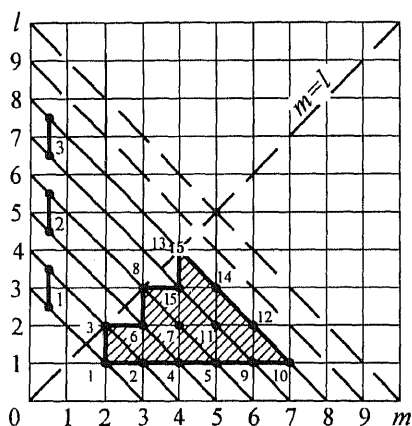
Подставляя (10.21) в (10.22), получаем после сокращения на ω

$$\begin{aligned} C_0 + C_2 \omega^2 + C_4 \omega^4 \dots C^{2n} \omega^{2n} &= 0; \\ C_0 &= b_1 - a_1; \\ C_2 &= a_3 - b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1; \\ &\dots \end{aligned} \quad (10.23)$$

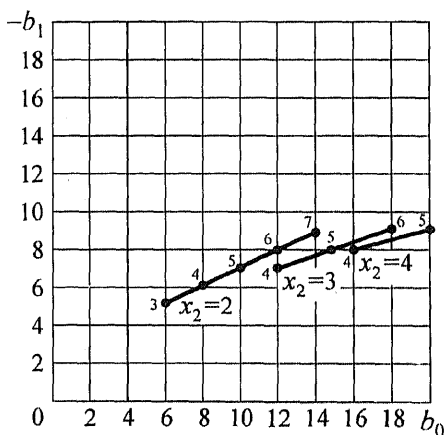
Таким образом, получили уравнение степени n относительно $\omega^2 = x$. Можно показать, что связь величин n , m , l устанавливается следующей зависимостью:

$$n = \begin{cases} \frac{1}{2} (m + l) - 1 & \text{при } \Sigma = m + l = 2(k + 1); \\ \frac{1}{2} (m + l) - 1 & \text{при } \Sigma = m + l = 2k + 1. \end{cases} \quad (10.24)$$

Соотношения (10.24) удобно представить в виде диаграммы, которую назовем ml -диаграммой (рис. 10.4, а). Здесь по оси абсцисс приведены значения $m = 0, 1, \dots, 8$, по оси ординат значения $l = 0, 1, \dots, 8$. Одинаковые значения l и m соединяем прямыми: 3 — 3; 4 — 4; 5 — 5; 6 — 6; 7 — 7. В узлах целочисленной сетки вертикальных и горизонтальных прямых приведено пятнадцать точек, соответствующих: $n = 1$ (прямые 3 — 3 и 4 — 4), $n = 2$ (прямые 5 — 5 и 6 — 6), $n = 3$ (прямые 7 — 7 и 8 — 8). Область расположения этих точек, соответствующая условию $m < l$, $l \geq 1$, заштрихована.



а



б

Рис. 10.4

Как видим, степень уравнения (10.23) повышается сравнительно медленно и для большинства случаев достаточно рас-

смагивать $n \leq 3$. В табл. 10.1 приведены координаты пятнадцати точек, лежащих в заштрихованной области.

Таблица 10.1

№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
l	1	1	2	1	1	2	2	3	1	1	2	2	3	3	4
m	2	3	2	4	5	3	4	3	6	7	5	6	4	5	4
Σ	3	4	4	5	6	5	6	6	7	8	7	8	7	8	8
n	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3

Рассмотрим уравнение (10.23) при $n \leq 3$, положив $x = \omega^*$. Имеем

$$a_0 + a_1 x = 0;$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 0; \quad (10.25)$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x_3 = 0.$$

Нас будет интересовать число положительных корней уравнения (10.25). Ответ на этот вопрос дает *теорема Штурма* и *правило Декарта*. Последнее формулируется следующим образом: число положительных корней уравнения $f(x) = 0$ не больше числа перемен знаков в ряду коэффициентов многочлена $f(x)$ и может отличаться от него на четное число. Можно показать, что максимальное число корней, равное n , требует следующего расположения знаков корней:

(+ -) для $n = 1$; (+ - +) для $n = 2$ и (+ - + -) для $n = 3$.

Рассмотрим еще вопрос о корнях полинома третьей степени с целочисленными коэффициентами.

Рассмотрим полином третьей степени (третье уравнение (10.25)) и положим $a_3 = 1$. Пусть коэффициенты a_i , $i = 1; 2$ целочисленны, а полином имеет три положительных целочис-

ленных корня, причем младший из них равен единице ($x_1 = 1$). Найдем для этого случая связь между корнями $x_{2,3}$ и коэффициентами a_i . Используя условие $x_1 = 1$, представим полином в виде

$$f(x) = (x - 1)(x^2 + b_1x + b_0). \quad (10.26)$$

Известно, что коэффициенты b_j , $j = 0, 1$ также целочисленны. На основании (10.25) и (10.26) получим связь между коэффициентами a_i и b_j :

$$a_0 = b_0; \quad a_1 = b_0 - b_1; \quad a_2 = b_1 - 1. \quad (10.27)$$

В соответствии с теоремой Виета для квадратного трехчлена (10.26) имеем

$$x_2 + x_3 = -b_1; \quad x_2 x_3 = b_0. \quad (10.28)$$

Равенства (10.28) устанавливают искомую связь между корнями и коэффициентами b_j . Отметим, что корни являются делителями свободного члена.

Построим на плоскости коэффициентов b_1, b_2 целочисленную сетку. Очевидно, что корни $x_{2,3}$ будут лежать в узлах этой сетки. На рис. 10.4, б отмечены узлы, содержащие корни $x_2 = 2$ ($x_3 = 3; 4; 5; 6; 7$); $x_2 = 3$ ($x_3 = 4; 5; 6$); $x_2 = 4$ ($x_3 = 4; 5$). Эти узлы соединены линиями $x_2 = \text{const}$ и $x_3 = \text{const}$. Таким образом, связь между коэффициентами b_j и корнями $x_{2,3}$ установлена. Для контроля вычислений можно использовать условие $\sum_{i=0}^2 a_i = -1$. Возвратимся теперь к условию (10.18). Представим

$$W_I(p) = \frac{K_A(T_0 p + 1) \prod_{i=1}^{l-1} (T_i p + 1)}{\bar{\eta} \prod_{k=1}^m (T_k p + 1)}. \quad (10.29)$$

Здесь звено с постоянной времени T_0 выделено в связи с тем, что постоянная T_0 рассматривается как настроечный параметр. Очевидно, что задача *настройки* заключается в том, чтобы при известных τ_i и T_k определить из условия равенства нулю значения $\text{Arg}\{W_I(j\omega)\}$ при $\omega = \omega^*$. Эта задача может быть решена как графически, так и аналитически. При графическом способе решения строим суммарную частотную характеристику известной части системы с передаточной функцией

$$W_{\text{изв.}}(p) = \frac{W_I(p)}{T_0 p + 1}. \quad (10.30)$$

Определим фазовую характеристику известной части системы на частоте ω^* , т.е. $\varphi^*(\omega^*)$. Тогда искомое значение настроечного параметра

$$T_0 = \frac{1}{\omega^*} \text{tg } \varphi_{\text{изв.}}(\omega^*). \quad (10.31)$$

Теперь рассмотрим пути реализации инвариантного АК. Как показано выше в § 6.3, для ракеты с *двумя* парами органов управления имеет место соотношение

$$T_{\vartheta}^* = T_0 = T_V^{\alpha} \frac{(1 - K_m)}{1 - K_m(1 - K_{n1})}. \quad (10.32)$$

Из (10.32) следует, что меняя K_m управляем величиной T_{ϑ}^* . Таким образом, появляется возможность (по крайней мере, принципиальная) на основании (10.31) и (10.32) обеспечить инвариантность АК на некоторой наперед заданной частоте $\omega = \omega^*$.

Глава 11. МОДЕЛЬ КОНТУРА НАВЕДЕНИЯ

§ 11.1. УРАВНЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ РАКЕТЫ С ЦЕЛЮ

Начнем с вывода уравнения кинематической связи ракеты с целью [7]. Пусть (рис. 11.1, а) D — дальность между ракетой и целью; ε — угол наклона линии дальности; $\dot{\varepsilon}$ — угловая скорость линии дальности; $n^\perp$, $n_\Pi^\perp$ — проекции перегрузки ракеты и цели на нормаль к линии дальности; φ — угол пеленга; q — курсовой угол цели. Ограничимся случаем малых углов φ и q и положим, что перегрузки, перпендикулярные векторам дальности и скорости ракет, совпадают. Тогда уравнение кинематической связи может быть представлено в виде

$$D\ddot{\varepsilon} + 2\dot{D}\dot{\varepsilon} = g(n_\Pi - n). \quad (11.1)$$

Рассмотрим закон изменения дальности от времени (рис. 11.1, б)

$$D(t) = D_0 - |\dot{D}|t = |\dot{D}|(t_0 - t); \quad t_0 = \frac{D_0}{|\dot{D}|}. \quad (11.2)$$

Подставляя (11.2) в (11.1) получаем

$$(t_0 - t)\ddot{\varepsilon} - 2\dot{\varepsilon} = \frac{g}{|\dot{D}|}(n_\Pi - n). \quad (11.3)$$

Уравнение (11.3) при заданном движении цели $n_\Pi(t)$ и выбранном методе наведения позволяет определить закон изменения угловой скорости линии дальности по времени. Уравнение соответствует нестационарному звену (коэффициент при второй производной зависит от текущего времени t). Поскольку коэффициент при первой производной отрицателен, это звено неустойчиво (нарушается условие Гурвица о положительности всех коэффициентов).

Выберем метод наведения ракеты на цель.

При наведении по методу пропорциональной навигации (сближения) связь между угловой скоростью вектора дальности и боковой перегрузкой ракеты имеет вид

$$n_{\text{зад}} = K_A W_A(p) \dot{\varepsilon} = \frac{N |\dot{D}|}{g} W_A(p). \quad (11.4)$$

Здесь $n_{\text{зад}}$ — заданная боковая перегрузка ракеты; N — навигационная постоянная; $W_A(p)$ — передаточная функция АК.

Структурная схема КН приведена на рис. 11.1, *в*. В настоящем разделе рассмотрим безынерционный автономный контур $W_A(p) = 1$. С учетом этого получим, подставляя (11.4) в (11.3)

$$(t_0 - t) \ddot{\epsilon} + (N - 2) \dot{\epsilon} = \frac{g}{|D|} n_{\text{ц}}(t). \quad (11.5)$$

Уравнение (11.5) связывает угловую скорость линии дальности с законом движения цели $n_{\text{ц}}(t)$. Заметим, что при $N > 2$ уравнение (11.5) в отличие от (11.3) является устойчивым. Таким образом, метод наведения (11.4) обеспечивает устойчивость наведения ракеты на цель. Решая уравнение (11.5) относительно $\dot{\epsilon}_{\text{ц}}(t)$ при $n_{\text{ц}} = \text{const}$, $\dot{\epsilon}(0) = \dot{\epsilon}_0$ как функции от относительного времени $t = \frac{t}{t_0}$, получим

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}(t) = \dot{\epsilon}_1(t) + \dot{\epsilon}_2(t) = \dot{\epsilon}_0(1 - \bar{t})^{N-2} + \\ + \frac{g}{|D|} \frac{n_{\text{ц}}}{(N-2)} \left[1 - (1 - \bar{t})^{N-2} \right]. \end{aligned} \quad (11.6)$$

В решении (11.6) первая составляющая $\dot{\epsilon}_1(t)$ связана с обработкой начальной ошибки, вторая составляющая $\dot{\epsilon}_2(t)$ — с маневром цели. Характер зависимости этих составляющих от относительного времени $\bar{t}$ для различных значений N приведены на рис. 11.1, *г* и *д*.

Как видим, для обеспечения удовлетворительного протекания зависимостей $\dot{\epsilon}_1(t)$ и $\dot{\epsilon}(t)$ необходимо взять $N = 3 + 4$. Решая (11.5) относительно перегрузки ракеты, получаем при $\bar{t} = 1$:

$$\bar{n} = \frac{n}{n_{\text{ц}}} = \frac{N}{N-2}. \quad (11.7)$$

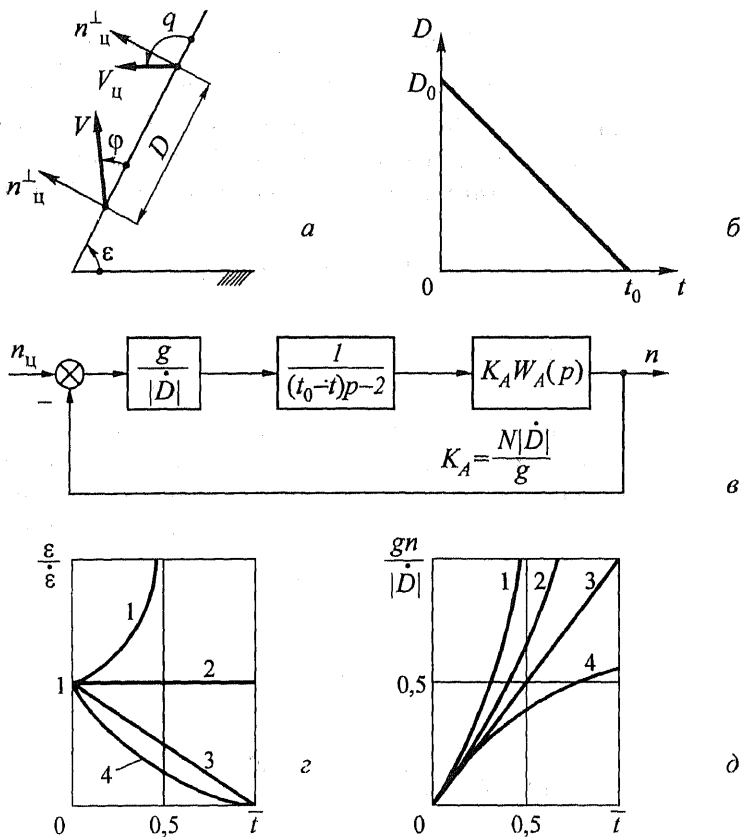


Рис. 11.1

Как следует из (11.7) при $N=3$ имеем $\bar{n}=3$, при $N=\infty - \bar{n}=1$. Таким образом, при конечном N перегрузка ракеты всегда больше, чем перегрузка маневрирующей цели.

Преобразуем структурную схему КН. Поскольку она содержит нестационарное звено, вообще говоря, следует пользоваться параметрическими передаточными функциями, проводя исследования при различных значениях параметра $\bar{t}$. Однако при формальном преобразовании структуры с нестационарным звеном можно обращаться, как с обычным стационарным.

Передаточную функцию замкнутой системы от $n_{\text{ц}}$ до n получим в виде

$$\Phi_{n_{\text{ц}}}^n(p) = \frac{N}{(t_0 - t)p + N - 2}. \quad (11.8)$$

Отсюда при $p = 0$ получаем (11.7).

**§ 11.2. ТОЧНОСТЬ НАВЕДЕНИЯ РАКЕТЫ НА ЦЕЛЬ.
СИСТЕМАТИЧЕСКАЯ И СЛУЧАЙНАЯ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ПРОЛЕТА.
ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ
НАВИГАЦИОННОЙ ПОСТОЯННОЙ**

Теперь перейдем к анализу точности наведения ракеты на цель. Точность характеризуется величиной пролета $h(t)$. Под мгновенным (текущим) пролетом будем понимать кратчайшее расстояние, на котором ракета пролетит относительно цели, если, начиная с данного момента времени t ракета и цель будут двигаться прямолинейно с постоянными скоростями. Из рис. 11.2, а получим, определяя $\sin \lambda$ из треугольников дальностей и скоростей

$$\sin \lambda = \frac{h}{D} = \frac{D \dot{\epsilon}}{V_{\text{отн}}}. \quad (11.9)$$

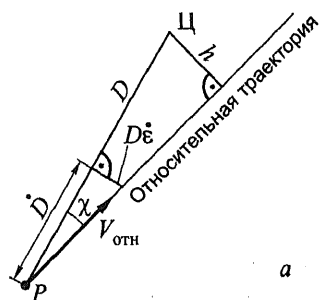
Здесь обозначено $V_{\text{отн}}$ — скорость ракеты относительно цели. Начнем с определения систематического (динамического) пролета, связанного с маневром цели. Для этого преобразуем (11.9):

$$h = \frac{D^2 \dot{\epsilon}}{V_{\text{отн}}} = \left(\frac{D}{\dot{D}} \right)^2 \frac{|\dot{D}|}{V_{\text{отн}}} |\dot{D}| \dot{\epsilon}. \quad (11.10)$$

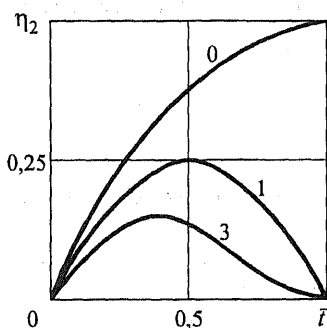
Учитывая $\left(\frac{D}{\dot{D}} \right)^2 = t_0^2 (1 - \bar{t})^2$ и полагая $\frac{|\dot{D}|}{V_{\text{отн}}} = 1$, получаем с учетом (11.6)

$$h_2(\bar{t}) = \frac{j_{\text{ц}} t_0^2}{N - 2} \left[(1 - \bar{t})^2 - (1 - \bar{t})^N \right]. \quad (11.11)$$

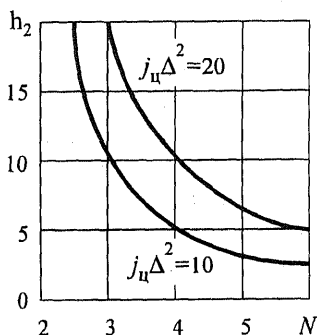
Здесь h_2 — составляющая пролета от маневра цели; $j_{\text{ц}} = g n_{\text{ц}}$ — ускорение цели.



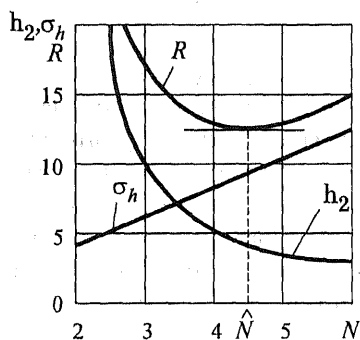
a



б



в



г

Рис. 11.2

Из (11.11) получим безразмерный пролет (коэффициент пролета от маневра цели $\eta_2 = \frac{h_2}{j_{\text{ц}} t_0^2}$):

$$\eta_2(\bar{t}) = \frac{1}{N-2} \left[(1-\bar{t})^2 - (1-\bar{t})^N \right]. \quad (11.12)$$

Рассмотрим подробно зависимость (11.12) при различных N .

Для случая $N=0$, соответствующего неуправляемой ракете, получим

$$\eta_2(\bar{t}) = \frac{1}{2} \left[(1-\bar{t})^2 - 1 \right].$$

Отсюда при $\bar{t}=1$ получим $\eta_2 = \frac{1}{2}$, $h_2 = \frac{j_{\text{ц}} t_0^2}{2}$. Таким образом, пролет в случае $N=0$ определяется по формуле равноускорен-

ного движения. При этом под t_0 понимается время от начала маневра цели до встречи ракеты с целью. Например, при $t_0 = 10$ с, $j_{\Pi} = 50$ м/с² получим $h_2 = 2,5$ км.

Теперь перейдем к рассмотрению случаев $N \neq 0$.

Для $N = 1$ получим $\eta_2(\bar{t}) = \bar{t}(1 - \bar{t})$. Отсюда следует, и это относится к случаю произвольного целого N , что коэффициент $\eta_2(\bar{t})$ обращается в ноль как при $\bar{t} = 1$, так и при $\bar{t} = 0$. Условие $\eta_2(\bar{t}) = 0$ означает, что наличие управления обеспечивает нулевой пролет даже при $N = 1$. Это важное свойство управления по методу пропорциональной навигации. Зависимости $\eta_2(\bar{t})$ для различных N приведены на рис. 11.2, б. Отметим, что случай $N = 2$ требует специального исследования, так как приводит к неопределенности. Анализ показывает, что $\eta_{2\max} = 0,31$; $\bar{t}_{\max} = 0,39$. Однако условие $\bar{t} = 1$ в реальных системах не обеспечивается, что связано с так называемым явлением «ослепления» ГСН. (Это относится ко всем типам ГСН).

Пусть ослепление происходит в момент $\bar{t}_s < 1$. Пусть Δ — оставшееся время (время неуправляемого полета), тогда

$$\Delta = t_0(1 - \bar{t}_s). \quad (11.13)$$

С учетом эффекта ослепления формула для пролета приводится к виду

$$h_2 = \frac{\Delta j_{\Pi}}{N - 2} \left[1 - (1 - \bar{t})^{N-2} \right]. \quad (11.14)$$

Отсюда при $(1 - \bar{t})^{N-2} \ll 1$ получим

$$h_2 = \frac{j_{\Pi} \Delta}{N - 2}. \quad (11.15)$$

Зависимости $h_2 = f(N)$ при различных значениях $j_{\Pi} \Delta^2$ приведены на рис. 11.2, в. Таким образом, систематическая составляющая пролета уменьшается с ростом N .

Перейдем теперь к исследованию *случайной* составляющей пролета. Сигнал, снимаемый с выхода ГСН одновременно с полезной составляющей неизбежно содержит различного рода шумы, зависящие от типа ГСН. С достаточной точностью можно

считать, что уровень шума от дальности до цели не зависит (угловые шумы возрастают на малых дальностях, шумы приемника на больших). Примем далее, что спектральная плотность угловых колебаний головки есть результат преобразования белого шума апериодическим звеном с постоянной T_s , т.е.

$$(T_s p + 1) \zeta = X(t). \quad (11.16)$$

В (11.16) $X(t)$ — стационарный случайный процесс типа белого шума. Его корреляционная функция

$$K(t_1, t_2) = \overline{X(t_1) X(t_2)} = S_0 \delta(t_2, t_1) = S_0 \delta(\tau). \quad (11.17)$$

Здесь $\delta(\tau)$ — дельта функция, зависящая от разности моментов времени.

С учетом (11.16) система уравнений для определения случайной составляющей в сигнале $\dot{\varepsilon}(t)$ может быть записана в виде

$$(t_0 - t) \ddot{\varepsilon} + (N - 2) \dot{\varepsilon} = N \dot{\zeta}; \quad (11.18)$$

$$T_s \ddot{\zeta} + \zeta = X(t).$$

Приближенное решение (11.18) (промежуточные весьма трудоемкие выкладки опускаем)

$$\left[\overline{\dot{\varepsilon}(t)} \right]^2 = \frac{N^2 S_0}{2 T_s} \frac{1 - e^{-\frac{2t}{T_s}}}{(t_0 - t)^2}. \quad (11.19)$$

Среднеквадратическое значение

$$\sigma_{\dot{\varepsilon}}(t) = \sqrt{\left[\overline{\dot{\varepsilon}(t)} \right]^2} = \frac{1}{2} N \sqrt{S_0} \omega_s \frac{\sqrt{1 - e^{-2t \omega_s}}}{t_0 - t}. \quad (11.20)$$

Здесь обозначено $\omega_s = 1 / T_s$. Из (11.20) следует, что величина $\sigma_{\dot{\varepsilon}}$ равна нулю при $t = 0$ и непрерывно нарастает при увеличении t . При $t \rightarrow t_0$, $\sigma_{\dot{\varepsilon}} \rightarrow \infty$.

Найдем теперь случайную составляющую пролета.

Учитывая $\sigma_h(t) = (t_0 - t) |\dot{D}| \sigma_{\dot{\varepsilon}}$, получаем

$$\sigma_h(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} N \sqrt{S_0 \omega_s} \sqrt{1 - e^{-2t_0 \omega_s}} \Delta. \quad (11.21)$$

Из (11.21) следует: 1) $\sigma_h(0) = 0$, 2) $\sigma_h(t_0) = 0$, 3) $\lim_{T_s \rightarrow 0} \sigma_h = \infty$ (фильтрующих свойств кинематики недостаточно). Пренебрегая в (11.21) величиной $e^{-2t_0 \omega_s} \ll 1$, получаем

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{1}{2} S_0 \omega_s} |\dot{D}| N \Delta. \quad (11.22)$$

Таким образом, σ_h пропорционально навигационной постоянной N времени, Δ неуправляемого полета, скорости $\dot{D}$ сближения, величине $\sqrt{\frac{S_0 \omega_s}{2}}$.

Подведем итоги. Мы получили выражения для систематической и случайной составляющих пролета и показали, что при увеличении N систематическая составляющая уменьшается, случайная — пропорционально возрастает. В силу линейности рассматриваемого уравнения справедлив принцип суперпозиции решений. Ограничиваясь для простоты рассмотрением одномерного случая (правильнее рассматривать двумерный случай рассеивания на плоскости и использовать закон Релея, для которого эквивалентное значение $\sigma_b = \sqrt{\sigma_h^2 + \frac{1}{2} h^2}$), определяем максимальное значение пролета по выражению:

$$R = H_2 + k \sigma_h; \quad k = 2.$$

Полагая

$$h_2 = \frac{A}{N-2}; \quad \sigma_h = BN,$$

где $A = g n_{\Pi} \Delta^2$; $B = \sqrt{\frac{1}{2} S_0 \omega_s} |\dot{D}| \Delta$, получим

$$R = \frac{A}{N-2} + 2BN. \quad (11.23)$$

Поскольку первое слагаемое падает с ростом N , а второе растет — величина R имеет минимум.

Определяя оптимальное значение $\hat{N}$ из условия $\frac{\partial R}{\partial N} = 0$, получаем

$$\hat{N} = 2 + \sqrt{\frac{A}{2B}}. \quad (11.24)$$

Как следует из (11.24), $\hat{N}$ растет при увеличении отношения $\frac{A}{B}$. Так, при $\frac{A}{B}=2$ имеем $\hat{N} = 3$; при $\frac{A}{B}=8$ имеем $\hat{N} = 4$. На рис. 11.2, з приведена зависимость $R(n)$, рассчитанная по (11.23). Таким образом, мы показали, что в безынерционном контуре существует оптимальное значение N , обеспечивающее минимальное значение максимального пролета, определяемого по (11.23).

§ 11.3. ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИОННОСТИ КОНТУРА НАВЕДЕНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОЧНОСТИ

Рассмотрим теперь АК с передаточной функцией $W_A(p) \neq 1$. Естественно, что инерционность контура оказывает влияние на характеристики точности, а именно, наличие инерционности приводит к увеличению систематической ошибки и уменьшению случайной. Поскольку простых аналитических методов определения параметров точности для инерционного АК не существует, основным инструментом исследования является математическое моделирование на аналоговых и цифровых ЭВМ.

Как показывают материалы моделирования, влияние инерционности проявляется как через структуру передаточной функции АК, так и через ее параметры. Вместе с тем для оперативного анализа результатов желательно это влияние связать с одним параметром, который назовем *универсальным*. С целью установления этого параметра рассмотрим различные операторы АК.

Ограничимся рассмотрением следующих простейших операторов:

$$W_A^{(1)}(p) = \frac{1}{T_1 p + 1}; \quad W_A^{(2)}(p) = \frac{1}{(T_{21} p + 1)(T_{21} p + 1)}; \quad (11.25)$$

$$W_A^{(3)}(p) = \frac{1}{(T_{31} p + 1)(T_{32} p + 1)(T_{33} p + 1)}.$$

Как видим, оператор $W_A^{(1)}(p)$ характеризуется одним параметром T_1 , оператор $W_A^{(2)}(p)$ — двумя параметрами T_{21} , T_{22} , оператор $W_A^{(3)}(p)$ — тремя параметрами T_{31} , T_{32} , T_{33} .

Очевидно, что ни одна из постоянных времени операторов (11.25) не может быть использована в качестве универсального параметра. Начнем с установления эквивалентности операторов $W_A^{(1)}(p)$ и $W_A^{(2)}(p)$ по систематической составляющей пролета. С этой целью определим по результатам моделирования зависимости $\eta_2^{(1)}$ и $\eta_2^{(2)}$ для ряда значений параметров T_1 и T_{21} , T_{22} . Анализ этих результатов показывает, что эквивалентность операторов $W^{(1)}(p)$ и $W^{(2)}(p)$ обеспечивается при условии

$$T_1 = \frac{T_{21} + T_{22}}{1 - T_{21} T_{22} \omega_0^2}. \quad (11.26)$$

Здесь ω_0 — некоторая характерная частота КН, при которой обеспечивается по совокупности наилучшее приближение кривых $\eta_2^{(2)}(T_{21}, T_{22})$ и $\eta_2^{(1)}(T_1)$. Как показывают результаты моделирования, значение $\omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}$. Отсюда следует, что в качестве универсального параметра может рассматриваться эквивалентная постоянная времени оператора $W^{(1)}(p)$, удовлетворяющая условию (11.26), т.е. $T_0 = T_1$. Непосредственно из метода определения T_0 следует, что в этом случае операторы $W^{(1)}(p)$ и $W^{(2)}(p)$ обеспечивают одинаковую систематическую ошибку, т.е. $\eta_2^{(2)} = \eta_2^{(1)}$. Как правило, приближение осуществляется по значению $\eta_{2\max}^{(2)} = \eta_{2\max}^{(1)}$. Далее из структуры (11.26) следует, что в качестве универсального параметра может использоваться величина

фазового сдвига звена управления (АК) на частоте ω_0 . Действительно,

$$\varphi^{(2)}(\omega_0) = \operatorname{arctg} \frac{T_{21} + T_{22}}{1 - T_{21} T_{22} \omega_0^2} = \varphi^{(1)}(\omega_0) = \operatorname{arctg} \omega_0 T_3. \quad (11.27)$$

Откуда следует (11.26).

Отметим, что фазовый сдвиг на любой промежуточной частоте, отличной от ω_0 , универсальным параметром не является. Отметим, что значение ω_0 зависит от N . В первом приближении можно получить

$$\omega_0 N = C; \quad C = 3 \text{ с}^{-1}. \quad (11.28)$$

Из (11.28) при $N = 3$, получим $\omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}$. Отметим, что амплитудные характеристики эквивалентных систем на частоте ω_0 оказываются различными, однако это различие, как правило, невелико (обычно не более 2 — 3 дБ). Рассмотрим теперь, с чем связана установленная закономерность.

Уравнение (11.5) при $W_A(p) \neq 1$ имеет вид

$$(t_0 - t) \ddot{\varepsilon} + [N W_A(p) - 2] \dot{\varepsilon} = g_{\Pi}; \quad g_{\Pi} = \frac{g n_{\Pi}}{|D|}. \quad (11.29)$$

Подставляя в (11.29) $W_A(p) = W_A^{(1)}(p)$ и учитывая

$$[N W_A^{(1)}(p) - 2] = \left[\frac{N}{T_1 p + 1} - 2 \right] = (N - 2) W_0(p);$$

$$W_0(p) = \frac{1 - \tau p}{1 + T p}; \quad \tau = \gamma T; \quad \gamma = \frac{2}{N - 2}, \quad (11.30)$$

получаем (11.29) в виде

$$(t_0 - t) \ddot{\varepsilon} + W_0(p) \dot{\varepsilon} = g_{\Pi}. \quad (11.31)$$

Очевидно, что в случае $W_A(p) = 1$ (безынерционный контур) оператор $W_0(p) = 1$.

Таким образом, влияние инерционности непосредственно связано со свойствами оператора (11.30).

Для интересного частного случая $N = 4$ имеем $\gamma = 1$; $\tau = T$, следовательно:

$$W_0(p) = \frac{1 - Tp}{1 + Tp}. \quad (11.32)$$

Как видим, оператор (11.32) соответствует звену неминимально-фазового типа, для которого амплитудная характеристика тождественно равна единице при всех ω . Фазовая характеристика (11.32) равна

$$\varphi(\omega) = - \operatorname{arctg} \frac{2\omega T_1}{1 - (\omega T_1)^2},$$

т.е. равна удвоенной фазовой характеристике аperiodического звена с постоянной времени T_1 . Звено с оператором (11.32) называется звеном *равномерного пропускания* первого порядка.

Учитывая, что изменение постоянной времени T_1 приводит к существенному изменению систематической составляющей пролета, а амплитудная характеристика *инвариантна* к этому изменению, приходим к выводу о том, что в качестве универсального параметра должна выступать *фазовая* характеристика. (Выше было показано, что фазу надо определять на характерной частоте ω_0). Мы получили этот вывод из рассмотрения частного примера $W_A(p) = W_A^{(1)}(p)$, $N = 4$. Однако он остается в силе и для произвольного $W_A(p)$ *

Действительно, пусть

$$W_A(p) = \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1}.$$

В этом случае

* Все выводы, полученные из сравнения $W_A^{(1)}(p)$ и $W_A^{(2)}(p)$ проверены моделированием и на $W_A^{(3)}(p)$.

$$W_0(p) = \frac{1 - (a'_1 p + \dots + a'_n p^n)}{1 + a_1 p + \dots + a_n p^n}; \quad a'_i = \frac{2}{N-2} a_i.$$

Отсюда при $N = 4$ получаем $a'_i = a_i$, т.е. звено равномерного пропускания порядка n .

Теперь рассмотрим влияние условия $N = 4$. Как показывают результаты моделирования, рассмотренный случай не является исключением, просто при $N \neq 4$ *точный* вывод о независимости амплитудной характеристики от ω заменяется *приближенным*. Однако получаемая при этом погрешность лежит в допустимых пределах.

Отметим, что проведенный анализ можно довести до определения $h_2(N, T_0)$ и $\sigma_h(N, T_0)$ и, следовательно, получения N .

Глава 12. МОДЕЛЬ КОНТУРА НАВЕДЕНИЯ РАКЕТЫ С БЦВМ

§ 12.1. ОБЩАЯ СТРУКТУРА СУ РАКЕТ ЧЕТВЕРТОГО ПОКОЛЕНИЯ

К системам управления ракет четвертого поколения предъявляются следующие *новые* требования:

- 1) существенное увеличение дальности пуска (в 2 — 3 раза);
- 2) обеспечение частичной или полной автономности (независимость ракеты от носителя: «пустил — забыл»);
- 3) многоканальность — возможность обстрела нескольких целей (за счет использования на носителе ФАР).

Эти требования *противоречивы*. Действительно, 3) требует использования активной РГС (АРГС), которая по сравнению с полуактивной РГС имеет меньшие дальности захвата (в 2 — 3 раза), что противоречит 1). Кроме того, АРГС обладает ухудшенной точностью за счет чередования зон прозрачности и слепых зон (на время посылки зондирующего импульса отраженный сигнал не принимается) — явление эклипсинга. Выходом из указанного противоречия является использование *комбинированной* СУ, включающей три подсистемы.

1. Инерциальная система на начальном участке полета с коррекцией со стороны носителя по радиолинии (поправка на маневр цели).

2. Система полуактивного самонаведения на среднем участке полета.

3. Система активного самонаведения на конечном участке полета. Это наиболее полная СУ, используемая на РБД (для РСД используется 1 + 3).

Наличие длительного инерциального участка (до 50 — 70% общего полетного времени) оказывается полезным с точки зрения уменьшения дальностей захвата ПАРГС и АРГС, однако требует внедрения нового устройства на борту ракеты (ИСУ с БЦВМ).

Именно наличие ИСУ позволяет существенно увеличивать дальность пуска ракеты (для РБД до нескольких сотен километров).

Рассмотрим общую схему наведения ракеты на цель при стрельбе на встречных курсах, где дальность пуска максимальна. На рис. 12.1, а приведены дальности полета носителя $S_n(t)$, ракеты $S_p(t)$, цели $S_{ц}(t)$ как функции времени. Расстояние OA между ракетой и целью в момент $t = 0$ есть дальность пуска. Здесь t_I — время полета на инерциальном участке, $t_{II} - t_I$ — время полета на полуактивном участке, $t_{III} - t_{II}$ — время полета на активном участке. B — точка встречи ракеты с целью. Углы наклона траекторий к горизонту пропорциональны соответствующим скоростям $V_n, V_{ц}, V_p = V_n + \Delta V_p$, принимаемым постоянными.

Пусть $D_{нц}(t), D_{рц}(t), D_{нр}(t)$ — суть расстояния между соответствующими точками в произвольный момент времени. Очевидны следующие кинематические соотношения:

$$D_{нц} = D_0 - (V_n + V_{ц})t;$$

$$D_{рц} = D_0 - (V_n + V_{ц} + \Delta V_p)t; \quad (12.1)$$

$$D_{нр} = \Delta V_p t = D_{отл} = D_{нц} - D_{рц}.$$

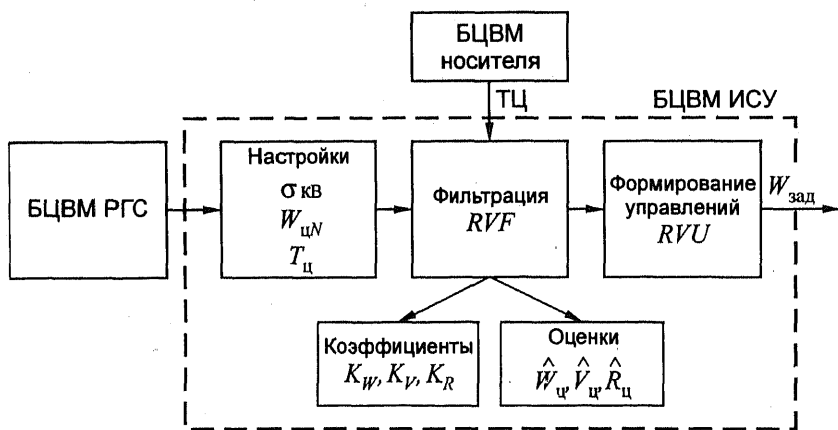
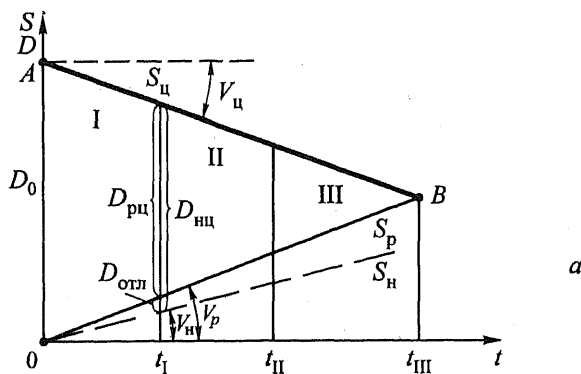


Рис. 12.1

Пусть заданы дальности захвата АРГС — D_{32} и ПАРГС — D_{30} (в совмещенном положении). В общем случае, когда $D_{nc} \neq D_{rc}$ имеем

$$D_{nc} D_{rc} = D_{31}^2. \quad (12.2)$$

Уравнения (12.1) и (12.2) при заданных D_0 , V_n , V_c , ΔV_p , D_{30} , D_{32} достаточны для определения моментов времени

t_I и t_{II} , в которых осуществляется переход с режима на режим, а также момента встречи ракеты с целью и дальности захвата ПАРГС.

§ 12.2. ДАЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЯ СОВРЕМЕННЫХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ГОЛОВОК САМОНАВЕДЕНИЯ

Рассмотрим кратко вопрос о дальностях захвата современных РГС [29].

1. *Активная РГС.* В этом случае передатчик и приемник совмещены и работают на одну антенну. Дальность действия (захвата) в этом случае определяется из основной формулы радиолокации

$$R = \gamma \sqrt[4]{\frac{P_{\Sigma}}{P_{\min}} \frac{S_o S_a^2 y_1^4}{4\pi \lambda^2}}. \quad (12.3)$$

Здесь R — дальность захвата; P_{Σ} — мощность передатчика (пиковая для импульсных систем, средняя для непрерывных); S_o — эффективная отражающая площадь цели; S_a — эквивалентная площадь антенны; y_1 — коэффициент использования равносигнальной зоны по напряжению; λ — длина волны; γ — коэффициент затухания радиоволн в атмосфере.

Отметим, что S_o зависит от типа цели. Для истребителя $S_o = 3 + 5 \text{ м}^2$, для бомбардировщика $S_o = 15 + 20 \text{ м}^2$.

2. *Полуактивная РГС.* В этом случае передатчик и приемник разнесены и размещены соответственно на носителе и ракете. Для определения дальности захвата поступим следующим образом. Из (12.3) найдем

$$R^2 = R_{\Pi} \cdot R_{\text{отр}} = \gamma^2 \sqrt[4]{\frac{P_{\Sigma}}{P_{\min}} \frac{S_o S_a^2 y_1^4}{4\pi \lambda^2}}. \quad (12.4)$$

Здесь R_{Π} — путь прямого сигнала; $R_{\text{отр}}$ — путь отраженного сигнала.

Если $R_{\Pi} = R_{\text{отр}}$ (захват на носителе), то выигрыш при переходе от АРГС на ПАРГС связан с тем, что передающая антенна (антенна носителя) имеет бóльшие мощность и диаметр.

Обычно $\frac{R_{31}}{R_{31}} = \frac{D_{31}}{D_{32}} = 3$. В случае захвата на траектории $R_{\Pi} = D_{\text{нц}}$, $D_{\text{отр}} = D_{\text{рц}}$. В этом случае следует пользоваться соотношением

$$D_{\text{рц}} \cdot D_{\text{нц}} = R_{31}^2. \quad (12.5)$$

Отметим, что реализуемая дальность захвата R'_{31} составляет 0,7 + 0,8 от потенциального ее значения R_{31} .

Рассмотрим более подробно общую структуру СУ (рис. 12.1, б). Система является цифровой. Алгоритмы системы размещены в трех агрегатах: БЦВМ ИСУ, БЦВМ РГС, БЦВМ носителя.

Перечислим кратко назначение этих БЦВМ:

1) основным управляющим элементом СУ является ИСУ; задачами БЦВМ ИСУ являются: а) фильтрация сигналов РГС, б) обработка информации и вычисления по алгоритмам систем навигации, стабилизации и управления;

2) в БЦВМ РГС производится предварительная обработка измерений РГС (определение угловых рассогласований, коэффициентов доверия к угловой информации, скорости сближения, углов целёнга);

3) в БЦВМ носителя наряду с решением собственных задач (навигация, обработка информации БРЛС* решаются задачи, необходимые для функционирования СУ ракеты: а) алгоритм выработки команд РК и целеуказания РГС; б) алгоритм принятия решения о пуске.

Важнейшими особенностями структуры СУ являются следующие:

1) на всех участках полета управление осуществляется по единым алгоритмам;

* В современных комплексах БРЛС с ФАР работает в режиме сопровождения на проходе (СНП), ранее — в режиме непрерывного подсвета (РНП).

2) настройки СУ устанавливаются в процессе полета по данным как априорной (тип цели), так и текущей информации, причем коэффициенты фильтра Калмана-Бьюси (ФБК) определяются по результатам решения уравнения Риккати непосредственно в процессе полета ракеты.

Перечисленные особенности существенным образом отличают СУ ракет четвертого поколения от предшествующих разработок, где настройки определялись на этапе проектирования систем и уточнялись на этапе ЛКИ.

§ 12.3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ

Целесообразность рассмотрения задачи оптимального управления в детерминированной постановке вытекает из теоремы разделения, согласно которой для линейного управляемого процесса типа

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)\xi(t) \quad (12.6)$$

(здесь $\xi(t)$ — q -мерный случайный процесс типа белого шума; $C(t)$ — матрица коэффициентов с размерами $n \times q$), при линейном наблюдении с аддитивным белым шумом минимизация математического ожидания квадратичного функционала приводит к системе, состоящей из ФКБ, построенного для детерминированного (точно известного) управления и алгоритма оптимального управления для детерминированного процесса с полной степенью непосредственной наблюдаемости, в котором истинный вектор состояния заменен на выходной вектор ФКБ (вектор оценки $\hat{x}$).

Приближенное разделение имеет основание и для нелинейных стохастических процессов. Это, а также прямое значение детерминированных задач придают особую важность детерминированным функционалам. Синтез оптимальных детерминированных систем управления, основанный на минимизации некоторого функционала, называется аналитическим конструированием. Термин аналитическое конструирование регуляторов (АКОР) введен А.Н. Летовым в 1960 г. Практически одновременно со статьями А.Н. Летова появилась работа Р.Калмана, в которой иными методами решена та же задача. Теорема Кал-

мана имеет следующую формулировку (несколько отличающуюся от первоисточника).

Если дан объект

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (12.7)$$

то оптимальным управлением, минимизирующим функционал

$$I = \frac{1}{2} x^T(t_2) \rho x(t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} x^T \beta x dt + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} u^T k^{-2} u dt, \quad (12.8)$$

является линейное управление

$$u = -k^{-2} B^T S x, \quad (12.9)$$

где $S = S^T$ — решение матричного уравнения Риккати

$$\dot{S} - SA + A^T S - SBk^2 B^T S = -\rho \quad (12.10)$$

при граничном условии $S(t_2) = \rho$.

Здесь ρ , β — заданные матрицы коэффициентов функционала типа $n \times n$; k^2 — заданная неособая матрица; k^{-2} — обратная ей матрица.

Постановка А.Н. Летова соответствует $t_1 = 0$; $t_2 = \infty$; $k = 1$ — скалярная величина, $\dot{S} = 0$ — стационарное оптимальное управление для стационарного объекта. В ряде работ сходная задача поставлена и для нелинейного объекта.

Отметим, что А.А. Красовским развит другой подход, связанный с функционалами обобщенной работы (ФОР), позволяющий существенно упростить решение. Остановимся на этом несколько подробнее и рассмотрим функционал (12.8).

В формуле (12.8) первый член определяет оценку неточности приведения системы в желаемое состояние $x = 0$ в конечный момент времени, второй член определяет интегральную оценку качества переходного процесса, третий член — энергетические потери на выходах исполнительных устройств (работы, совершаемой за время $t_2 - t_1$).

Функционал в целом можно рассматривать как оценку штрафа за неидеальное решение задачи. Отсюда непосредственно следует необходимость его минимизации.

Отметим, что трудности решения задач оптимального управления, связанные с нелинейностью уравнения Риккати (последний член левой части (12.10)), обусловили появление ФОР [26]. С этой целью в (12.8) добавляется еще один член, условно называемый обобщенной работой сигналов управлений, что приводит к тому, что матрица коэффициентов S определяется не через нелинейное уравнение (12.10), а через соответствующее *линейное* уравнение, в котором последний член обращается в нуль. Однако это не дается бесплатно, так как добавление этого члена приводит к полуопределенности функционала, так как функционал полностью определяется только после решения задачи нахождения u_{opt} .

В заключение отметим, что решения, получаемые с помощью АКОР дают управление в форме закона с обратной связью, т.е. являются функцией текущих координат.

В ряде случаев, однако, представляет интерес программное (разомкнутое) управление $u(t)$, которое может быть получено с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина, открытого в 1956 г. Под принципом максимума понимают соотношения, выражающие *необходимые* условия сильного экстремума неклассической вариационной задачи. Распространенная формулировка принципа максимума Л.С. Понтрягина относится к следующей задаче. Пусть матричное уравнение системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (12.11)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$ — управляющий параметр, f — вектор-функция.

В пространстве R^m задано множество v допустимых значений управляющего параметра u ; в пространстве (фазовом) R^n даны точки $x(t_1) = x^1$ и $x(t_2) = x^2$. Назовем допустимым управлением любую кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ со значением на множестве v . Говорят, что допустимое управление $u = u(t)$ переводит фазовую точку из положе-

ния x^1 в положение x^2 , если соответствующее ему решение системы (12.11), удовлетворяющее условию, $x(t_1) = x^1$ определено при всех $t_1 \leq t \leq t_2$ и $x(t_2) = x^2$. Среди всех допустимых управлений требуется найти оптимальное управление — функцию $u^*(t)$, минимизирующую функционал

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f^0(x, u) dt. \quad (12.12)$$

Здесь f^0 — заданная функция того же класса, что и компоненты $f_i(x)$; $i = \overline{1, n}$, $x(t)$ — решение системы (12.11) с начальным условием $x(t_1) = x^1$, отвечающее управлению $u(t)$, t_2 — момент прохождения решения через точку x^2 .

Под решением задачи понимается пара, состоящая из оптимального управления $u^*(t)$ и отвечающей ему оптимальной траектории $x^*(t)$ системы (12.11).

Пусть скалярная функция (гамильтониан)

$$H(\lambda, x, u) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x, u) \quad (12.13)$$

переменных λ, x, u , где расширенное пространство (размерности $n+1$) образуется за счет добавления слагаемого $\lambda_0 f^0$. Функции $H(\lambda, x, u)$ ставится в соответствие каноническая гамильтонова система относительно переменных x и λ : (λ — дополнительные (сопряженные) переменные, играющие роль неопределенных множителей Лагранжа из вариационного исчисления).

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}; \quad \frac{d\lambda}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (12.14)$$

Первое из этих условий есть (12.11).

Пусть

$$M(\lambda, x) = \sup \left\{ H(\lambda, u) \mid u \in V \right\}.$$

Здесь $\sup$ — супремум функции — точная верхняя грань. Принцип максимума Понтрягина заключается в следующем. Если $u^*(t)$, $x^*(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ — решение задачи оптимального управления (12.14), (12.12), то существует такая ненулевая абсолютно непрерывная функция $\lambda(t)$, что тройка функций $\lambda(t)$, $x^*(t)$, $u^*(t)$ удовлетворяет на $[t_1, t_2]$ системе (12.14) и для почти всех $t \in [t_1, t_2]$ выполняется условие максимума:

$$H(\lambda(t), x^*(t), u^*(t)) = M(\lambda(t), x^*(t)) \quad (12.15)$$

и в конечный момент, условие

$$M(\lambda(t), x^*(t)) = 0; \quad \lambda(t) \leq 0. \quad (12.16)$$

Оказывается далее, что если функции $\lambda(t)$, $x^*(t)$, $u^*(t)$ удовлетворяют уравнениям (12.14), (12.15), т.е. образуют экстремаль Понтрягина, то имеет место условие

$$M(\lambda(t), x^*(t)) = \text{const}; \quad \lambda_0 = \text{const}.$$

при всех значениях t .

Поскольку $H(\lambda, x^*, u^*) = \text{const}$, то $\dot{H} = \frac{dH}{dt} = 0$. Но

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial u} \frac{du}{dt} = 0. \quad (12.17)$$

Сумма первых двух слагаемых равна нулю на основании канонической системы уравнений (12.14). Последнее в силу (12.17) также равно нулю:

$$\frac{\partial H}{\partial u} \frac{du}{dt} = 0. \quad (12.18)$$

Отсюда следует, что для внутренних точек множества U , $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, то есть имеет место максимум функции H , для граничных точек множества $\frac{du}{dt} = 0$ или $u = \text{const}$. Это означает, что управление является кусочно-постоянным.

Ниже излагаются некоторые результаты, полученные в процессе разработки этих алгоритмов на основе общей теории (АКОР) классических функционалов Летова-Калмана.

Целью управления является минимизация величины конечного пролета $h(t_2)$. Рассмотрим задачу перехвата (встречи) цели в простейшей постановке. [20]. Систему уравнений (12.11) возьмем в виде

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = u. \quad (12.19)$$

Минимизируемый функционал (12.8) — в виде

$$I = \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} x_2, x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \right\} + \int_{t_1}^{t_2} u^2 dt. \quad (12.20)$$

Здесь первое слагаемое есть терминальный член, определяющий конечное ($t = t_2$) состояние, второе слагаемое — интегральный член, определяющий затраты на управление. Величины c_1, c_2, t_2 — заданные постоянные.

Требуется определить u , обеспечивающее минимум (12.20). Решение задачи [20] ищется в форме управления с обратной связью, то есть $u(x_2, x_1, t)$ и имеет вид

$$u = \Lambda_2(t) x_2 - \Lambda_1(t) x_1;$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \frac{1}{D} \left[\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_1} (t_2 - t)^2 + \frac{1}{3} (t_2 - t)^3 \right]; \\ \Lambda_1 &= \frac{1}{D} \left[\frac{1}{c_1} (t_2 - t) + \frac{1}{2} (t_2 - t)^2 \right]; \end{aligned} \quad (12.21)$$

$$D = \left[\frac{1}{c_2} + \frac{1}{3} (t_2 - t)^3 \right] \left[\frac{1}{c_1} + (t_2 - t) \right] - \frac{1}{4} (t_2 - t)^4.$$

Рассмотрим частные случаи (12.21):

а) если $c_1 \rightarrow 0$, то $x_2(t)$ — неуправляемая величина,

$$u = \frac{(t_2 - t)^2}{\frac{1}{c_2} + \frac{1}{3}(t_2 - t)^3} x_2(t) - \frac{(t_2 - t)}{\frac{1}{c_2} + \frac{1}{3}(t_2 - t)^3} x_1(t). \quad (12.22)$$

б) если $c_1 \rightarrow 0$, $c_2 \rightarrow \infty$ то $x_1(t_2) \rightarrow 0$,

$$u_2 = -3 \left[\frac{x_2(t)}{t_2 - t} + \frac{x_1(t)}{(t_2 - t)^2} \right]. \quad (12.23)$$

Этот закон управления допускает следующую кинематическую интерпретацию (рис. 12.2, а). Пусть ε — угол между линией визирования и линией отсчета; Θ — угол между скоростью v_p и линией отсчета; $v_{отн}$ — скорость сближения вдоль линии визирования; Π — цель. Тогда

$$\varepsilon = \frac{x_1(t)}{v_{отн}(t_2 - t)}; \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1}{v_{отн}} \left[\frac{x_1(t)}{(t_2 - t)^2} + \frac{x_2(t)}{(t_2 - t)} \right],$$

$$x_2 = v_p \Theta; \quad \dot{x}_2 = v_p \dot{\Theta}, \quad (12.24)$$

$$u_2 = v_p \dot{\Theta} = -3 v_{отн} \dot{\varepsilon} = -3 |D| \dot{\varepsilon}, \quad v_{отн} = |D|.$$

мы получили известный закон пропорциональный навигации с $\tilde{N} = 3$. Закон (12.244) приводит к «совершенству» перехвату:

в) если $c_1 \rightarrow \infty$, $c_2 \rightarrow \infty$, то $x_1(t_2) = x_2(t_2) = 0$ («совершенная» встреча). Имеем

$$u_3 = - \left[\frac{4 x_2(t)}{t_2 - t} + \frac{6 x_1(t)}{(t_2 - t)^2} \right] = - v_{отн} \left(4 \dot{\varepsilon} + \frac{2 \varepsilon}{t_2 - t} \right). \quad (12.25)$$

Этот закон соответствует модифицированной форме пропорциональной навигации, ведущей к «совершенной» встрече (рис. 12.2, б). Преобразуем закон пропорциональной навигации, учитывая выражение для пролета

$$H(t) = \frac{D^2 \dot{\varepsilon}}{|D|} = t_0^2 |D| \dot{\varepsilon}.$$

Здесь $t_0 = t_2 - t$ — время, оставшееся до встречи.

Тогда вместо u_2 получим

$$u_2'' = v_p \dot{\Theta} = \frac{3H}{t_0^2}. \quad (12.26)$$

Полученные здесь управления u_2 , u_2'' , u_3 представлены в форме обратной связи, т.е. являются функциями переменных состояния. Однако их можно представить и в форме программных управлений. Решения u_2^{Π} и u_3^{Π} получаются в виде

$$\begin{aligned} u_2^{\Pi}(t) &= -\frac{3}{t_0^2} \left[x_1^{\Pi} + x_2^{\Pi} t_0 \right] (1 - \bar{t});; \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}; \\ u_3^{\Pi}(t) &= -\frac{2}{t_0^2} \left[\left(3x_1^{\Pi} + x_2^{\Pi} t_0 \right) - 6 \left(x_1^{\Pi} + 3x_2^{\Pi} t_0 \right) \frac{t}{t_0} \right]; \end{aligned} \quad (12.27)$$

Напомним, что $u_2^{\Pi}(t)$ соответствует совершенному перехвату, $u_3^{\Pi}(t)$ — совершенной встрече. С целью упрощения дальнейшего рассмотрения ограничимся частным случаем $x_2^{\Pi} = 0$. Тогда получим $u_2^{\Pi}(t)$ в виде (рис. 12.2, а):

$$u_2^{\Pi}(t) = -\frac{3x_1^{\Pi}}{t_0^2} (1 - \bar{t}). \quad (12.28)$$

Как видим, управление в этом случае спадает до нуля при $\bar{t} = 1$. Управление $u_3^{\Pi}(t)$ представится в виде (рис. 12.2, з):

$$u_3^{\Pi}(t) = -\frac{2x_1^{\Pi}}{t_0^2} \left(3 - 6 \frac{t_2 - t}{t_0} \right). \quad (12.29)$$

Отсюда найдем, полагая:

$$1) \quad t = t_1; \quad u_3^{\Pi}(t_1) = -\frac{6x_1^{\Pi}}{t_0^2};$$

$$2) \quad t = t_2; \quad u_3^{\Pi}(t_2) = \frac{6x_1^{\Pi}}{t_0^2};$$

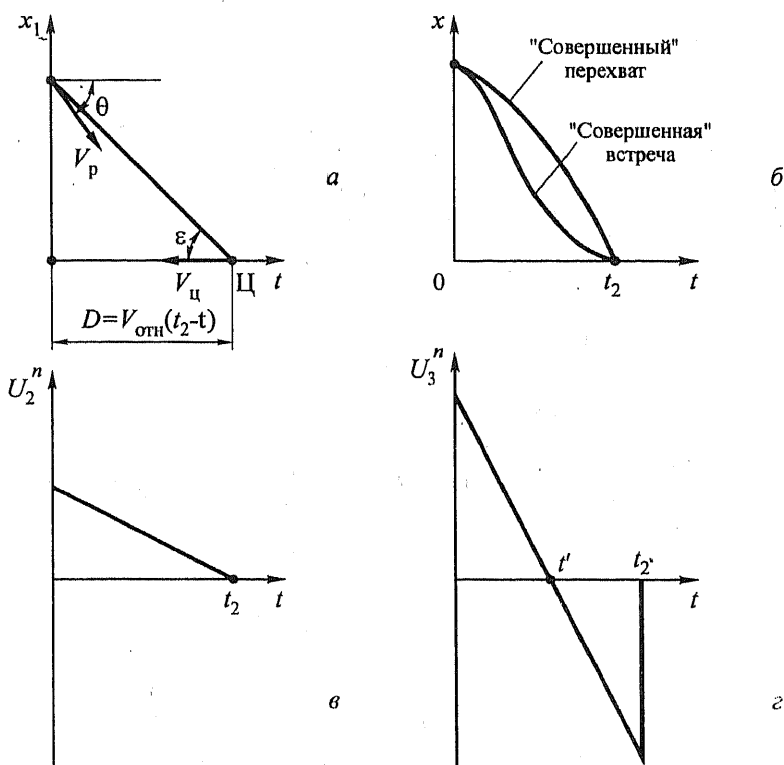


Рис. 12.2

$$3) \quad t' = t_1 + \frac{t_0}{2}; \quad u_3(t') = 0.$$

Рассмотрим теперь связь между программным управлением $u^n(t)$ и управлениями в форме обратной связи $u^{oc}(x_1, x_2)$. Переход от программного управления (разомкнутого) к управлению в форме обратной связи (замкнутого) может быть осуществлен по следующим правилам:

1. Полагаем текущее время равным нулю.
2. Заменяем полное время $t_0 = t_2 - t_1$, оставшимся $t_2 - t$.
3. Заменяем начальные значения x_1^n, x_2^n текущими $x_1(t), x_2(t)$.

Используя эти правила, получим из первого соотношения (12.27) закон (12.23), из второго соотношения (12.27) закон (12.25). Рассмотрим теперь задачу определения оптимального управления при маневре цели. Такое рассмотрение должно основываться на аппарате теории игр [20]. Учитывая, что в игре участвуют две стороны: преследующий (ракета) и преследуемый (цель), систему уравнений запишем в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2; \quad \dot{y}_1 = y_2; \\ \dot{x}_2 &= u; \quad \dot{y}_2 = v; \quad z = x - y.\end{aligned}\tag{12.30}$$

Здесь первая система относится к ракете, вторая — к цели. Координата z определяет текущее расстояние (текущий пролет) между ними. Заданными считаются время t , начальные значения $z_1(0)$, $z_2(0)$.

Очевидно, что в игре «преследование — уклонение» стратегией преследователя является минимизация величины $z_2(t_2)$, стратегией преследуемого ее максимизация.

В качестве критерия выберем функционал [20]:

$$I = \min_u \max_v \left\{ \frac{1}{2} b [z_1(t_0)]^2 + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (u^2 - v^2) du \right\}.\tag{12.31}$$

Ограничения на управления представим в виде

$$u \leq u_m; \quad v \leq v_m; \quad v_m < u_m.\tag{12.32}$$

Решением задачи является управление в форме обратной связи

$$\begin{aligned}u^{oc} &= N' \left[\frac{z_1(t)}{(t_0 - t)^2} + \frac{z_2(t)}{t_0 - t} \right]; \\ N' &= \frac{1}{1 - \mu}; \quad \mu = \frac{v_m}{u_m} < 1.\end{aligned}\tag{12.33}$$

Это решение соответствует случаю совершенного перехвата, т.е. является аналогом метода пропорциональной навигации.

Как видим, в случае маневра цели оптимальное значение параметра N уже не равно 3, а зависит от отношения располагаемых ускорений цели и ракеты. Полагая $v_m = 100 \text{ м/с}^2$ (современное требование), получаем:

$$1) u_m = 300 \text{ м/с}^2; \mu = 1/3; N' = 4,5;$$

$$2) u_m = 400 \text{ м/с}^2; \mu = 1/4; N' = 4,0.$$

Таким образом, чем больше μ , тем больше N' отличается от 3.

Возьмемся теперь к закону (12.26) и отбросим гипотезу о равномерном и прямолинейном движении цели и ракеты, принятую в определении мгновенного пролета. Пусть, начиная с некоторого момента времени t , цель маневрирует с некоторым постоянным ускорением j_c . Тогда закон управления (12.26) модифицируется следующим образом:

$$u = \frac{3(H + \Delta H)}{2t_0} = \frac{3H}{t_0^2} + 1,5j_c. \quad (12.34)$$

Отметим, что в алгоритме *RVU* современных ракет наряду с учетом маневра цели дополнительно учитываются следующие поправки: сила тяжести, осевое ускорение ракеты, инерционность поперечного ускорения ракеты и цели.

§ 12.4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АЛГОРИТМОВ ФИЛЬТРАЦИИ

Система управления ракеты работает в условиях, когда наряду с полезными воздействиями имеются помехи. Помехи случайного характера имеет смысл разделить с рассматриваемой точки зрения на два класса:

1) случайные сигналы, от которых нельзя избавиться в принципе; 2) случайные сигналы, влияние которых можно ослабить специальными фильтрами.

Примером сигналов первого класса может служить случайный маневр цели, второго класса — шумы измерительных устройств. Сигналы первого класса, воздействуя на объект, участвуют в формировании его состояния. На основе измерения состояния бортовая аппаратура формирует команды управления так, что эти сигналы воспринимаются СУ, как «полезные». Сиг-

налы второго класса путем фильтрации могут быть существенно ослаблены, но полностью избавиться от них не удастся. Даже после фильтрации шумы остаются достаточно мощными и их приходится обрабатывать. Обычно полезные сигналы являются низкочастотными, шумы — высокочастотными.

Математическая теория фильтрации для условий, когда полезный сигнал и помеха представляют собой стационарные случайные процессы основана на работах А.Н. Колмогорова и Н.Винера. Для случая, когда оба процесса имеют дробно-рациональный спектр, фильтрующее устройство описывается системой линейных дифференциальных уравнений. Математическое обобщение этого подхода, в том числе и для нестационарных систем (непрерывных и дискретных) связано с работами Калмана и Бьюси [26].

Уравнение системы и измерителя запишем в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu + \xi(t); \quad z = Hx + \eta(t). \quad (12.35)$$

В соответствии с (12.36) в формировании состояния x системы помимо управляющего воздействия $u(t)$ участвует случайный входной сигнал $\xi(t)$, а измеритель подвержен влиянию шума $\eta(t)$. Примем, что $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — не коррелированные между собой центрированные векторные случайные процессы типа белого шума интенсивности $R_1(t)$ и $R_2(t)$. Пусть $R_1(t)$, $R_2(t)$ неотрицательно определенные матрицы с размерами $n \times n$ и $m \times m$ соответственно.

Реакция $x(t)$ системы на входные воздействия, содержащие случайные составляющие, будет представлять случайный процесс. Задача восстановления текущего состояния $x(t)$ по результатам измерений $z(s)$, $t_0 \leq s \leq t$ в присутствии шумов называется задачей фильтрации. Для ее решения естественно применить наблюдающее устройство

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + Bu + k(t)[z - H \hat{x}]. \quad (12.36)$$

В детерминированной постановке выбор коэффициента k допускает значительный произвол.

В стохастической задаче восстановления коэффициент k оптимизируется из условия обеспечения несмещенности оценки $\hat{x}(t)$ и минимума СКО:

$$M \left[\left(x_i(t) - \hat{x}_i(t) \right)^2 \right] = \min, \quad M \hat{x}(t) = M x(t). \quad (12.37)$$

Рассмотрим задачу построения оптимального наблюдающего устройства (12.36) для системы (12.35), обеспечивающего (12.37).

Положим, что начальное состояние $x(t_0)$ системы (12.35) — случайный вектор с математическим ожиданием $M[x(t_0)] = m^0$ и ковариационной матрицей

$$M \left[\left(x(t_0) - m^0 \right) \left(x(t_0) - m^0 \right)^T \right] = R_0,$$

не коррелирован с шумами $\xi(t)$ и $\eta(t)$, а матрица $R_2(t)$ не вырождена при $t > t_0$, тогда решение задачи получается путем выбора матричного коэффициента усиления

$$k(t) = p(t) H^T(t) R_2^{-1}(t), \quad (12.38)$$

с начальным условием $p(t_0) = R_0$.

Оценка $\hat{x}(t)$ удовлетворяет уравнению (12.36) при начальном условии $x(t_0) = m^0$. При этом матрица ковариации вектора ошибки $\bar{x}(t) - \hat{x}(t)$ равна $p(t)$.

Рассмотренную задачу можно считать задачей оптимальной фильтрации при известной структуре фильтра. Действительно, фильтрующее устройство заранее выбрано в виде модели системы с обратной связью по ошибке восстановления (12.36), а уже затем решалась задача о выборе матричного коэффициента $k(t)$.

Более общая постановка задачи возникает, если не считать структуру фильтра заранее заданной, а ограничиться лишь требованием, что оценка $\hat{x}(t)$ является линейной функцией наблюдения $z(s)$, $t_0 \leq s \leq t$. В этой постановке приходим к тому же решению, а именно что оптимальный фильтр имеет структуру (12.36), а коэффициент усиления — (12.38).

Рассмотрим ФКБ в замкнутой системе. Допустим, что сигнал управления $u(t)$ в системе (12.35) формируется по оценке состояния $\hat{x}(t)$ в виде

$$u(t) = -L(t) \hat{x}(t). \quad (12.39)$$

В этом случае уравнение оптимального фильтра имеет форму (12.36) с заменой u на $-L(t)\hat{x}$.

Допустим, что оценка $\hat{x}$ используется для замыкания стационарной системы, а L — постоянная матрицы. Учитывая, что фильтр Калмана

$$\dot{\hat{x}} = (A - BL)\hat{x} + KH(x - \hat{x}) \quad (12.40)$$

представляет собой частный случай наблюдающего устройства, а матрица L выбрана так, что система $\dot{\hat{x}} = (A - BL)\hat{x}$ асимптотически устойчива, то фильтр Калмана (для замкнутой системы) также асимптотически устойчив.

Рассмотрим примеры построения ФКБ для случаев $n = 2$ и 3.

Для случая $n = 2$ уравнения объекта и измерителя имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = \xi; \quad z = x_1 + \eta. \quad (12.41)$$

Решением задачи является построение ФКБ. Его уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + k_1(z - \hat{x}_1); \\ \dot{\hat{x}}_2 &= k_2(z - \hat{x}_1). \end{aligned} \quad (12.42)$$

Структурная схема фильтра с уравнениями (12.42) имеет вид, представленный на рис. 12.3, а.

Передаточная функция фильтра в разомкнутом состоянии

$$W(p) = \frac{k_1 p + k_2}{p^2}. \quad (12.43)$$

Передаточная функция фильтра в замкнутом состоянии

$$\Phi(p) = \frac{k_1 p + k_2}{p^2 + k_1 p + k_2} = \frac{\frac{k_1}{k_2} p + 1}{\frac{1}{k_2} p^2 + \frac{k_1}{k_2} p + 1}. \quad (12.44)$$

Из (12.44) найдем связь между коэффициентами k_1 и k_2 . Полагая $T^2 = \frac{1}{k_2}$ и выбирая из условия качества переходного процесса

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{2} = 0,71, \quad (12.45)$$

находим

$$k_2 = \frac{1}{2} k_1^2. \quad (12.46)$$

Отметим, что закон (12.39) использует не само состояние системы $x(t)$, а его оценку $\hat{x}(t)$. Тем самым задача управления разбивается на две независимые задачи: 1) оптимальную фильтрацию-восстановление состояния системы $x(t)$, 2) оптимальное управление по оценке $\hat{x}(t)$, которая является как бы истинным значением фазового состояния $x(t)$.

Это положение называется принципом разделения. Аналогичным образом может быть рассмотрен ФКБ для случая $n = 3$, в котором учитывается инерционность цели. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{T_{\Pi}} (-x_3 + \xi), \\ x &= x_1 + \eta. \end{aligned} \quad (12.47)$$

Уравнения фильтра для системы (12.47)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= x_2 + k_1 (z - \hat{x}_1); \\ \dot{\hat{x}}_2 &= x_3 + k_2 (z - \hat{x}_1); \\ \dot{\hat{x}}_3 &= -\frac{1}{T_{\Pi}} \hat{x}_3 + k_3 (z - x_1). \end{aligned} \quad (12.48)$$

Структурная схема фильтра с уравнением (12.48) имеет вид, изображенный на рис. 12.3, б.

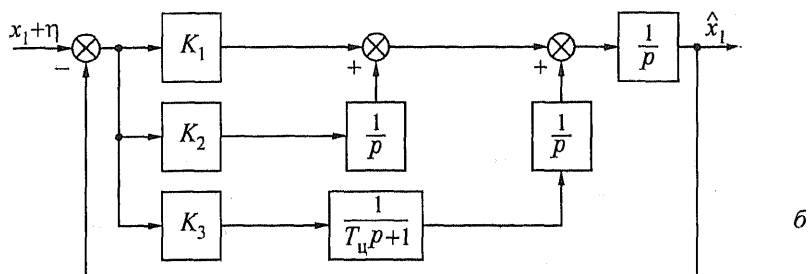
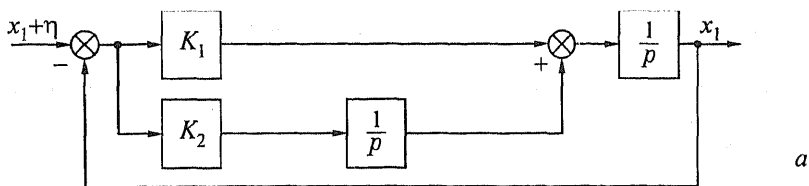


Рис. 12.3

Передаточная функция фильтра в разомкнутом состоянии

$$W(p) = \frac{k_1 T_{\Pi} p^2 + p(k_1 + k_2 T_{\Pi}) + k_2 + k_3 T_{\Pi}}{p^2 (T_{\Pi} p + 1)}. \quad (12.49)$$

Передаточная функция фильтра в замкнутом состоянии

$$\Phi(p) = \frac{k_1 T_{\Pi} p^2 + (k_1 + k_2 T_{\Pi}) p + (k_2 + k_3 T_{\Pi})}{p^2 (T_{\Pi} p + 1) + k_1 T_{\Pi} p^2 + (k_1 + k_2 T_{\Pi}) p + (k_2 + k_3 T_{\Pi})}. \quad (12.50)$$

Отметим, что при $T_{\Pi} \rightarrow 0$, (12.49) переходит в (12.43), а (12.50) — в (12.44).

Запишем (12.50) в виде

$$\Phi(p) = \frac{A_1 \Omega_0 p^2 + A_2 \Omega_0^2 p + \Omega_0^3}{p^3 + A_1 \Omega_0 p^2 + A_2 \Omega_0^2 p + \Omega_0^3} \quad (12.51)$$

$$\Omega_0^3 = k_3 + \frac{k_2}{T_{\Pi}}; \quad A_2 \Omega_0^2 = k_2 + \frac{k_1}{T_{\Pi}}; \quad A_1 \Omega_0 = k_1 + \frac{1}{T_{\Pi}}.$$

Используя метод стандартных коэффициентов для передаточной функции с тремя полюсами и двумя нулями, расположим корни полинома знаменателя на отрицательной вещественной оси по геометрической прогрессии, что обеспечивает минимум времени переходного процесса. Учитывая (12.46), получим

$$k_3 = \frac{k_1^4}{8 \left(k_1 + \frac{1}{T_{\Pi}} \right)}. \quad (12.52)$$

Таким образом, получены соотношения, выражающие коэффициенты фильтра k_2 и k_3 через коэффициенты k_1 (соответственно (12.46) и (12.52)). Теперь рассмотрим, из каких соображений определяется коэффициент k_1 . Для этого нам потребуются динамические и случайные ошибки фильтра.

Начнем с рассмотрения динамических ошибок. Установившееся значение ошибки при $j_{\Pi} = \text{const}$ имеет вид:

$$e_i = x_i - \hat{x}_i, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (12.53)$$

Анализ показывает

$$e_1 = \frac{2j_{\Pi}}{k_1^2 (1 + \mu)}; \quad e_2 = \frac{2j_{\Pi}}{k_1 (1 + \mu)}; \quad e_3 = \frac{j_{\Pi}}{1 + \mu}. \quad (12.54)$$

Здесь введены обозначения

$$\mu = \frac{1}{4\nu(1+\nu)}; \quad \nu = \frac{1}{k_1 T_{\Pi}}.$$

Отметим, что при $T_{\Pi} \rightarrow 0$ (переход от фильтра третьего порядка к фильтру второго порядка) имеет место $\mu \rightarrow 0$, что приводит к резкому возрастанию динамических ошибок. Сделаем оценку. Пусть $j_{\Pi} = 100 \text{ м/с}^2$, $k_1 = 4$, $T_{\Pi} = 4$. Тогда $\mu = 3,75$. Таким образом, динамическая ошибка фильтра второго порядка в 4,75 раза больше ошибки фильтра третьего порядка. Перейдем теперь к оценке случайных ошибок.

Можно показать, что

$$\hat{e}_{\text{сл}}^2 = \frac{3}{4} S k_1.$$

Здесь S — значение спектральной плотности белого шума.

Как следует из (12.54) и (12.55), увеличение k_1 приводит к уменьшению динамической ошибки и увеличению случайной. Для выбора оптимального значения коэффициента k_1 введем критерий

$$I = e_n^2 + \alpha^2 \hat{e}_{\text{сл}}^2; \quad e_g = e_1.$$

Здесь $\alpha = 1$ соответствует минимуму дисперсии суммарной ошибки, $\alpha = 2$ — максимуму попадания в круг заданного радиуса.

Вводя обозначения:

$$A = \frac{4j_{\text{ц}}^2}{(1 + j_{\text{ц}})^2}; \quad B = \frac{3}{4} S \alpha^2,$$

получим из условия $\frac{\partial I}{\partial k_1} = 0$

$$\hat{k}_1 = \sqrt[5]{\frac{4A}{B}}.$$

Таким образом, задача определения оптимального значения коэффициента k_1 решена. По известному k_1 по (12.45) и (12.52) определяются коэффициенты k_2 и k_3 . Принимая $j_{\text{ц}} = 80$ м/с², $S = 1$ м²/с, $T_{\text{ц}} = 4$ с, получаем $k_1 = 4,0$; $k_2 = k_3 = 8,0$.

Глава 13. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОБЛИКА РАКЕТЫ

§ 13.1. РОЛЬ ЭТАПА ФОРМИРОВАНИЯ ОБЛИКА РАКЕТЫ В ПРОЦЕССЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

В настоящей главе излагается общая постановка задачи проектирования облика ракеты, которая трактуется как задача технического проектирования по заданным тактико-техническим требованиям. Отметим, что такая постановка в наи-

большей степени соответствует принятой в настоящее время организационной структуре разработки и специализации предприятий отрасли.

Сложность используемых и, главным образом, вновь разрабатываемых ракет рассматриваемого класса возрастает экспоненциально. В этом и состоит главная особенность современного этапа развития производственной деятельности, которую принято называть научно-технической революцией.

А как изменился «арсенал» конструктора за эти годы? Развитие технологии проектирования долгое время связывалось с автоматизацией вспомогательных работ — черчения, инженерных расчетов и т.д. Этот процесс повышал, конечно, общую культуру проектирования, но в целом заметного выигрыша не дал. В результате создание новых конструкций существенно затягивалось, затраты возрастали, а передаваемые на испытания опытные образцы оказывались морально устаревшими. Как же эффективно помочь конструктору в поиске новых технических решений? Как обеспечить ускорение процесса проектирования?

В настоящее время признано, что к числу основных средств, обеспечивающих существенную перестройку процесса проектирования относятся: повышение степени его математизации (математика должна стать неотъемлемой частью конструкторского ремесла) и широкое внедрение ЭВМ.

Важнейшей составной частью процесса проектирования является этап формирования облика, на котором принимается основной объем технических решений. Важной особенностью этапа является то, что принятые на нем ошибочные решения обычно труднее всего исправляются.

С позиций этапа формирования облика проектирование можно определить как целенаправленную деятельность конструктора (конструкторского коллектива), связанную с принятием основных технических решений по построению ракеты, решающей определенную боевую задачу. Умение проектировать — это одновременно и наука, и искусство.

Наука — потому, что в связи с интенсивным внедрением строгих научных методов уровень формализации процесса проектирования непрерывно возрастает, особенно в связи с резким повышением роли ЭВМ.

Искусство — потому, что еще много места в этом процессе занимает и в обозримом будущем будет занимать конструкторская интуиция, непрерывный творческий поиск.

Проектирование предполагает применение методов анализа и синтеза и использует как эволюционно-количественные, так и скачкообразно-качественные подходы. Таким образом, в процессе проектирования ракеты наука и искусство, анализ и синтез, эволюционно-количественные и скачкообразно-качественные подходы неотделимы друг от друга и проявляются одновременно.

Рассмотрим задачу формирования облика в общей постановке. Современная техника, особенно военная, при наличии резервов времени и ассигнований, может обеспечить создание ракет рассматриваемого класса практически с любыми характеристиками. Однако при этом может оказаться, что создаваемый объект нерационален. В частности, в отечественной и зарубежной практике известны случаи, когда приходилось прекращать разработку образцов из-за недостаточной их эффективности. Какие же объекты нужно разрабатывать? Как должны соотноситься параметры эффекта и параметры затрат? Эти вопросы являются сейчас центральными при разработке и оценке объектов. Созданию (или оценке) объектов военной техники, в том числе ракет рассматриваемого класса, должна предшествовать формулировка боевой задачи, которую он должен решать. Параметры, характеризующие эти свойства объекта, будем называть параметрами (показателями) *боевого эффекта* — W_i , $i = \overline{1, m}$. Для того, чтобы получить численные результаты выполнения объектом некоторой боевой задачи необходимы соотношения, связывающие параметры W_i с *конструктивными параметрами облика* — x_j , $j = \overline{1, n}$. Соотношения эти основываются на расчете различного рода характеристик: аэродинамических, баллистических, точностных, поражающих и др.

Всякий полезный эффект, о котором стоит говорить, в том числе и боевой эффект, связан с затратами. Затраты эти многообразны и характеризуются набором параметров затрат C_k , $k = \overline{1, l}$. Таким образом, в процессе формирования облика объекта его конструктивные параметры находятся в определенном взаимодействии с параметрами эффекта и параметрами затрат. В интересах наглядности можно ввести геометрии-

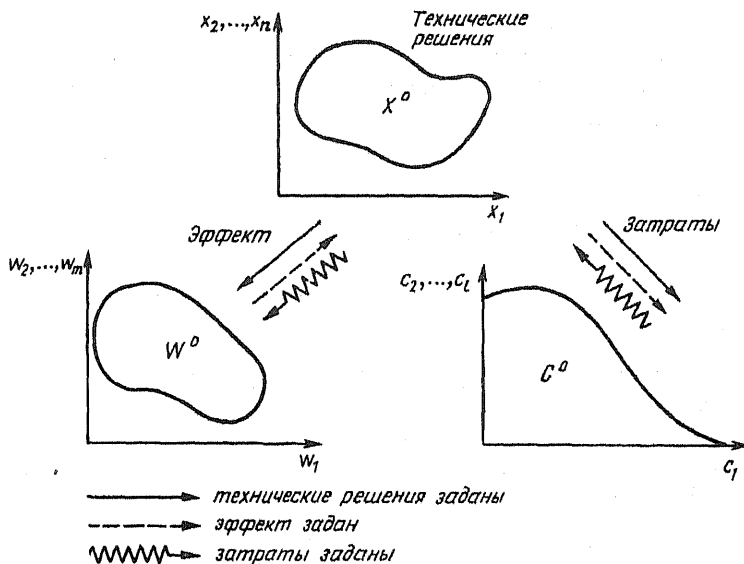


Рис. 13.1

ческое представление этих трех групп параметров как элементов соответствующих пространств. В каждом из этих пространств (рис. 13.1) существуют области допустимых значений, выделяемые всякого рода ограничениями физического, технического, экономического или какого-либо другого характера (соответственно W^0 , X^0 , C^0).

§ 13.2. ОБЛИК КАК СОВОКУПНОСТЬ КОНЦЕПЦИИ, ПАРАМЕТРОВ И УПРАВЛЕНИЙ

Определим понятие «облик» как совокупность концепций, параметров и управлений и дадим формализованное определение этим составляющим понятия.

Начнем с определения концепции, под которой далее будем понимать перечень основных принципов построения ракеты (технических решений), принимаемых в процессе формирования концепции. Описание концентрации удобно проводить на языке теории множеств. Поскольку множество может быть за-

дано перечислением — списком своих элементов, рассмотрим, как должен формироваться такой список.

Пусть для «полного» описания концепции достаточно указать n ее составляющих (признаков) и пусть i -я составляющая имеет m_i альтернативных реализаций (альтернатив). Тогда полный список, включающий перечень альтернатив, определит допустимое множество концепций K^0 (рис. 13.2).

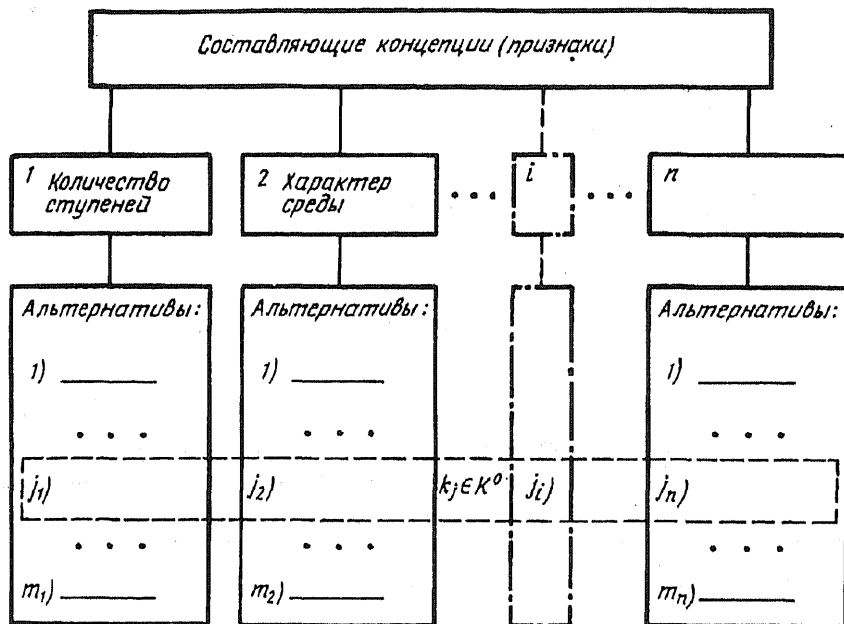


Рис. 13.2

Рассмотрим одну из конкретных концепций $k_j \in K^0$, содержащихся в этом списке. С этой целью для каждой составляющей зафиксируем одну из возможных альтернатив. Теперь конкретную концепцию можно определить как вектор (другой синоним — слово)

$$k_j = (j_1, j_2, \dots, j_n). \quad (13.1)$$

Запись (13.1) означает, что первому признаку соответствует альтернатива j_1 , второму — j_2 и т.д., т.е. каждое j_i — есть просто цифра, соответствующая порядковому номеру альтернативы.

Рассмотрим теперь вопрос о количестве концепций, содержащихся в нашем списке. На основе теоремы о мощности множества получим

$$N = \prod_{i=1}^n m_i. \quad (13.2)$$

Таким образом, мы формализовали понятие концепции, ввели описание для допустимости множества концепции и получили формулу для общего числа концепций.

Для того, чтобы придать введенным понятиям более ясное техническое содержание, необходимо рассмотреть, какими признаками следует характеризовать концепцию и каковы возможные альтернативы. Не останавливаясь подробно на этом вопросе, поясним его на примере словесного описания ракеты рассматриваемого класса: самонаводящаяся ракета нормальной крестокрылой аэродинамической схемы с радиолокационной полуактивной ГСН импульсного типа, с осколочной боевой частью и двухрежимным твердотопливным двигателем. Как видим, в этом словесном описании фигурирует девять признаков.

На этом закончим анализ концепции и перейдем к определению конструктивных параметров и управлений.

К *конструктивным параметрам* будем относить массовые и геометрические параметры, определяющие размерность объекта, к числу *управлений*, которые являются функциями времени, например, программа изменения тяги двигателя. Отметим, что программное управление — вектор-функция времени — может быть представлено набором параметров. В этом случае облик представляет собой совокупность двух составляющих — концепции и параметров.

§ 13.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОБЛИКА КАК ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим математическую формулировку задачи проектирования облика ракеты. Эта формулировка должна отражать

такие стороны, как выбор критерия, учет затрат, анализ неконтролируемых (в частности, неопределенных) факторов. В такой последовательности их и рассмотрим.

Критерий в широком смысле — это признак, по которому можно отдать предпочтение одной из альтернатив, в более узком смысле — это численный показатель эффективности технического решения. Выявление и обоснование критерия является важной задачей анализа на этапе математической формулировки задачи.

Обсудим состав показателей, которые необходимо учитывать в задаче проектирования ракеты рассматриваемого класса. Их можно отнести к одной из трех групп: 1) зоны действия (например, ЗВП); 2) мера ущерба, наносимого противнику (например, ВПЦ); 3) массо-габаритные ограничения.

Поскольку и ЗВП и ВПЦ изменяются по условиям применения и типу цели, то общее количество показателей, требующих учета, оказывается достаточно большим. Это означает, что рассматриваемая задача оптимизации является *многокритериальной*.

Существует, вообще говоря, два принципиально различных пути решения таких задач:

1. Свертывание (объединение) множества частных показателей в один обобщенный скалярный показатель, т.е. скаляризации задачи.

2. Рассмотрение частных показателей в качестве компонент векторного показателя.

Оценка эффективности по вектору показателей (второй путь) связана с рядом особенностей и требует придания нового содержания понятию оптимизации. Действительно, при оценке эффективности по одному показателю, объект считается оптимальным, если ему соответствует экстремум этого показателя.

При оценке по вектору показателей объект считают оптимальным, если не существует другого объекта, который был бы лучше данного по всем показателям (точнее, лучше хотя бы по одному, по прочим — не хуже). Как правило, такой оптимальный объект не один. В этом и состоит основная особенность векторной оптимизации. Поскольку решение задачи векторной оптимизации дает множество (вообще говоря, бесконечное) оптимальных решений, возникает вопрос, является ли подобная ситуация достоинством или недостатком векторного подхода по

сравнению со скалярным. Для ответа на этот вопрос рассмотрим две различные ситуации, возможные в задачах проектирования.

1. Если задача проектирования ракеты не обязательно должна быть замкнута на рассматриваемом уровне (т.е. в ракетном КБ), то факт множественности эффективных решений не является, вообще говоря, недостатком, так как выбор единственного решения может быть сделан на уровне надсистемы (самолетное КБ). При этом характеристика возможностей является, безусловно, более полной и представительной характеристикой, чем единственное решение, соответствующее скалярной свертке.

2. Если задача проектирования ракеты в силу каких-либо причин обязательно должна быть замкнута на рассматриваемом уровне, тот факт множественности решений является уже недостатком, так как затрудняет выбор однозначного решения.

Отметим, что поскольку по этим вопросам нельзя дать каких-либо общих рекомендаций, выбор целесообразного пути должен каждый раз обсуждаться особо. Следует однако отметить, что в практике проектирования ракет до настоящего времени используется первый путь, что в значительной мере связано с вычислительными трудностями, возникающими при векторной оптимизации при большом количестве учитываемых показателей.

Теперь остановимся на выборе способа свертывания показателей. Как показывает опыт, в качестве такого способа для рассматриваемой задачи целесообразно использовать способ, основанный на выделении «основного» показателя с переводом остальных в разряд ограничений-неравенства. Рассмотрим это подробнее. Пусть мы имеем некоторое множество показателей

$$w_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (13.3)$$

и пусть каждому из этих показателей соответствует заданное по ТТЗ ограничение w_i^0 . Тогда для выбора «основного» показателя необходимо проранжировать набор (13.3), т.е. расположить показатели в порядке убывания важности. Тогда «основным» показателем окажется показатель w_1 ($i = 1$). Конечно, процедура ранжирования дает некоторую свободу (и тем самым произвол) в выборе показателя w_1 . Вместе с тем можно сформулировать ряд требований, которым должен удовлетворять показатель, претендующий на роль «основного». Он должен быть достаточно предста-

вительным для подсистемы, достаточно чувствительным к изменению параметров облика и затрат, обладать малой чувствительностью (грубостью) в отношении неучтенных в постановке задачи факторов, возможностью просто выражаться через параметры облика и затрат.

После того, как «основной» показатель выбран, а остальные переведены в разряд ограничений-неравенств, критерий оптимизации может быть записан в виде

$$W = w_1 \left| \begin{array}{l} \\ w_i - w_i^0 \geq 0 \end{array} \right., \quad i = \overline{2, m}. \quad (13.4)$$

Как показывает опыт проектирования, в качестве «основного» показателя удобно использовать стартовую массу, которую следует минимизировать, или относительную полезную нагрузку, которую следует максимизировать. При этом заданное ТТЗ значение w_1^0 остается для контроля. Остановимся теперь на учете затрат.

Затраты на всем этапе жизненного цикла ракеты многообразны и все они должны быть учтены на этапе формирования облика. Параметры затрат при заданных условиях определяются только материальной основой объекта, т.е. его обликом, т.е. являются функцией конструктивных параметров x . Для вычисления затрат должна быть разработана математическая модель затрат (такие модели в настоящее время имеются), которая представляется соотношениями вида

$$c_i = f(k_1, k_2, \dots, k_\alpha), \quad i = \overline{1, s}. \quad (13.5)$$

Соотношение (13.5) определяет вектор затрат $c = (c_1, \dots, c_s)$ как векторную функцию векторного аргумента $c_i = f(k)$. В практике разработки ракет рассматриваемого класса используются два основных показателя: c_1 — стоимость программы опытно-конструкторской разработки ракеты; c_2 — стоимость ракеты в серийном производстве.

В ряде случаев допустимым является включение параметров затрат $c_{1,2}$ в состав показателей эффекта. С учетом этого вместо (13.4) получим

$$W = w_1 \left| w_i - w_i^0 \geq 0 \right., \quad i = \overline{2, m+2}. \quad (13.6)$$

Перейдем теперь к учету неопределенных факторов.

Неопределенность порождается отсутствием информации, достаточной для исследования и формирования объекта и оценками его эффективности, и объективно присутствует во всех задачах анализа военно-технических систем. Эта неопределенность связана как с прогнозированием уровня развития иностранной техники, так и с поведением противника в боевых операциях. Оценка эффективности проектного решения при наличии неопределенных факторов может базироваться на принципе гарантированного результата [4], в соответствии с которым всякий недостаток информации (в том числе информации о стратегиях противника) должен восполняться предположениями наихудшими с точки зрения конструктора. Получаемая при этом гарантированная оценка показателя экстремизируется за счет выбора стратегии конструктора.

Теперь перейдем непосредственно к математической формулировке задачи оптимизации. Рассмотрим критерий (13.6). Его аргументами являются: k — концепция построения ракеты, x — конструктивные параметры, $u(t)$ — управления, y — неконтролируемые (неопределенные) факторы, определяющие операцию, т.е.

$$W = F(k, x, u(t), y). \quad (13.7)$$

Сформулируем теперь задачу синтеза как задачу минимизации показателя $w_1 = m_0$. На основании (13.6) и (13.7)

$$W = \min_{\substack{k \in K \\ x \in X \\ u(t) \in U}} \left[F(k, x, u(t), y) \left| w_i - w_i^0 \geq 0 \right. \right], \quad i = \overline{2, m+2}. \quad (13.8)$$

Здесь K, X, U — допустимые множества концепции, параметров и управлений.

Задача (13.8), по крайней мере, в настоящее время, решению не поддается, в связи с чем наметим пути ее упрощения.

В качестве первого шага откажемся от синтеза концепции, т.е. рассмотрим задачу формирования облика при фиксированной концепции k_j , $j = \overline{1, l}$. Тогда вместо (13.8) получим

$$W_j = \min_{\substack{x \in X \\ u(t) \in U}} \left[F(x, u(t), y) \mid w_i - w_i^0 \geq 0 \right], \quad \begin{matrix} i = \overline{2, m+2} \\ j = \overline{1, l} \end{matrix}. \quad (13.9)$$

Решая задачу (13.9) для ряда альтернативных концепций, можно определить оптимальную концепцию из условия

$$W^* = \min W_j. \quad (13.10)$$

Целью второго шага является сведение вариационной задачи (F — функционал) к задаче математического программирования. С этой целью заменим в (13.9) управления набором параметров. Теперь имеем

$$W = \min_{x \in X} \left[F(x, y) \mid w_i - w_i^0 \geq 0 \right]. \quad (13.11)$$

В настоящее время методы решения задач математического программирования как линейных (ЛП-задачи), так и нелинейных (НП-задачи) достаточно хорошо разработаны, в том числе и при наличии неопределенных факторов. Поэтому правильно сформулированная математическая постановка задачи проектирования облика должна учитывать все существенные неконтролируемые факторы, даже если это ведет к усложнению задачи. В частности, всегда необходимо учитывать наличие неопределенных факторов, относительно которых известна только область изменения Y . Эти факторы можно разбить на естественные (природные) и искусственные, выражающие действия активного противника, преследующего свои цели. Теперь вместо (13.1) получим

$$W = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} \left[F(x, y) \mid w_i - w_i^0 \geq 0 \right]. \quad (13.12)$$

Наиболее эффективными методами решения задач в условиях неопределенности располагает теория многоцелевых систем, в которой наряду с методами, основанными на применении

«гарантирующих» оценок, используются также различные методы «усреднения» [21].

В связи с тем, что практические задачи оптимизации имеют большую размерность (вектор конструктивных параметров содержит несколько десятков компонент), эффективные процедуры оптимизации должны основываться на использовании ЭВМ.

Глава 14. МЕТОДЫ УЧЕТА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ НА ЭТАПЕ ФОРМИРОВАНИЯ ОБЛИКА РАКЕТЫ

§ 14.1. СВЯЗЬ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ ОБЛИКА РАКЕТЫ

Современные ракеты характеризуются сложностью состава, большим многообразием функциональных задач и тесной связью технических решений по объекту и его системе управления. Поэтому этап формирования облика для процесса проектирования современных объектов является решающим, так как на этом этапе принимаются все основные технические решения, в том числе и такие, которые в дальнейшем нельзя существенно изменить, не ставя под угрозу срыва разработку.

Проблема выбора концепции и оптимальных параметров облика ракеты, а также структуры и настроек системы управления является особенно актуальной в настоящее время в связи с постоянным повышением технических требований к ракетам. В этом смысле несостоятельными оказываются оба «крайних» подхода:

1) возможность выбора параметров облика исходя только из обеспечения заданных требований к летно-тактическим характеристикам, не считаясь с системой управления; последняя разрабатывается независимо из условия обеспечения требуемой точности наведения;

2) необходимость одновременного выбора параметров облика, подробной структуры и настроек системы управления.

Первый подход приводит к неполному использованию возможностей ракеты, второй — к неоправданному усложнению процесса проектирования и удлинению времени разработки.

Рациональный подход к проектированию требует создания такого метода формирования облика, который гарантировал бы

максимальное использование возможностей как самого объекта, так и его системы управления, допуская в то же время относительную свободу в выборе технических решений. Создание и использование такого метода является актуальной задачей и может быть осуществлено только на базе слияния современных методов технического проектирования с опытом создания объектов, накопленным в отрасли в предыдущие годы.

Учет системы управления при проектировании облика объекта имеет два аспекта: содержательный, предполагающий улучшение характеристик объекта за счет технических решений по системе управления; методологический, связанный с разработкой математически формализованной процедуры определения параметров облика.

В настоящем учебнике уделено внимание обоим аспектам. При этом основное внимание уделяется инженерной и математической постановке задачи проектирования, что облегчает переход к автоматизации процесса проектирования.

§ 14.2. СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА ТЕХНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ И СВЯЗИ МЕЖДУ ЕГО ЭЛЕМЕНТАМИ

Пространство технических решений трактуется обычно как пространство конструктивных параметров. Совокупность их традиционно включает как обlikовые (геометрические и весовые) параметры, так и параметры, характеризующие СУ, в качестве которых обычно рассматриваются параметры автономного контура: коэффициент усиления K и эквивалентная постоянная времени T .

Необходимость учета системы управления на этапе формирования облика связана, в частности, с необходимостью для замыкания постановки задачи проектирования определить потребный вес боевой части, зависящий от точности наведения, а следовательно, характеристик СУ. Отметим, что если привлечение представления о СУ к задаче проектирования объекта является принципиально правильным и необходимым, то сведение описания СУ к ограниченному набору параметров является неоправданным и малоперспективным. Так, например, описание СУ эквивалентной постоянной времени T и коэффициентом усиления K не оправдано по следующим причинам:

1) автономный контур управления объекта, как правило, описывается сложными передаточными функциями, так что характеризовать его двумя параметрами не представляется возможным. Так, даже в упрощенном представлении передаточная функция автономного контура объекта характеризуется шестью параметрами [17];

2) при попытке редуцировать сложную систему к системе первого порядка приходится выполнять эту редукцию отдельно по отношению динамической и случайной составляющих пролета. Получающиеся при этом эквивалентные значения T имеют существенно различные значения, так как динамическая составляющая пролета определяется фазовой характеристикой, а случайная составляющая — амплитудной характеристикой автономного контура [22].

Характеристики точности наведения определяются не настройками аппаратуры, а эффективными значениями параметров, обусловленными наличием обратных связей в автономном контуре, возникающих за счет погрешностей аппаратуры (например, синхронные ошибки). Конечно, при отсутствии жестких ограничений на размерность задачи набор параметров, описывающих СУ, может быть выбран более представительным, что позволяет несколько смягчить недостаток описанного подхода. Однако его общая оценка и в этом случае не изменяется.

Важным возражением против представления СУ набором параметров является тот факт, что имеет место разная степень ответственности при определении параметров, относящихся к облику, с одной стороны, и к настройкам СУ, с другой стороны. Так, например, изменение параметров СУ допустимо на любом этапе отработки и даже производства объекта, в то время как решения по калибру, двигательной установке и т.д., как правило, являются необратимыми.

Таким образом, описание СУ в задачах формирования облика не может быть сведено к заданию фиксированного набора варьируемых параметров. Аналогичное положение имеет место и по отношению к другим системам объекта, конкретный набор которых с учетом возможных альтернатив образует его концепцию.

Поскольку элементами пространства технических решений являются, с одной стороны, обlikовые параметры, а с другой стороны, системы, мы приходим к целесообразности его разде-

ления на два подпространства: а) систем, б) обликковых параметров [22].

Отметим, что введенное разделение пространства технических решений лежит в основе излагаемого ниже подхода к определению параметров облика объекта и отражает в данном случае методологический аспект учета СУ.

Рассмотрим состав подпространств пространства технических решений и проследим связи между двумя подпространствами. Для объектов рассматриваемого класса в составе подпространства систем целесообразно рассматривать следующие системы: 1) объект управления и расширенный объект; 2) СУ абсолютным движением; 3) СУ относительным движением; 4) СУ скоростью полета; 5) СУ боевым снаряжением; 6) СУ стартом объекта; 7) систему информационного обмена с носителем; 8) систему энергоснабжения.

Дадим краткое описание основных признаков и возможных альтернативных решений по каждой системе.

Объект управления характеризуется прежде всего обобщенными параметрами K_n и K_α , отражающими количественно все основные особенности аэродинамической схемы и определяющими параметры передаточных функций продольно-бокового канала по перегрузке и угловым колебаниям корпуса. Дополнительными характеристиками являются степень статической и динамической устойчивостей в плоском и пространственном движениях, а также упругоинерционные свойства объекта.

Примерами возможных альтернатив здесь могут быть названы объекты с аэродинамическим, газодинамическим и комбинированным управлением; с одним или двумя органами управления в каждом канале; различные типы приводов; объекты осесимметричной и самолетной схем.

Система управления абсолютным движением характеризуется совокупностью элементов СУ, обуславливающих реакцию объекта на заданный сигнал управления в продольно-боковом и пространственном движениях. Система включает измерители параметров абсолютного движения, преобразующие и вычислительные устройства.

Примерами возможных альтернатив этой системы могут быть различные структуры автопилота в продольно-боковом и креновом каналах, различные типы датчиков, наличие или отсутствие специальных компенсирующих или перекрестных об-

ратных связей, наличие или отсутствие по борту объекта инерциального базиса (физического или математического).

Система управления относительным движением характеризуется совокупностью элементов СУ, обуславливающих требуемую реакцию объекта на изменение относительного движения цели. Система включает набор модульных головок самонаведения (ГСН), схемы формирования и фильтрации управляющего сигнала, а также устройство управления объектом до захвата головкой цели.

Примерами возможных альтернатив этой системы являются различные конструктивные схемы ГСН (типы координаторов, структура системы углового сопровождения), различные схемы формирования и фильтрации сигнала (стационарный или калмановский фильтр, наличие или отсутствие оценки маневра цели), различные схемы управления на участке до захвата цели (схема с моделью наведения, инерциальное наведение), наличие специальных мер компенсации синхронных ошибок и др.

Система управления скоростью полета характеризуется совокупностью элементов СУ и двигателя, обуславливающих требуемую программу изменения расхода топлива или тяги двигателя.

Возможные альтернативы этой системы — системы с фиксированной программой расхода, системы с набором различных программ расхода, устанавливаемых по априорной информации перед пуском, системы замкнутого регулирования по текущей информации о режиме абсолютной или относительной скорости.

Система управления боевым снаряжением характеризуется совокупностью элементов неконтактного взрывателя и боевой части, обуславливающих согласование поля разлета поражающих элементов с кинематическими условиями встречи и характеристиками цели. Система включает также устройства информационного обеспечения формирования команды включения взрывателя на траектории, исходя из обеспечения максимальной траекторной устойчивости, управления углами наклона диаграмм антенн, установки времени задержки рабочего импульса, изменения чувствительности взрывателя в зависимости от оценки пролета. Примерами возможных альтернатив здесь являются различные типы боевых частей (осколочная, стержневая и др.), различные типы взрывателей (инф-

ракурсный, лазерный, радиолокационный), различные схемы формирования команд (на основе априорной информации, текущей информации с ГСН, оценок, формирующихся в схеме, и др.).

Система управления стартом характеризуется совокупностью элементов и устройств, обеспечивающих требуемые кинематические параметры отделения объекта от самолетного пускового устройства и характер движения объекта относительно носителя в непосредственной близости от него из условия безопасности носителей и уменьшения воздействия двигателя объекта на носитель. Система реализует выбранную логику воздействия элементов при тактическом и аварийном старте.

Возможные альтернативы — различные структурные схемы стабилизации объекта на начальном участке, наличие или отсутствие дополнительных органов, различные схемы арретирования органов управления.

Система информационного обмена с носителем характеризуется совокупностью элементов, обеспечивающих получение и реализацию команд с носителя в подвеске и автономном полете, встроенный контроль элементов СУ объекта и выдачу на борт носителя команд о готовности объекта.

Возможными альтернативами могут быть системы с аналоговой и цифровой связью бортов, наличие или отсутствие промежуточного преобразования координат при передаче информации, различные схемы запоминания команд, схемы радиолинии связи.

Система энергоснабжения характеризуется совокупностью источников и преобразователей энергии, обеспечивающих работу электрических и электромеханических устройств и силовых приводов органов управления объекта. В ее функции входит обеспечение бортовых устройств энергией требуемого вида, мощности и стабильности параметров, обеспечение функционирования СУ в течение заданного полетного времени, а также нужной степени развязки характеристик приводов органов управления при их совместной работе. Возможные альтернативы — различные типы первичных источников энергии (батареи, ПАД, баллонные системы) и схемы питания приводов газом или гидравликой, разного рода схемы стабилизации турбогенераторных источников и т.п.

Для объектов рассматриваемого класса к числу величин, характеризующих *подпространство параметров*, целесообразно отнести следующие:

- $G_{\text{пн}}$ — вес полезной нагрузки;
- $\overline{G}_{\text{к}}$ — относительный вес конструкции объекта;
- $\alpha_{\text{дв}}$ — относительный вес конструкции двигателя;
- $\overline{G}_{\text{т}}$ — относительный вес топлива;
- $S_{\text{м}}$ — площадь миделя;
- $S_{\text{кр}}$ — площадь крыла;
- $S_{\text{р}}, S'_{\text{р}}$ — площади основного и дополнительного органов управления;
- L — длина объекта;
- l — размах крыла;
- $l_{\text{р}}$ — размах органа управления;
- $L_{\text{к}}$ — координата крыла относительно носка;
- $L_{\text{р}}, L'_{\text{р}}$ — координата основного и дополнительного органов управления;
- $L_{\text{дв}}$ — координата двигателя;
- $\lambda_{\text{н}}$ — удлинение носовой части.

Отметим, что первые четыре параметра однозначно определяют стартовый вес объекта G_0 .

Перечисленный набор параметров для одноступенчатых крестокрылых объектов рассматриваемого класса, как правило, является достаточным для представления объекта на этапе формирования облика. При необходимости приведенный набор параметров может быть дополнен. При этом предполагается, что формы несущих и управляющих поверхностей в плане, характеризующиеся величинами удлинения, сужения и стреловидности кромок, их относительные толщины выбираются из некоторого набора типовых поверхностей.

Рассмотрим основные связи между элементами указанных подпространств, классификационная схема которых приведена на рис. 14.1. Связи между элементами внутри подпространства систем (например, влияние динамических характеристик расширенного объекта на динамические характеристики контура

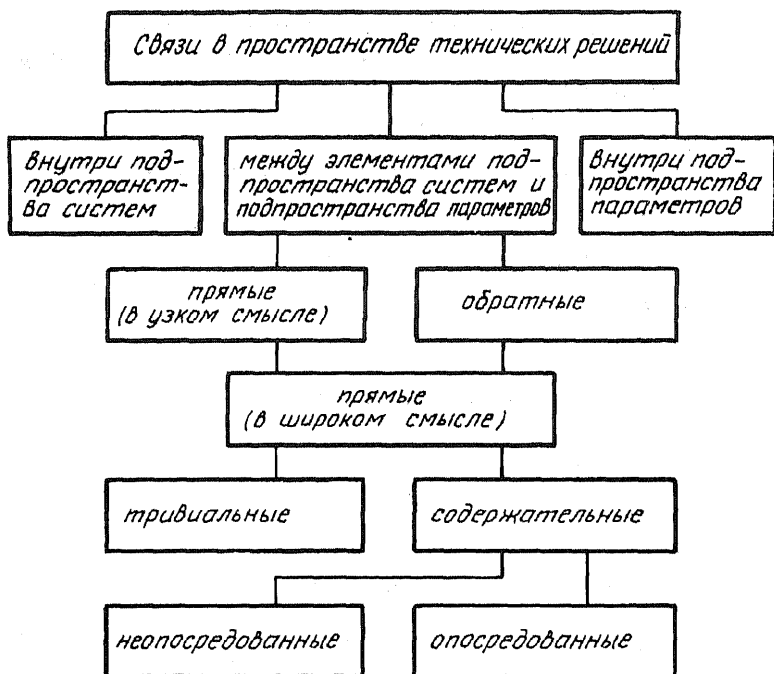


Рис. 14.1

стабилизации и т.п.), а также связи внутри подпространства параметров ввиду их очевидности здесь описывать не будем.

Рассмотрим связи между элементами подпространства систем и подпространства параметров. Эти связи принципиально могут быть двух типов: «прямые» (в узком смысле), характеризующие влияние системы на параметры, и «обратные», характеризующие влияние параметров на системы. Пример «прямой» связи: влияние типа двигателя и системы управления скоростью на выбор миделя; пример «обратной» связи: влияние размещения двигателя (через разбег центровки) на устойчивость и выбор схемы КС.

Для целей предварительного проектирования целесообразно оба типа связей рассматривать как «прямые» в широком смысле, что может быть достигнуто заменой учета обратного влияния параметров на системы учетом дополнительных требований к значениям параметров исходя из условий работы систем (на-

пример, задаваться допустимым разбегом центровки, что наложит ограничения на выбор координаты двигателя). Тем самым рассматриваемые связи будут характеризовать влияние выбора концепции на обlikовые параметры.

Среди прямых связей можно выделить прежде всего такие, которые выражают вклад каждой из систем в вес и габариты полезной нагрузки и потребление энергии, Эти связи являются тривиальными и в дальнейшем подробно не будут рассматриваться. Остальные связи, содержательные с точки зрения учета влияния подпространства систем на параметры, определяющие облик, можно разделить на две группы.

К первой группе отнесем связи, отражающие непосредственное влияние. Примером такой связи является влияние требований к синхронной ошибке, обусловленной обтекателем ГСН, на выбор удлинения носовой части. Ко второй группе будем относить связи, отражающие влияние опосредованно через некоторую промежуточную характеристику — «посредник», например, влияние той же синхронной ошибки на выбор площади крыла, обусловленное зависимостью точности наведения от рассмотренного выше коэффициента усиления паразитной обратной связи (произведение градиента синхронной ошибки на удельную нагрузку на крыло объекта). В качестве посредника здесь выступают характеристики точности наведения.

Для объекта рассматриваемого класса в качестве таких посредников целесообразно принять следующие:

K_n, K_α — обобщенные параметры, характеризующие аэродинамическую схему;

C_{x0} — коэффициент лобового сопротивления при нулевой подъемной силе;

C_{xi} — коэффициент индуктивного лобового сопротивления;

$m_{z\text{нач}}^{C_y}$ — начальный запас продольной статической устойчивости;

$m_z^{C_y}$ — запас продольной статической устойчивости на пассивном участке ;

$n_{y\text{max}}$ — уровень аппаратурного ограничения боковой перегрузки;

α_{max} — максимально допустимый угол атаки;

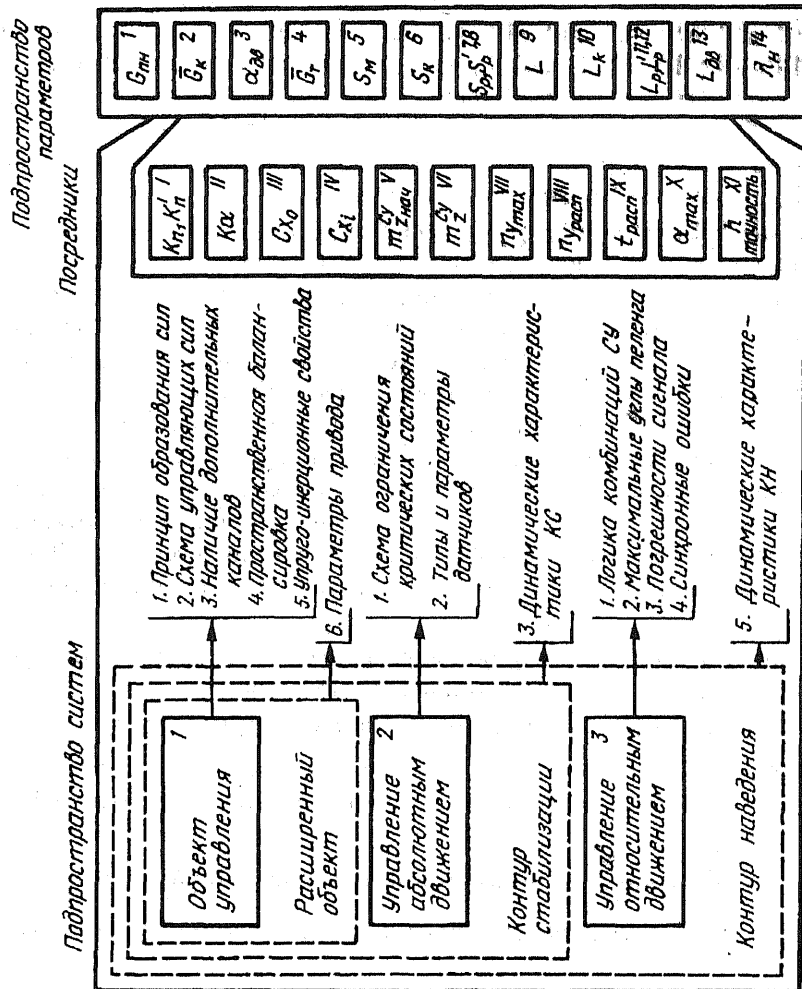


Рис. 14.2

t_{Π} — максимально располагаемое полетное время;

статистические характеристики (например, математическое ожидание h и среднеквадратическое отклонение σ пролета h , σ).

Решение задачи выбора облика с учетом СУ на ЭЦВМ неизбежно связано с перебором большого числа альтернатив, поэтому необходимо формализовать описание рассмотренных связей. Удобный путь формализации состоит в построении так называемой семантической модели [22], основанной на использовании языка бинарных отношений. Словарь и синтаксис в нашем случае можно построить следующим образом:

а) в качестве базовых понятий будем рассматривать конкретные признаки конкретных систем и обозначим их: $A_{k,l}$; $K = 1, 2, \dots, K^*$; $l = 1, 2, \dots, l_k^*$ (K^* — число систем, l_k^* — число признаков k -системы);

б) в качестве базовых имен рассматриваем весогеометрические параметры облика, обозначим их a_i , $i = 1, 2, \dots, i^*$ (i^* — число параметров);

в) в качестве базовых отношений, которые обозначим r_j , $j = 1, 2, \dots, j^*$ (j — число посредников), будем рассматривать отношения типа «данный признак системы влияет непосредственно ($j = 0$) или через m -й параметр-посредник ($j = j_m$) на такой-то параметр облика». При этом системы, их признаки, параметры облика и посредники предполагаются перенумерованными. В нашем случае $K^* = 8$, $i^* = 14$, $j^* = 10$. Тогда синтаксически правильные фразы будут иметь вид

$$\Phi = A_{k,l} r_0 a_i; \quad \Phi = A_{k,l} r_{j \neq 0} a_i.$$

Это означает, что в процедуре перебора альтернатив учитывается данная непосредственная или опосредованная связь в пространстве технических решений.

Основные связи для первых трех систем показаны на общей структуре пространства технических решений (рис. 14.2). Например, учет указанных выше двух типов проявления влияния синхронной ошибки на параметры облика представляется соответственно $A_{34} r_0 a_{14}$ и $A_{34} r_{10} a_5$.

§ 14.3. ПОНЯТИЕ О ДОСТИЖИМОЙ ТОЧНОСТИ НАВЕДЕНИЯ И ОБОБЩЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

В настоящее время методы оценки точности наведения достаточно разработаны [17, 18, 30]. Как правило, они основаны на подробных математических моделях объекта и СУ. Для начальных этапов разработки нам необходима оценка достижимой точности наведения при фиксированных параметрах облика, причем принятый для этой оценки метод должен основываться на использовании обобщенных характеристик СУ и не требовать конкретизации ее структуры и параметров. Наметим, следуя [18], такой путь для системы самонаведения, поскольку оно используется на конечном участке при большинстве комбинированных методов. Будем характеризовать точность наведения величиной мгновенного пролета, фиксированного в контрольный момент времени, например, момент срыва наведения, неизбежного в силу физических ограничений координаторов. Для этого пролета справедлива формула

$$h = \frac{D_k^2}{\dot{D}} \omega_k = \dot{D} \omega_k t_k^2,$$

где D_k — контрольная дальность; $\dot{D}$ — скорость сближения; ω_k — угловая скорость линии визирования в контрольный момент времени; $t_k = D_k / \dot{D}$ — время полета, оставшееся до встречи.

Рассматриваем достаточно представительную структуру автономного контура в системе самонаведения (плоская задача), пример которой дает рис. 14.3, а. Здесь передаточная функция АК определяется шестью параметрами: K , T , τ , $\frac{1}{Q}$, τ_1 , ξ_1 , которые в данном случае не совпадают с настройками СУ в чистом виде, их численные значения определяются с учетом паразитных связей (например, η_c), нелинейностей, шумов и т.д. В этом смысле указанные параметры только условно характеризуют динамику углового сопровождения, контура стабилизации, фильтра. На схеме показаны также основные возмущения, определяющие пролет: χ — шумы, приведенные к входу координатора; $\Delta\omega$ — погрешность измерения угловой скорости

ГС; Δn — погрешность обработки заданной перегрузки; $n_{ц}$ — перегрузка маневрирующей цели.

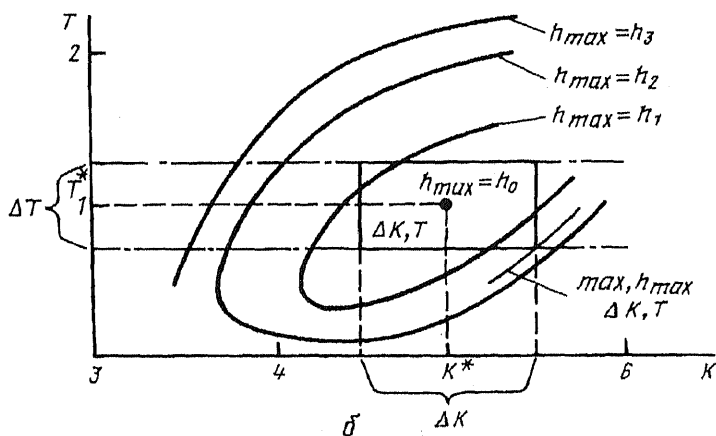
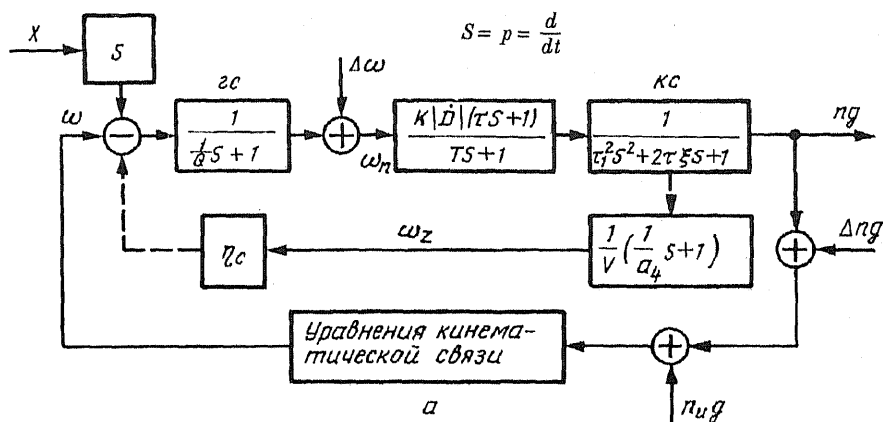


Рис. 14.3

Шумы представляются в виде суммы двух случайных процессов

$$\chi(t) = \chi_1(t) + \frac{1}{D(t)} \chi_2(t), \quad (14.1)$$

где χ_1 — угловой шум (фединг отраженного сигнала, шум фото-приемника); χ_2/D — линейный шум, интенсивность которого нарастает с уменьшением дальности (блуждание яркой точки по размерной цели). $\chi_1(t)$ и $\chi_2(t)$ считаются стационарными белыми шумами со спектральными плотностями соответственно $G_1[c]$ и $G_2 [m^2c]$. Принцип суперпозиции для системы рис. 14.3, а при

известной $D(t)$ позволяет считать пролет в виде суммы $\sum_1^6 h_i$ слабых, обусловленных соответственно начальным промахом h_0 и указанными выше возмущениями. Справедливы формулы (σ означает среднеквадратическое отклонение)

$$\begin{aligned} h_1 &= \eta_1 h_0; \quad \eta_1 [1]; & \sigma_4 &= \eta_4 \sqrt{G_2}; \quad \eta_4 [c^{-\frac{1}{2}}]; \\ h_2 &= \eta_2 n_{\text{ц}} g; \quad \eta_2 [c^2]; & \sigma_5 &= \eta_5 |2\dot{D}| \sigma_{\Delta \omega}; \quad \eta_5 [c^2]; \\ \sigma_3 &= \eta_3 |\dot{D}| \sqrt{G_1}; \quad \eta_3 [c^{\frac{1}{2}}]; & \sigma_6 &= \eta_2 \sigma_{\Delta n g}, \end{aligned} \quad (14.2)$$

на основании которых систематическая составляющая и среднеквадратическое отклонение суммарного пролета находятся соответственно по формулам

$$h_{\text{ср}} = h_1 + h_2; \quad \sigma_h = \sqrt{\sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2 + \sigma_6^2}. \quad (14.3)$$

Для коэффициентов h_i , именуемых коэффициентами пролета, в [18] приведены подробные графики, рассматривающие их в виде функций обобщенных параметров K , T при фиксированных $\frac{1}{Q}$, τ_1 , ξ_1 и фиксированном безразмерном времени

$\frac{t_k}{t_0}$, где t_0 — полное полетное время. Графики допускают экстраполяцию по определенному закону. Для оценки пролета как случайной (гауссовой) величины введем понятие пролета максимального с заданной вероятностью, определяя его как

$$h_{\text{max}} = h_{\text{ср}} + \lambda \sigma_h, \quad (14.4)$$

где λ зависит от заданной вероятности ($\lambda=2$ для вер. = 0,96).

При этом $h_{\max}$ так же, как $h_{\text{ср}}$ и σ_h , будет функцией K и T . Характер зависимостей коэффициентов пролета $\eta_i(K, T)$ показывает, что $h_{\text{ср}}$ убывает, а σ_h возрастает с увеличением K и уменьшением T . Поэтому в зависимости $h_{\max}(K, T)$ проявляется, как правило, локальный минимум в некоторой точке K^*, T^* . В окрестности этой точки на плоскости параметров K, T линии равных значений $h_{\max}$ имеют замкнутый вид (см. рис. 14.3, б).

Мы приходим к следующей процедуре оценки достижимой точности наведения:

1. Рассматривается обобщенная передаточная функция АК и выделяются ее определяющие параметры K и T .

2. Определяются зависимости $h_{\text{ср}}(K, T)$, $\sigma_h(K, T)$, и $h_{\max}(K, T)$ и строятся линии уровня $h_{\max}$ в плоскости K, T .

3. Определяются значения K^*, T^* , отвечающие $\min_{K, T} h_{\max}$.

4. Вводится Δ_{KT} -окрестность точки K^*, T^* , размеры которой учитывают технологические допуски, возможности юстировки, «запас на отработку» (по опыту создания аналогичных объектов и СУ) и определяются максимальные в этой области значения $h_{\max}$, т.е. $\max_{\Delta_{KT}} h_{\max}$.

5. Определяются $h_{\text{ср}}$ и σ_h , отвечающие найденному значению $\max_{\Delta_{KT}} h_{\max}$.

Указанная процедура повторяется для всех зачетных режимов ($H, M, n_{\text{ц}}$), при этом определяются значения $h_{\text{ср}}$ и σ_h для наибольшего по режимам значения максимального пролета $\max_{\text{реж}} \max_{\Delta_{KT}} h_{\max}$. Найденные таким путем значения $h_{\text{ср}}$ и σ_h мож-

но использовать в качестве характеристик достижимой точности наведения при заданных параметрах облика объекта. Мы получили эти значения, не фиксируя настроек СУ, а оценивая характеристики пролета в некоторой «размытой» области параметров и структур СУ.

§ 14.4. ОБЩАЯ СТРУКТУРНАЯ СХЕМА УЧЕТА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ОБЛИКА РАКЕТЫ

Перейдем теперь к общей задаче проектирования облика [22]. Процесс выбора параметров облика будем основывать на последовательном решении следующих трех частных взаимосвязанных задач: аэробаллистического проектирования при фиксированной полезной нагрузке; оценки достижимой точности наведения и параметров движения при фиксированных параметрах облика;

определения весогеометрических параметров полезной нагрузки при фиксированных точности наведения, параметрах движения и заданных требованиях на вероятность поражения цели.

Указанные задачи объединим в замкнутую процедуру метода последовательных приближений, структурная схема которой приведена на рис. 14.4.

В первом (основном) блоке реализуется процедура выбора весогеометрических параметров и двигателя, а также управлений двигателем (закон изменения тяги при выбранной полезной нагрузке). При этом в цикле работы блока оказываются учтенными такие характеристики СУ, как параметры ограничения критических состояний, уровень флюктуационной перегрузки и др.

Блок работает в режиме синтеза, вычислительные алгоритмы блока основаны на использовании методов машинной оптимизации.



Рис. 14.4

Во втором блоке реализуется процедура оценки достижимой точности, аналогичная приведенной в предыдущем пункте. Основной особенностью ее является тот факт, что процедура не предусматривает фиксации настроек СУ, а дает оценку статистических характеристик пролета для некоторого диапазона возможных значений настроек. Такое «размытие» параметров может быть проведено не только на уровне контура наведения, но и для подсистем более низкого уровня. Для контура стабилизации можно оценить достижимое быстродействие (время переходного процесса $t_{пп}$ при вариациях параметров КС, например коэффициентов усиления по сигналам датчиков угловой скорости $K_{дус}$ и линейного ускорения $K_{длу}$, аналогично определению $\max \max_{\text{реж}} h_{\max}: t_{пп\min} = \max_{\text{реж}} \max_{\Delta} t_{пп}$, где Δ —

окрестность точки $K_{дус}^*$, $K_{длу}^*$, доставляющей минимум времени $t_{пп}$ в плоскости параметров $K_{дус}$, $K_{длу}$. Для объекта как подсистемы можно рассматривать запас статической устойчивости, реализуемой с учетом возможных вариаций центровки и положений крыла в ходе последующей разработки объекта, вводя, например, $\min_M \min_{\Delta_{X_T} L_k} m_{z^y}^C$, где M — число Маха, $\Delta_{X_T} L_k$ — окрестность значений X_T и L_k , отвечающих оптимальному значению $m_{z^y}^C$, и т.д.

Блок работает в режиме анализа. Вычислительные алгоритмы могут быть построены как по принципу прямого (детерминированного или статистического) моделирования процесса наведения, моделирования системы уравнений, сопряженной с данной линеаризованной, так и использования таблиц пролета. В этом же блоке производится оценка статистических характеристик параметров движения (средние или максимальные значения параметров угловых скоростей корпуса и сопровождения цели, шарнирных моментов), влияющих на вес полезной нагрузки через энергетические и прочностные характеристики элементов объекта и СУ.

В третьем блоке реализуется процедура определения весогеометрических параметров полезной нагрузки при фиксированных точности наведения, параметрах движения и заданной эффективности объекта.

В состав полезной нагрузки включают элементы системы управления, бортовые источники питания и приводы рулей и, наконец, элементы боевого снаряжения, включающего непосредственно боевую часть. По смыслу использования схемы (рис. 14.4) этот блок должен работать в режиме синтеза. Отметим, однако, что с точки зрения конкретной процедуры синтеза весогеометрических параметров подход к различным элементам полезной нагрузки должен быть различным. Эти элементы можно условно разделить на три группы:

- 1) боевая часть (БЧ);
- 2) собственно аппаратурные (электронные блоки головок наведения, автопилотов, взрывателей, вторичные источники питания, БЦВМ);
- 3) механико-энергетические (подвижные координаторы, приводы рулей, первичные источники питания).

Для оценки параметров боевой части принципиально можно решить замкнутую задачу синтеза, рассматривая, например, заданную вероятность поражения как параметр эффекта, вес и габариты в качестве критерия, характеристики точности в качестве ограничительных условий. Однако удобных инженерных методик еще не создано, что объясняется как неоднозначностью понятия «поражение», так и необходимостью иметь различные методики ввиду многообразия физических принципов построения БЧ, отсутствием нормативных количественных показателей уязвимости целей и др. Поэтому задачу синтеза весогеометрических параметров БЧ приходится решать путем многократного решения задачи анализа-оценки вероятности поражения цели при заданных точности наведения, характеристиках взрывателя и фиксированных параметрах БЧ. Методика такой оценки, на которой можно основывать вычислительную процедуру, приведена в [18].

Оценка весогеометрических параметров аппаратурных элементов должна проводиться главным образом в зависимости от предполагаемого уровня перспективности элементной базы (полупроводниковая техника, большие интегральные схемы и т.д.). Для каждого данного уровня путем анализа информационных материалов по аналогам (экспертная оценка) можно получить условную зависимость относительного суммарного веса соответствующего устройства от класса объекта, его энерговооружен-

ности, заданных ЛТХ и др. В среднем вес аппаратурных элементов, по данным зарубежной информации, составляет 12 — 15% стартового веса объекта.

Третью группу составляют элементы, весогеометрические характеристики которых полностью или частично определяются параметрами абсолютного или относительного движения объекта, нагрузками, полетным временем и др. Для них процедура оценки может быть построена следующим образом:

- 1) на основании оценок параметров движения, полученных во втором блоке, определяются потребные значения энергетических параметров (мощностей, моментов, токов).

- 2) определяется постоянная часть расхода энергии, не связанная с параметрами движения, а зависящая только от времени (расход газа струйными устройствами, потери энергии в разомкнутых схемах источников питания);

- 3) по найденным оценкам определяются весогеометрические параметры агрегатов с учетом удельных коэффициентов влияния, принимаемых на основании опыта.

Следует отметить, что при выбранном уровне элементной базы и фиксированном наборе признаков подсистем требование повышения точности наведения приводит к увеличению веса аппаратурных агрегатов, поскольку специальные технические решения (типа компенсации погрешностей, уменьшения аппаратурных уходов, усложнения алгоритмов БЦВМ), как правило, требуют увеличения объема электронных блоков и габаритов приборов. При проектировании объекта приходится решать вопрос о рациональном распределении веса между аппаратурной СУ и боевой частью, обеспечивая требуемую вероятность поражения цели в одном случае за счет уменьшения пролета, в другом — за счет веса боевой части. Поэтому второй и третий блоки схемы (рис. 14.4) должны работать в единой процедуре. Это является дополнительным аргументом в пользу построения вычислительного алгоритма синтеза параметров полезной нагрузки в третьем блоке на основании многократного решения задачи анализа.

Таким образом, приведенная на рис. 14.4 общая структурная схема позволяет путем последовательного уточнения набора обликковых параметров в замкнутой процедуре учесть

основные особенности СУ на этапе формирования облика. Как видим, схема на рис. 14.4 может использоваться в следующих режимах:

- а — заданы параметры полезной нагрузки;
- б — задана точность наведения и параметры движения;
- в — заданы обликоты параметры по прототипу;
- г — режим последовательных приближений.

В первом случае используется блок I; во втором — блоки III и I в разомкнутой схеме; в третьем — блоки II, III и I в разомкнутой схеме; в четвертом — все блоки в замкнутой схеме. В качестве исходного набора могут быть взяты обликоты параметры обобщенного прототипа, который не обязательно должен соответствовать какому-либо реальному образцу, а может представлять собой совокупность технических решений из нескольких разработок.

Глава 15. АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА ФОРМИРОВАНИЯ ОБЛИКА РАКЕТЫ

§ 15.1. ОБЩАЯ СТРУКТУРА И ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ

Автоматизация проектирования облика ракеты претерпевает эволюцию и бурное развитие в связи с развертыванием высокопроизводительных вычислительных систем в проектно-конструкторских организациях и внедрением нового методологического обеспечения. В процессе этого развития пока не созданы унифицированные установившиеся структуры систем автоматизированного проектирования (САПР) и поэтому здесь излагаются лишь основные принципы создания таких систем.

В настоящее время принято выделять следующие уровни автоматизации:

1 уровень — уровень отдельных прикладных программ, характеризуется автоматизацией отдельных операций стадий анализа и синтеза;

2 уровень — уровень пакетов прикладных программ позволяет автоматизировать отдельную стадию или весь этап проек-

тирования с помощью объединения программных модулей в пакет прикладных программ;

3 уровень — САПР облика ракеты.

Выделим некоторые признаки, отличающие САПР от предыдущих двух уровней автоматизации.

1. Комплексность (или системность) — признак заключается в том, что автоматизация проектирования должна пронизывать весь процесс проектирования.

2. Простота обращения с ЭВМ означает наличие: а) технических средств, б) входного языка, в) средств вывода информации, г) возможного диалога с ЭВМ.

3. Быстродействие, под которым понимается достаточно малое время (3 — 5 мин) выполнения ЭВМ каждого этапа проектирования. Это время необходимо для осуществления диалога пользователя с ЭВМ в естественном для человека ритме.

Процесс создания САПР облика ракеты, как и любой другой технической системы, базируется на следующих общих принципах: включения, системного единства, комплексности, развития, информационного единства, совместимости, инвариантности.

Смысл первых трех принципов во многом исчерпывается описанием приведенного выше 1-го признака САПР.

Принцип развития требует, чтобы САПР облика разрабатывалась и функционировала как развивающаяся система. Это, в частности, означает, что расширение функциональных возможностей САПР (т.е. увеличение числа классов решаемых задач) не должно приводить к переработке программных модулей действующих (до расширения) процедур. Принцип информационного единства, совместимости и инвариантности состоит в том, что различные САПР должны использовать единую терминологию, символы, условные обозначения, способы представления информации. Построение САПР облика с использованием этих принципов позволяет создать интегрированную САПР облик, охватывающую в пределе всю совокупность задач САПР облика ракеты.

Излагаемая ниже система формирования облика представляет собой комплекс программ и методик расчета основных весогеометрических параметров ракеты и ее тактико-техниче-

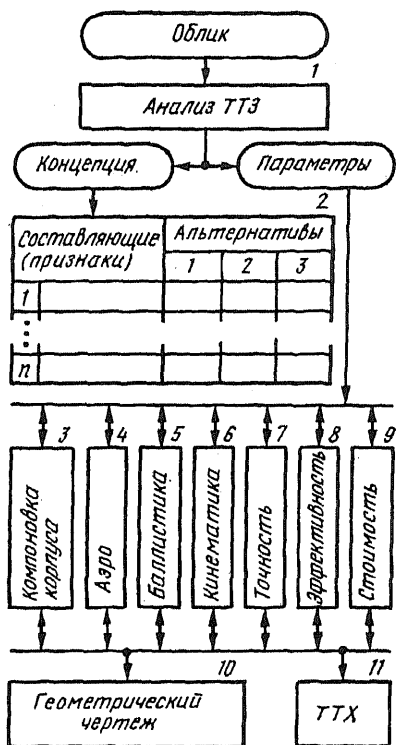


Рис. 15.1

ских характеристик, определяемых на этапе формирования облика.

Общая структура системы формирования облика ФОР-ВВ представлена на рис. 15.1.

Система основана на использовании понятия облик, под которым понимается совокупность концепции и определяющих технических параметров ракеты.

Рассмотрим основные задачи, решаемые системой ФОР. Задача выбора *тактической* концепции в части определения основной боевой задачи, типа ракеты и потребных характеристик должна опираться на тактико-техническое задание (ТТЗ).

К числу основных исходных данных, задаваемых в ТТЗ относятся:

1) вид носителя — основной, дополнительный;

2) тип зачетной цели и ее основные параметры: диапа-

зон скоростей, максимальная перегрузка, величина ЭПР;

3) максимальная высота применения ракеты;

4) тип системы управления;

5) весогеометрические ограничения на параметры ракеты;

6) дальность захвата головки самонаведения;

7) тип размещения ракеты на носителе.

Задача выбора *технической* концепции сводится к выбору основных технических решений по ракете и установлению возможных альтернатив, Упрощенный перечень составляющих технической концепции и альтернатив приведен в табл. 15.1.

Таблица 15.1

№ п/п	Составляющие технической концепции	Альтернативы		
		1	2	3
1	Количество ступеней ракеты	1	2	—
2	Тип аэродинамической схемы	нормальная	«утка»	«поворотное крыло»
3	Тип РДТТ	однорежим- ный	двухрежим- ный	двухимпульс- ный
4	Использование ГДУ для создания управляющего моментов	отсутствует	двухканальное	трехканальное

Как видим, таблица содержит четыре составляющие технической концепции и в каждой из них, кроме первой, имеются три альтернативы, в первой — две альтернативы. Общее количество концепций, содержащихся в этой таблице, суть

$$N = \prod_{i=1}^n m_i = 2^1 \cdot 3^3 = 54.$$

Естественно, что не все концепции, содержащиеся в этой таблице, целесообразны в реализации, в связи с чем отбор рассматриваемых концепций должен производиться проектировщиком на основе опыта предшествующих разработок.

Следующим этапом являются *параметрические расчеты* массогабаритных размеров ракеты и ее тактико-технических характеристик. Целью этих расчетов является выбор размеров и конфигурации ракеты, наилучшим образом удовлетворяющих всему комплексу требований. На этом же этапе одновременно производится технико-экономическое обоснование целесообразности разработки нового образца.

В основу работы системы положен подход, основанный на формировании облика ракеты *заданной* стартовой массы m_0 , значение которой задается в ТТЗ. При этом для установления определяющих связей между параметрами компоновки, ее лет-

но-техническими характеристиками подсистема выбора технических параметров должна содержать следующие блоки (подсистемы):

1. Блок весового анализа компоновки и центровки ракеты.
2. Блок выбора параметров аэродинамической схемы и определения коэффициентов сил и моментов.
3. Блок расчета баллистических характеристик.
4. Блок расчета кинематики относительного движения ракеты.
5. Блок расчета точности наведения.
6. Блок расчета эффективности.
7. Блок оценки стоимости.

Параметрические расчеты образуют цикл, который с целью выбора оптимального варианта может многократно повторяться, в частности, за счет изменения калибра ракеты.

Ниже рассматриваются математические модели подсистем.

Блоки, образующие систему (рис. 15.1), можно разделить на три группы.

К первой группе относятся блоки анализа ТТЗ (блок 1) и выбора технической концепции (блок 2), ко второй — блоки параметрических расчетов (блоки 3 ÷ 8), к третьей — блок оценки стоимости (блок 9).

Блоки 1, 2 фиксируют концепцию образца и задают исходные данные для формирования облика; блоки 3 ÷ 8 образуют многократно повторяющийся цикл параметрических расчетов, в блоке 9 после завершения этапа параметрических расчетов и выбора оптимального варианта проводится оценка стоимости.

§ 15.2. ПОДСИСТЕМЫ АНАЛИЗА ТТЗ И ВЫБОРА ТЕХНИЧЕСКОЙ КОНЦЕПЦИИ

В этом блоке на основе анализа ТТЗ определяются:

1) тип разрабатываемой ракеты. В настоящее время в основном типаже ракет рассматриваемого класса содержатся следующие три типа ракет: РМД, РСД, РБД;

2) тип системы управления, используемой на ракете. В настоящее время ракеты типа РСД и РБД комплектуются комбинированными СУ, включающими инерциально-корректируемое наведение на начальном участке и самонаведение с АРГС на конечном. Система основана на использовании БЦВМ. Этот тип

управления в системе ФОР принимается в качестве основного. Для РМД используется самонаведение с ТГС;

3) весогабаритные ограничения на ракету — стартовый вес (масса), длина, поперечный габарит;

4) $D_{0\max}$ — максимальная дальность пуска;

5) $H_{\max}$ — максимальная высота боевого применения;

6) W — требуемое значение вероятности поражения цели;

7) тип и характеристики зачетной цели.

Тип цели определяется ее назначением и величиной ЭПР, характеристики — максимальными значениями скорости и перегрузки. Здесь не фиксируются тип, схема размещения и основные характеристики носителя, под который производится разработка ракеты. Это связано с тем, что в современных условиях ракета должна быть в достаточной степени унифицирована для применения на ряде носителей. Кроме того, требования по размещению ракеты на носителе косвенно учитываются в виде задаваемых в ТТЗ ограничений на весогабаритные параметры ракеты.

К числу дополнительных требований, также, как правило, задаваемых в ТТЗ, относится требование по дальности захвата ГСН. Если эта дальность в ТТЗ не задана, то ее можно определить из следующего соотношения:

$$D_{\text{захв}} = k D_{0\max}.$$

Здесь величина k зависит от типа СУ. Для основного типа СУ, используемого в РСД и РБД, $k = 0,2 \div 0,25$.

Формализация основных требований на ракету и определение исходных данных для формирования облика ракеты заключается в составлении таблицы основных требований (табл. 15.2)

Таблица 15.2

Тип ракеты	Тип СУ	Ограничения	$D_{0\max}$	$H_{\max}$	Вероятность поражения цели	Цель	$D_{\text{захв}}$
1	2	3	4	5	6	7	8
		.	.	.		.	.
		.				.	
		.				.	

Отметим, что в столбцах 1, 2, 4 — 6 и 8 этой таблицы содержится по одному элементу, в столбце 3 — три элемента (масса, длина, поперечный габарит), в столбце 7 — четыре элемента (тип цели, ЭПР, максимальная скорость, максимальная перегрузка).

При формировании технической концепции рассматриваются следующие четыре ее составляющие.

1. Количество ступеней ракеты. Стоящие на вооружении в настоящее время ракеты выполнены, как правило, по одноступенчатой схеме. Вместе с тем, в проработках перспективных ракет, рассматриваются и как альтернативы одно- и двухступенчатые схемы. Последние обладают лучшими баллистическими характеристиками. Однако организация старта таких ракет с носителя, действующего в составе группы самолетов, нуждается в дополнительных исследованиях.

2. Тип аэродинамической схемы. В ракетах рассматриваемого класса до настоящего времени использовались все типы аэродинамических схем. В проработках перспективных ракет акцент смещается в пользу нормальной аэродинамической схемы, в связи с чем при разработке системы ФОР ей и уделено основное внимание.

3. Тип РДТТ. Ракеты с РДТТ занимают важнейшее место в ракетах рассматриваемого класса. По ряду обстоятельств здесь не используется такой высокоэффективный двигатель, как КРПД, что связано с невозможностью обеспечения в двигателе с нерегулируемой геометрией (воздухозаборник, сопло) требуемых характеристик в широком диапазоне условий применения. Альтернативными реализациями РДТТ являются: однопережимные, двухрежимные и двухимпульсные программы тяги.

4. Использование на ракете системы газодинамического управления (ГДУ). Аэродинамический тип управления ракетой, отработанный в предшествующих разработках ракет рассматриваемого типа оказался достаточно эффективным для углов атаки до $25 + 30^\circ$. Увеличение значений максимального угла атаки перспективных носителей (вплоть до $60 + 90^\circ$) требует проведения дополнительных исследований по организации старта в этих условиях. Эффективным средством здесь могут оказаться системы ГДУ.

Альтернативами здесь являются: ракеты без ГДУ, ракеты с двухканальным ГДУ (основные каналы); ракеты с трехканальным ГДУ (основные каналы и крен).

Основным принципом, заложенным в систему ФОР является формирование ракеты фиксированной концепции. Поэтому переход к другой концепции требует повторного параметрического исследования. Формализация технической концепции требует формирования таблицы, включающей выбранные альтернативы по каждой из составляющих концепции (см. табл. 15.3)

Таблица 15.3

Составляющие концепции	1	2	3	4
Альтернативы	.	.	.	.

Здесь в каждом столбце ставится цифра, соответствующая порядковому номеру альтернативы.

Например, для одноступенчатой ракеты нормальной аэродинамической схемы с однорежимным двигателем, не использующей ГДУ, в каждом из четырех столбцов будут стоять единицы.

§ 15.3. ПОДСИСТЕМА КОМПОНОВКИ КОРПУСА

Стартовая масса ракеты определяется зависимостью

$$m_0 = \frac{m_{\text{пн}}}{1 - \overline{m}_{\text{пл}} - (1 + \alpha) \overline{m}_{\text{т}}}. \quad (15.1)$$

Рассмотрим основные составляющие формулы (15.1). масса полезной нагрузки $m_{\text{пн}}$. Полезная нагрузка включает ГСН, боевую часть и бортовую аппаратуру. Масса ГСН определяется зависимостью

$$m_{\text{ГСН}} = \sqrt[3]{\overline{D}_{\text{захв}}}, \quad (15.2)$$

где $\overline{D}_{\text{захв}}$ — относительная дальность захвата, причем — для активной РГС $\overline{D}_{\text{захв}} = 370 D_{\text{захв}}$; для полуактивной РГС $\overline{D}_{\text{захв}} = 150 D_{\text{захв}}$;

для ТГС — $\bar{D}_{\text{захв}} = 5,5 D_{\text{захв}}$. В этих зависимостях $D_{\text{захв}}$ измеряется в км.

Масса боевой части определяется по приближенной методике, основанной на введении параметров σ_3 и R_0 (см. далее блок «точность» и «эффективность»).

В соответствии с этой методикой вероятность поражения цели одной ракетой W может быть приближенно представлена в виде

$$W_1 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma_3}{R_0} \right)^2}. \quad (15.3)$$

Здесь σ_3 — среднее квадратическое отклонение эквивалентного рассеивания; R_0 — параметр условного закона поражения, определяемый массой боевой части и типом цели в соответствии с выражением

$$R_0 = K_R \sqrt{m_{\text{БЧ}}}. \quad (15.4)$$

Для цели F-15 величина $K_R = 1,22$. Требуемое значение W_1 составляет 0,7. Определяя отношение $\frac{\sigma_3}{R_0}$ из выражения для W_1 с учетом требуемых значений W_1 и K_R , получаем

$$\frac{\sigma_3}{R_0} = \sqrt{\frac{1}{W_1} - 1} = 0,655.$$

Из (15.4) при $K_R = 1,22$ имеем

$$m_{\text{БЧ}} = \left(\frac{R_0}{K_R} \right)^2 = 0,67 R_0^2. \quad (15.5)$$

В таблице 15.4 приведены значения величин σ_3 и $R_0 = 1,53 \sigma_3$. Там же приведены значения массы БЧ для рассматриваемых ракет, определенные по (15.5).

Масса бортовой аппаратуры. Бортовая аппаратура включает: неконтактный взрыватель, инерциальную СУ (автопилот), бортовой источник питания, рулевой привод. С достаточной для рассматриваемого этапа точностью, можно принять

$$\bar{m}_{\text{ап}} = \frac{m_{\text{ап}}}{m_0} = 0,164.$$

Таблица 15.4

Параметр	Тип ракеты		
	РМД	РСД	РБД
σ_0	2,0	3,7	4,4
R_0	3,05	5,65	6,7
$m_{БЧ}$	3,3	21,5	30

Масса конструкции планера $m_{пл}$. Конструкция планера включает: обтекатель ГСН, корпуса 1, 2 и 5 отсеков, крылья, рули (масса конструкции отсеков 3 и 4 включается соответственно в массы БЧ и двигателя).

На основании статистических данных по современным ракетам можно принять $\bar{m}_{пл} = \frac{m_{пл}}{m_0} = 0,11$.

Коэффициент весового совершенства конструкции двигателя. Под коэффициентом весового совершенства двигателя понимают отношение массы конструкции двигателя (корпус, сопло) к массе размещаемого в двигателе топлива. По статистике для современных ракет величина коэффициента α составляет: 0,45 для РМД; 0,368 для РСД; 0,394 для РБД.

Вернемся теперь к формуле (15.1). Поскольку принятая концепция построения системы автоматизированного облика основана на рассмотрении ракеты заданной стартовой массы m_0 , разрешим формулу (15.1) относительно величины $\bar{m}_r$ (относительного запаса топлива):

$$\bar{m}_r = \bar{G}_r = \frac{1}{1 + \alpha} \left[1 - \left(\bar{m}_{пл} + \bar{m}_{пл} \right) \right]. \quad (15.6)$$

В табл. 15.5 приведены располагаемые значения $\bar{m}_r$, рассчитанные по (15.6). Там же приведены располагаемые значения энерговооруженности, вычисленные при значении удельного импульса $J_1 = 240$ с по зависимости $E = J_1 \bar{m}_r$, с.

Таблица 15.5

Параметры	Тип ракеты		
	РМД	РСД	РБД
$\overline{m}_r$	0,36	0,365	0,41
E	87	88	98,5

Перейдем теперь к определению геометрии компоновки. Начнем с определения калибра ракеты. Эта величина обычно варьируется в процессе параметрических расчетов. Первое приближение может быть определено на основе опыта разработки современных ракет.

$$d = 0,1 + 5,3 \cdot 10^{-4} m_0. \quad (15.7)$$

Отсюда имеем следующие значения калибра: 0,14 для РМД; 0,2 для РСД; 0,28 для РБД.

Теперь перейдем к компоновке корпуса. Корпус ракет нормальной схемы состоит из пяти отсеков, расположенных в следующей последовательности: 1 — ГСН; 2 — бортовая аппаратура; 3 — боевая часть; 4 — двигатель; 5 — рулевой отсек.

Поскольку массы всех отсеков на этом этапе известны, определим длины отсеков

$$l_i = \frac{m_i}{\gamma_i S_m}; \quad i = 1 \div 5.$$

Здесь S_m — площадь мишелевого сечения; γ_i — удельные плотности отсеков. Значения величин γ_i для современных ракет основных типов приведены в табл. 15.6. Отметим, что l_i соответствует длине цилиндрической части. Длина обтекателя $l_0 = \lambda_n d$. Полная длина ракеты определяется из выражения

$$L = \sum_{i=0}^5 l_i \leq L^*.$$

Здесь L^* — ограничение на длину ракеты, задаваемое в ТЗ. В табл. 15.6 приведены значения γ_i и относительных длин отсеков $\bar{l}_i$ (отнесены к калибру).

Таблица 15.6

Наименование отсека	Значения удельных плотностей и относительных длин отсеков в зависимости от типа ракеты					
	РМД		РСД		РБД	
	γ_i	$\bar{l}_i$	γ_i	$\bar{l}_i$	γ_i	$\bar{l}_i$
ГСН	0,8	2,74	1,3	2,7	1,1	1,6
Отсек бортовой аппаратуры	0,77	3,8	0,86	3,0	0,94	1,9
Боевая часть	1,53	1,9	2,6	1,3	1,35	1,2
Двигатель	1,85	9,2	2,0	8,0	1,92	6,4
Рулевой отсек	1,8	4,1	1,85	1,8	1,2	2,1
Ракета	1,43	22,0	1,55	18,6	1,42	15,0

Задача определения компоновки корпуса автоматизирована. С помощью этой же системы по массам отсеков и положениям их центров масс определяются начальная и конечная центровки ракеты в долях корпуса (см. табл. 15.7).

Таблица 15.7

Тип ракеты	РМД	РСД	РБД
Центровка:			
начальная	0,84	0,64	0,58
конечная	0,68	0,62	0,54

15.4. ДРУГИЕ ПОДСИСТЕМЫ, УЧАСТВУЮЩИЕ В ЦИКЛЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

15.4.1. Блок выбора параметров аэродинамической схемы

Задача определения параметров аэродинамической схемы в полной постановке заключается в определении размеров, формы и положения несущих и управляющих поверхностей и является многопараметрической. Однако на этапе формирования облика эта задача может быть усечена и сведена к выбору двух безразмерных параметров:

$$\bar{S}_k = \frac{S_k}{S_m}; \quad \bar{S}_p = \frac{S_p}{S_m}. \quad (15.8)$$

Здесь S_k , S_p , S_m — соответственно площади крыла, руля и миделя. Более подробные эти вопросы рассмотрены в разд. 2.

Выбор параметров $\bar{S}_k$ и $\bar{S}_p$ производится из следующих условий:

1) обеспечение заданной располагаемой перегрузки на режиме $H_{\max}$, $M=3$, которая должна быть не менее заданной $n^* = 3$;

2) обеспечение требуемого значения балансировочного угла атаки $\alpha = 20^\circ$ при $\delta_{\max} = 20^\circ$, в режиме $M = 3 \div 4$

Выбор настроечных параметров $\bar{S}_k$ и $\bar{S}_p$ может производиться с помощью подсистемы РАКУРС. Методика работы с системой включает этапы анализа: изолированного корпуса, комбинации «корпус — крыло», комбинации «корпус — руль» и комбинации «корпус — крыло — руль».

Опыт работы с системой показывает, что от пользователя не требуется какой-либо специальной квалификации в области аэродинамики, и что достаточно двух — трех сеансов для эффективного освоения системы.

После выбора настроечных параметров $\bar{S}_k$ и $\bar{S}_p$ производится уточненный расчет коэффициентов C_x , C_y и m_z .

15.4.2. Блок расчета баллистических характеристик

Задача расчета баллистических характеристик — зависимостей скорости и дальности полета от времени — решается подсистемой РАТРАН.

Основными параметрами ракеты, определяющими ее баллистические качества, являются:

— энерговооруженность ракеты E , определяемая в блоке 1,

— баллистический коэффициент $\sigma = \frac{C_{x0} S_m}{G_k}$, определяемый

по результатам работы блоков 1 и 2.

В качестве расчетных используются два типа траекторий — горизонтальные и навесные.

15.4.3. Блок расчета кинематики относительного движения ракеты

Задача расчета кинематики относительного движения ракеты решается с помощью подсистемы РАЗОН.

Исходными данными для ее решения являются баллистические характеристики — зависимости $v(t)$ и $S(t)$.

А. дальности пуска ракеты D_0 для предельных случаев: $q = 0$ — пуск на встречных курсах (ППС) и $q = 180$ — пуск на догонных курсах (ЗПС) связаны с дальностью полета S_k следующим кинематическим соотношением

$$D_0^{\pm} = S_k \pm S_n = S_k \pm v_n t_k. \quad (15.9)$$

Здесь знак плюс соответствует пуску на встречных курсах, минус — на догонных.

Б. Дальность отлета ракеты от носителя ΔS определяется соотношением

$$\Delta S = S_k - S_n = S_k - v_n t_k. \quad (15.10)$$

Входящие в (15.9) и (15.10) величины S_k и t_k определяются по конечной скорости, причем для ППС принимается $v_k = v_n$, для ЗПС — $v_k = v_n + 150$.

На этом этапе задача формирования облика может быть замкнута. Замыкание осуществляется на основе проверки логического неравенства:

$$D_{0\max}^P - \xi D_{0\max}^T \geq 0. \quad (15.11)$$

Здесь $D_{0\max}^P$ — максимальное значение располагаемой (так называемой баллистической) дальности пуска; $D_{0\max}^T$ — максимальное значение требуемой по ТТЗ дальности пуска; ξ — коэффициент запаса.

По опыту разработки ракет рассматриваемого класса требуемая по ТТЗ дальность пуска должна гарантироваться с полторным запасом, т.е. $\xi = 1,5$

15.4.4. Блок оценки точности наведения

Задача оценки точности наведения в существенной степени зависит от типа системы управления. Для СУ с БЦВМ эта задача решается методами статистического моделирования на подсистеме АСТОН.

Точность наведения принято оценивать величиной пролета, под которым понимают кратчайшее расстояние между ракетой и целью в момент пролета, если цель считать точкой. Рассеивание траекторий ракет относительно цели, изучается на картинной плоскости, перпендикулярной относительной скорости. Для координат точек (x, y) , характеризующих случайное отклонение траектории от расчетной, обычно принимается нормальный закон распределения

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y} e^{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - \bar{y})^2}{2\sigma_y^2}}, \quad (15.12)$$

где $\bar{x}, \bar{y}$ — координаты центра рассеяния случайных величин x, y относительно центра цели; σ_x, σ_y — среднеквадратические отклонения.

Однако более удобно эти случайные отклонения относительной траектории характеризовать не декартовыми координатами x, y , а полярными h, Θ , где h — модуль вектора пролета, Θ — его фаза. В простейшем случае, когда $\bar{x} = \bar{y} = 0$,

$\sigma_x = \sigma_y = 0$, модуль пролета подчиняется закону Релея, фаза — закону равномерной плотности. Плотность распределения модуля пролета имеет вид

$$g(h) = \frac{h}{\sigma^2} e^{-\frac{h^2}{2\sigma^2}}. \quad (15.13)$$

Значения математического ожидания $\bar{h}$ и среднего квадратического отклонения закона Релея есть $\bar{h} = 1,25\sigma$, $\sigma_h = 0,66\sigma$. Закон распределения модуля пролета получим, интегрируя (15.13):

$$F(r) = 1 - e^{-0,5r^2}; \quad r = \frac{h}{\sigma}. \quad (15.14)$$

Зависимость $F(r)$ приведена на рис. 15.2, а.

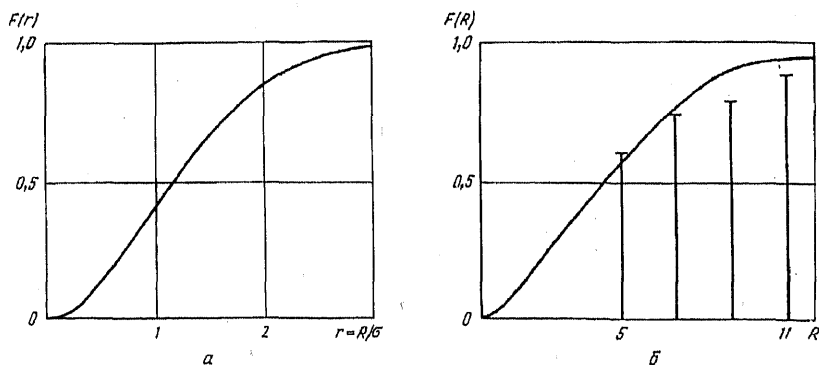


Рис. 15.2

Рассмотрим теперь подход, основанный на определении вероятностей попадания в круг заданного радиуса, которые определяются как частоты P_R .

В качестве контрольных значений радиуса круга обычно принимаются значения $R = 5, 7, 9$ и 11 м. Пусть по результатам моделирования получены значения вероятностей P_5, P_7, P_9, P_{11} .

Поставим задачу аппроксимации полученных при моделировании значений P_5, P_7, P_9, P_{11} законом (15.14).

В целях упрощения ограничимся учетом только двух первых вероятностей P_5 и P_7 . Полагая в (15.14) $F(r) = P_R$, получим после несложных преобразований выражение для среднеквадратического отклонения

$$\sigma(R) = \frac{0,7 R}{\sqrt{\ln \frac{1}{1 - P_R}}}. \quad (15.15)$$

Тогда эквивалентное значение среднеквадратического отклонения, полученное на основе учета вероятностей будет

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (\sigma^{(5)} + \sigma^{(7)}). \quad (15.16)$$

На рис. 15.2, б приведен пример, соответствующий значениям вероятностей $P_5 = 0,6$; $P_7 = 0,85$; $P_9 = 0,8$; $P_{11} = 0,9$. Определенное по (15.15) и (15.16) среднеквадратическое отклонение равно $\delta_a = 3,9$ м. Как видим из рис. 15.2, б, закон распределения Релея удовлетворительно согласуется с полученными при моделировании значениями P_5 , P_7 . Что касается значений P_9 и P_{11} , то имеющиеся здесь отклонения означают, что полученный моделированием закон распределения отличается от закона Релея. Отметим, что вместо закона Релея можно использовать закон Райса, соответствующий случаю $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $a = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \neq 0$. Однако вычисления при этом усложняются, так как требуют использования функций Бесселя.

Статистическое моделирование процесса наведения, проводимое на этапе отработки СУ и выбора ее параметров, обычно охватывает следующие типы поведения цели:

- прямолинейный полет с $n_y = 0$;
- маневр типа «отворот» с постоянными перегрузками $n_y = 2,5$; 4,0; 8 и 12, начинающийся за 3 — 5 с до встречи;
- маневр типа «бочка» с $n_y = 8$ с вращением вектора ускорения цели с $\omega = 1,57$ [1/с].

Анализ результатов моделирования показывает возможность достижения достаточно высокой точности.

Опыт моделирования показывает, что в зависимости от типа ракеты среднеквадратическое отклонение при наведении на цель F-15 может быть проведено по формуле

$$\sigma_3 = \sqrt{k_1 \bar{m}_0 - k_2 \bar{m}_0^2}. \quad (15.17)$$

Здесь $\bar{m}_0 = \frac{m_0}{350}$; $k_1 = 32,6$; $k_2 = 13,2$.

Полученные значения σ_3 и соответствующие значения вероятностей P_5 для различных типов ракет приведены в табл. 15.8.

Таблица 15.8

Тип ракеты	РМД	РСД	РВД
σ_3	2,0	3,7	4,4
P_5	0,95	0,57	0,48

15.4.5. Блок оценки эффективности ракеты

Критерием эффективности ракеты является вероятность поражения цели, определяемая характеристиками условного закона поражения цели и характеристиками рассеяния.

На стадии формирования облика удобно принять следующие выражения для условного закона поражения $P(h)$:

$$P(h) = e^{-\frac{h^2}{2R_0^2}}. \quad (15.18)$$

Здесь h — пролет; R_0 — параметр условного закона поражения цели — обобщенная характеристика боевого снаряжения ракеты, условий встречи ракеты с целью и уязвимости цели; численно R_0 равен пролету, при котором вероятность поражения цели составляет 0,6. Как указывалось выше, пролет h есть случайная величина, подчиненная закону Релея:

$$\varphi(h) = \frac{h}{\sigma^2} e^{-\frac{h^2}{2\sigma^2}}. \quad (15.19)$$

Вероятность поражения цели одной ракетой

$$W_1 = \int_0^{\infty} \varphi(h) P(h) dh = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma_a}{R_0} \right)^2}. \quad (15.20)$$

Параметр условного закона поражения R_0 при прочих равных условиях определяется плотностью осколочного поля, что позволяет использовать приближенную зависимость, связывающую R_0 с массой боевой части $m_{БЧ}$. Эта зависимость может быть представлена:

а) при наличии достаточно близкого прототипа ракеты

$$R_0 = R_0^* \sqrt{\frac{m_{БЧ}}{m_{БЧ}^*}}, \quad (15.21)$$

где R_0^* и $m_{БЧ}^*$ — параметр условного закона поражения и масса боевой части прототипа;

б) при отсутствии прототипа

$$R_0 = K_R \sqrt{m_{БЧ}}, \quad (15.22)$$

где K_R — коэффициент, обобщенно учитывающий тип боевой части, условия встречи ракеты с целью и уязвимость цели.

Усредненные значения коэффициентов K_R для типовых целей приводятся в табл. 15.9.

Таблица 15.9

Тип цели	F-15	F-14	B-1A	E-155	Ту-16М
K_R	1,22	1,6	2,2	2,64	3,0

Выражение (15.22) использовано в блоке 3 для определения массы боевой части при заданном значении $W_1^* = 0,7$ и цели типа F-15.

15.4.6. Блок оценки стоимости

Этап формирования облика ракеты завершается оценкой стоимости. Наиболее важными являются следующие два показателя стоимости:

1) стоимость выполнения опытно-конструкторской разработки ракеты $C_{окр}$;

2) стоимость одного образца ракеты в серийном производстве C_1 .

Стоимость (лимитная цена) выполнения опытно-конструкторской разработки включает:

- стоимость проектных работ (~ 20%);
- стоимость изготовления опытных образцов ракеты (70%),
- стоимость испытаний (10%).

В связи с отсутствием в настоящее время надежных методик и надежных исходных данных результатов, оценки являются приближенными (точность оценки не выше 20%).

Стоимость выполнения ОКР может быть определена на основе зависимости

$$C_{окр} = K_1 \sqrt[3]{m_o}. \quad (15.23)$$

Стоимость (планово-условная цена) изготовления одной ракеты зависит от года выпуска и величины годовой партии. При годовой партии в 1000 ракет на третьем году серийного производства стоимость одной ракеты может быть определена на основе зависимости

$$C_1 = k K_2 \sqrt[4]{m_o}. \quad (15.24)$$

Здесь коэффициент k учитывает повышение стоимости ракет с новым типом СУ, использующим БЦВМ. Для РСД и РВД коэффициент $k = 1,25$; для РМД $k = 1$.

Коэффициенты K_1 и K_2 берутся на основе данных по предшествующим образцам.

Отметим, что полученная на основе (15.24) стоимость серийной ракеты ~ в четыре раза меньше стоимости опытного образца.

По результатам работы системы получаем компоновочную схему ракеты и ее тактико-технические характеристики.

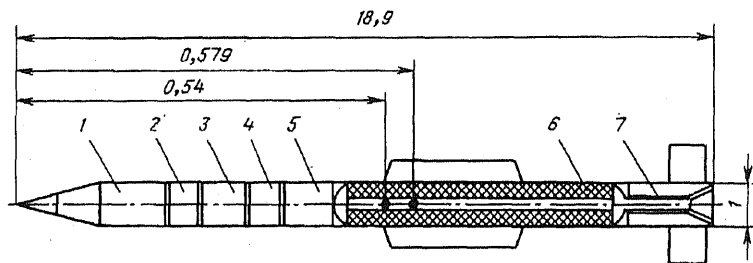


Рис. 15.3

На рис. 15.3 в качестве примера приведена компоновочная схема ракеты рассматриваемого типа (цифрами на рис. 15.3 обозначены: 1 — ГСН; 2 — РВ; 3 — АП; 4 — БИП; 5 — Б4; 6 — ДВ; 7 — ПР). Отметим, что длина ракеты дана в долях калибра ракеты, а положения центра тяжести в долях длины корпуса.

ЛИТЕРАТУРА К ПЕРВОМУ РАЗДЕЛУ

1. Руднев В.Е. Основы авиационного вооружения и боевой эффективности. — М.: МАИ, 1971.
2. Руднев В.Е. Элементы системного анализа и формирование объектов. — М.: МАИ, 1979.
3. Вентцель Е.С. Введение в исследование операций. — М.: Сов. радио, 1964.
4. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971.
5. Калабухова Е.П. Основы теории эффективности воздушной стрельбы и бомбометания. — М.: Машиностроение, 1991.
6. Рейдель А.Л., Соколовский Г.А. Лётно-тактические характеристики ракет класса «воздух — воздух» и их связь с эффективностью авиационного боевого комплекса. — М.: Изд-во МАИ, 1993.
7. Рейдель А.Л., Соколовский Г.А. Аэробаллистические характеристики управляемых ракет класса «воздух — воздух». — М.: Изд-во МАИ, 1995.
8. Рейдель А.Л., Пригожников А.Б. Построение математической модели сил и моментов осесимметричной ракеты. — М.: Известия РАН. Теория и системы управления. 1996. № 1.
9. Орлов Б.В., Мазинг Г.Ю., Рейдель А.Л., Топчиев Ю.И., Степанов В.Н. Основы проектирования ракетно-прямоточных двигателей для беспилотных летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1967.
10. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1973.
11. Нильсен Дж. Аэродинамика управляемых снарядов. — М.: Оборонгиз, 1962.
12. Решетчатые крылья // Под ред. С.М. Белоцерковского. — М.: Машиностроение, 1985.
13. Миеле А. Механика полета. — М.: Наука, 1965.

14. Миселе А. Обобщенная теория оптимального программирования тяги при горизонтальном полете самолета с ракетным двигателем. Исследование оптимальных режимов полета ракет. — М.: Машиностроение, 1972.

15. Дмитриевский А.Л. Внешняя баллистика. — М.: Машиностроение, 1972.

16. Соколовский Г.А. Основы методологии разработки и испытаний ракет класса «воздух — воздух». — М.: Изд-во МАИ, 1992.

17. Проектирование систем наведения/Батков А.Н., Горский А.А., Левитин В.Ф. и др. — М.: Машиностроение, 1975.

18. Кузьминский Р.Д. Управляемое ракетное оружие авиации. Конспект лекций. Ч.І. — М.: Машиностроение, 1982.

19. Петров Б.И., Полковников В.А., Рабинович Л.В. и др. Динамика следящего привода. — М.: Мир, 1972.

20. Брайсон А., Хо Ю-ШИ. Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972.

21. Пиявский С.А., Брусов В.С., Хвилон Е.А. Оптимизация параметров многоцелевых летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1974.

22. Рейдель А.Л., Пригоникер А.Б. Основы учета систем управления при проектировании облика автоматических систем. — М.: Отраслевая библиотека МАП. Технический прогресс и повышение квалификации. 1989.

23. Васильев П.П., Пригоникер А.Б., Рейдель А.Л., Розенберг Л.А. Устойчивость балансировочных режимов ракеты с крестокрылым крылом в пространственном движении. — М.: ТВФ. 1970. №7.

24. Святодух В.К. Динамика пространственного движения управляемых ракет. — М.: Машиностроение, 1960.

25. Основы автоматического регулирования. Под ред. В.В. Солодовникова. — М.: Машгиз, 1954.

26. Справочник по теории автоматического управления. Под ред. А.А. Красовского. — М.: Наука, 1987.

27. Рейдель А.Л., Пригоникер А.Б. Методика исследования устойчивости балансировочных режимов управляемых осесимметричных ракет в пространственном движении.// Известия РАН. Теория и системы управления. — М., 1966. № 1.

28. Рейдель А.Л., Пригонжер А.Б. Анализ пространственной устойчивости балансировочных режимов в составе контура стабилизации. Теория и системы управления. — М., 1966. № 6.

29. Радиоуправление реактивными снарядами и космическими аппаратами. Под редакцией Л.С. Гуткина. — М.: Сов.радио, 1969.

30. Е.И. Кринецкий. Системы самонаведения. — М., 1970.

31. Рейдель А.Л., Правидло М.Н., Фетисов В.К. Сборник тезисов докладов Всероссийской конференции «Проблемы совершенствования робототехнических и интеллектуальных систем летательных аппаратов». — М.: Изд-во МАИ, 1996.

32. Крутько П.Д. Новые структуры алгоритмов демпфирования короткопериодических колебаний самолета. — М.: Известия РАН. Техническая кибернетика. № 4. 1994.

33. Крутько П.Д. Оптимизация управляемых систем по локальным функционалам, характеризующим энергию движения. М., Доклад АН СССР. Т. 320. № 3. 1991.

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ. СТРУКТУРА, КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ АВИАЦИОННЫХ КАТАПУЛЬТНЫХ УСТАНОВОК

Глава 16. СТРУКТУРА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ АВИАЦИОННЫХ КАТАПУЛЬТНЫХ УСТАНОВОК

§ 16.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ

Механизмом называется система подвижно связанных между собой путем соприкосновения твердых тел, которая предназначена для получения требуемых движений одного или нескольких из этих тел.

Твердое тело, входящее в состав механизма, называется звеном. Звено механизма нередко состоит из нескольких деталей, жестко связанных между собой. Механизм состоит не менее чем из двух звеньев.

Соединение двух соприкасающихся звеньев механизма, допускающее их относительное движение, называется *кинематической парой*.

Как правило, одно из звеньев механизма является неподвижным или принимается за неподвижное. такое звено называется *стойкой*. Все другие звенья механизма являются подвижными.

Среди звеньев механизма имеется, по крайней мере, два смежных звена, закон относительного движения которых считается известным. Кинематическую пару, которую образуют между собой два указанных звена, будем называть *входной парой*. Возможны два случая: 1) одно из двух звеньев является стойкой; 2) оба звена — подвижные.

Большинство применяемых в технике механизмов отвечает первому случаю. В таких механизмах подвижное звено, образующее входную пару со стойкой, называется *входным звеном*. Входному звену сообщается движение (относительно стойки), преобразуемое механизмом в требуемые движения других звеньев. В четырехзвенном механизме рис. 16.1, а) входную пару образуют стойка 0 и входное звено 1 (здесь и далее на рисунках входное звено отмечено стрелкой, показывающей направление его движения).

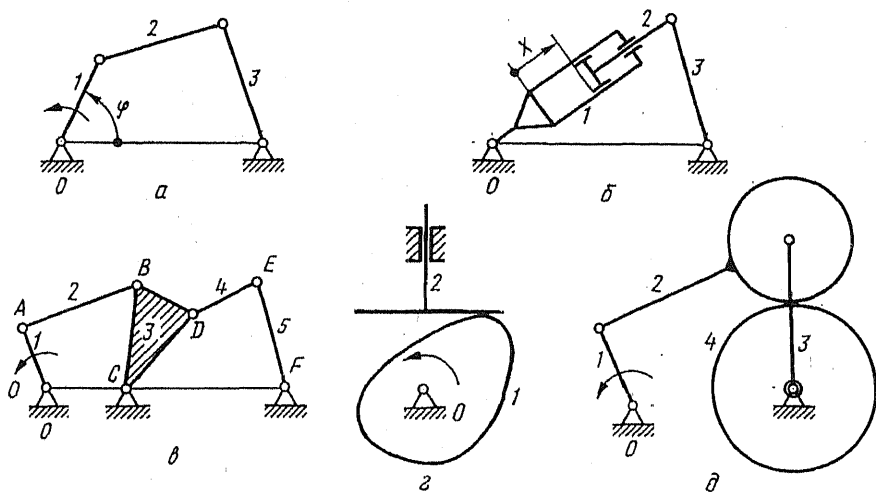


Рис. 16.1

Однако достаточно часто встречаются и механизмы, отвечающие второму случаю. Пример такого механизма приведен на рис. 16.1,б (этот четырехзвенный механизм называют механизмом с качающимся цилиндром). Такие механизмы применяются в грузоподъемных, землеройных и других машинах, а также в манипуляторах. Широкое распространение они получили в АКУ (см. § 16.6). В механизмах, отвечающих второму случаю, не представляется возможным конкретно указать входное звено среди двух звеньев, образующих входную кинематическую пару.

Среди подвижных звеньев механизма выделяют также *выходное звено*. Выходным называется звено, совершающее дви-

жение, для выполнения которого предназначен механизм. В механизме могут быть несколько входных и несколько выходных звеньев, но чаще всего механизм имеет одно входное и одно выходное звено.

Система звеньев, связанных между собой кинематическими парами, называется кинематической цепью. В состав любого механизма входит *кинематическая цепь*. Однако не следует отождествлять понятия «кинематическая цепь» и «механизм». Механизм отличается от кинематической цепи, в частности, тем, что в механизме указываются стойка и входное звено (точнее — входная пара), а для звеньев и кинематических пар кинематической цепи не устанавливаются такие отличительные признаки, как «стойка», «входная пара», «входное звено», «выходное звено».

Механизм можно изобразить техническим чертежом, полуконструктивной схемой, кинематической схемой или структурной схемой.

Структурная схема механизма — это схема механизма, указывающая стойку, входные кинематические пары (или входные звенья), другие подвижные звенья, виды кинематических пар. Они будут рассмотрены в п. 16.2.1. Структурная схема механизма выполняется с учетом определенных условий обозначений, принятых при графическом изображении звеньев и кинематических пар различных видов. Структурная схема механизма используется на этапе его *структурного анализа* и изображается без учета геометрических размеров его звеньев. Между тем такие геометрические свойства механизма, как взаимная параллельность или перпендикулярность осей отдельных кинематических пар и некоторые другие, обычно учитываются в структурной схеме.

Кинематическая схема используется на этапе кинематического анализа механизма (см. гл. 17). Кинематическая схема, в отличие от структурной схемы, изображается с учетом геометрических размеров звеньев, но не всех размеров, а только тех их них, которые используются при кинематическом анализе механизма. Такие размеры будем называть *параметрами кинематической схемы* механизма.

При рассмотрении вопросов структуры и кинематики механизмов обычно принимают следующие допущения:

- 1) звенья механизма являются абсолютно твердыми телами,

- 2) отсутствуют погрешности изготовления звеньев,
- 3) отсутствуют зазоры в подвижных соединениях звеньев.

На рис. 16.1 показаны примеры структурных схем ряда механизмов. На рисунке приняты обозначения: O — стойка; 1, 2, 3, 4, 5 — подвижные звенья; 1 — входное звено (рис. 16.1, а, в—д); φ — угловая координата входного звена 1 (рис. 16.1, а); X — линейная координата, устанавливающая относительное перемещение во входной паре, образуемой звеньями 1 и 2 (рис. 16.1, б).

§ 16.2. КЛАССИФИКАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР, КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И МЕХАНИЗМОВ

16.2.1. Классификация кинематических пар

Совокупность поверхностей, линий и отдельных точек звена, по которым оно может соприкасаться с другим звеном, образуя кинематическую пару, называется *элементом кинематической пары*.

Кинематические пары делятся на низшие и высшие. *Низшей* называется кинематическая пара, в которой относительное движение двух звеньев может быть получено постоянным соприкосновением ее элементов по поверхности. *Высшей* называется кинематическая пара, в которой относительное движение двух звеньев может быть получено соприкосновением ее элементов только по линиям или в точках.

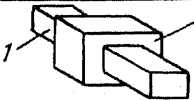
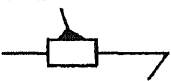
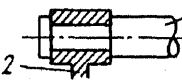
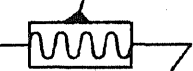
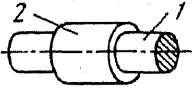
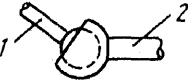
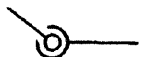
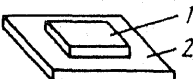
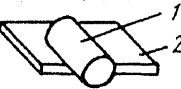
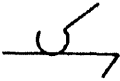
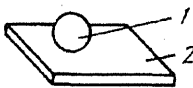
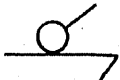
Введем обозначения: W_r — число степеней свободы в относительном движении двух звеньев, образующих кинематическую пару; s_r — число уравнений связей, налагаемых на относительное движение указанных звеньев (связи в данном случае предполагаются геометрическими, стационарными и двухсторонними). Всегда выполняется равенство $W_r + s_r = 6$.

Число s_r уравнений связей принимается за номер *класса* кинематической пары, а в зависимости от числа W_r пары подразделяются на *одно-, двух-, трех-, четырех- и пятиподвижные*. Так, если $W_r = 1$ и соответственно $s_r = 5$, то данная пара является *одноподвижной* и относится к пятому классу.

В зависимости от характера относительного движения двух звеньев, образующих пару, кинематические пары могут быть

различного вида. В табл. 16.1 приведены девять видов кинематических пар вместе с соответствующими значениями W_r и s_r , а также условными графическими изображениями пар. Пары вида «цилиндр-плоскость» и «шар-плоскость» относятся к высшим, а пары семи предыдущих видов — к низшим. Вращательную пару называют шарниром.

Таблица 16.1

W_r	s_r	Название пары	Рисунок	Условное изображение
1	5	Поступательная		
1	5	Вращательная		
1	5	Винтовая		
2	4	Цилиндрическая		
2	4	Сферическая с пальцем		
3	3	Сферическая		
3	3	Плоскостная		
4	2	Цилиндр-плоскость		
5	1	Шар-плоскость		

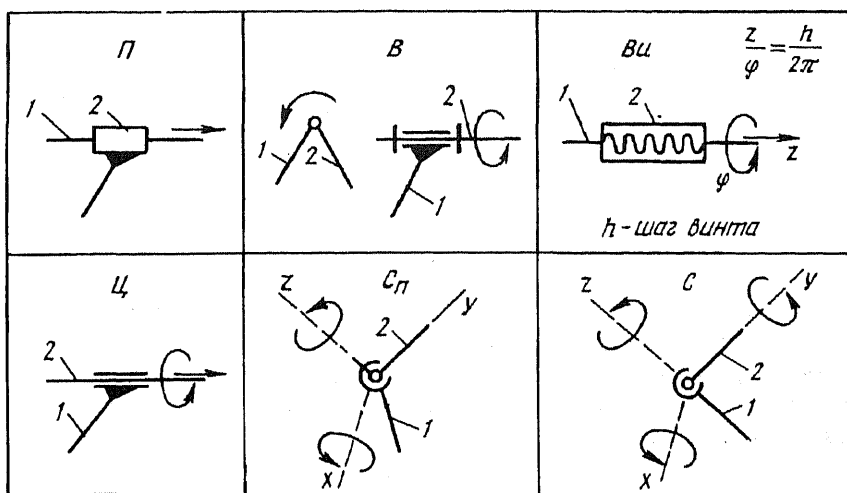


Рис. 16.2

Для пар первых шести видов введем буквенные обозначения П, В, Вш, Ц, Ц_п и С соответственно. Относительные движения звеньев 1 и 2, образующих эти пары, показаны стрелками на рис. 16.2.

16.2.2. Классификация кинематических цепей

Кинематические цепи подразделяются на *плоские* и *пространственные*. Кинематическая цепь будет плоской, если при закреплении одного из ее звеньев точки всех других звеньев могут двигаться во взаимно параллельных плоскостях. Если это условие не соблюдается, то кинематическая цепь является пространственной.

Кинематические цепи делятся также на *замкнутые* и *незамкнутые*. В замкнутой цепи каждое звено входит, по крайней мере, в две кинематические пары, т.е. звенья такой цепи образуют один или несколько изменяемых замкнутых контуров. В незамкнутой цепи имеется хотя бы одно звено, входящее лишь в одну кинематическую пару. На рис. 16.3 показаны примеры плоских кинематических цепей, звенья которых связаны вращательными парами.

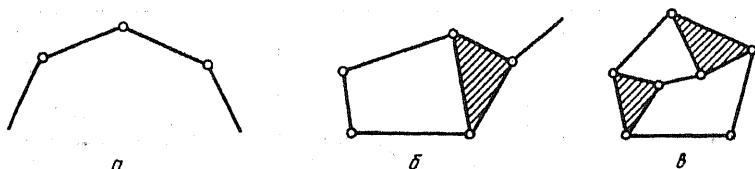


Рис. 16.3

По числу p кинематических пар, образуемых данным звеном с другими звеньями кинематической цепи, данное звено будем называть p -парным ($p = 1, 2, 3$ и т.д.). Так, в составе кинематической цепи, показанной на рис. 16.3, б, имеются одно-, двух- и трехпарные звенья.

16.2.3. Классификация механизмов

По виду траекторий точек звеньев механизмы можно разделить на *объемные* и *поверхностные*. К поверхностным относятся: *плоские, сферические и цилиндрические механизмы*.

Траектории точек звеньев поверхностного механизма располагаются или во взаимно параллельных плоскостях (в случае плоского механизма) или на поверхностях концентрических сфер (в случае сферического механизма), или на поверхностях коаксиальных цилиндров (в случае цилиндрического механизма).

При ином виде траекторий различных точек звеньев механизма последний называют *объемным*. В литературе по теории механизмов используется также термин *пространственные механизмы*, объединяющий все механизмы, за исключением плоских. На практике чаще встречаются плоские механизмы.

Из определения плоского механизма следует, что его звенья могут образовывать друг с другом одно- и двухподвижные пары. При этом одноподвижные пары являются низшими, а двухподвижные — высшими. В качестве одноподвижных пар в плоском механизме обычно используют вращательную (В) или поступательную (П) пару, а в качестве двухподвижных — любую из двух высших пар, указанных в табл. 16.1, которые в данном случае вырождаются в пару «круг — прямая». В плоском механизме оси всех вращательных пар должны быть взаимно па-

параллельны, а оси направляющих поступательных пар — перпендикулярны осям вращательных пар.

Заметим, что в плоском механизме вместо некоторой части вращательных пар могут использоваться сферические или цилиндрические пары с осями, параллельными осям вращательных пар, а вместо некоторой части поступательных пар могут использоваться цилиндрические пары с осями, перпендикулярными осям вращательных пар. Важно при этом подчеркнуть, что все указанные пары функционируют как одноподвижные, т.е. фактически реализуется одна из двух или трех степеней свободы, присущих цилиндрическим или сферическим парам. Поэтому для удобства рассмотрения можно считать, что в плоском механизме все низшие пары являются вращательными или поступательными.

Продолжая классификацию механизмов, отметим, что различают механизмы с *замкнутыми* и *незамкнутыми* кинематическими цепями.

По числу изменяемых замкнутых контуров в структурной схеме механизмы делятся на *одноконтурные* и *многоконтурные*. В многоконтурном механизме число контуров два или более. *Контуром* называется замкнутая кинематическая цепь, состоящая из всех или некоторой части звеньев механизма и обладающая следующими свойствами:

- 1) каждое из звеньев этой цепи образует кинематические пары с двумя другими ее звеньями;
- 2) контур не должен получаться путем объединения двух других контуров, обладающих свойством 1.

Механизмы, показанные на рис. 16.1, *а*, *б*, *г*, являются одноконтурными, а на рис. 16.1, *в*, *д*, — двухконтурными. Например, у механизма на рис. 16.1, *в* такие контуры: *OABCO* — первый, *CDEFC* — второй.

Существуют механизмы с низшими парами и механизмы с высшими парами. К последним относятся все те механизмы, у которых хотя бы одна из кинематических пар является высшей.

Механизмы, звенья которых образуют низшие кинематические пары вида *II*, *B*, *Ви*, *Ц*, *C_п* и *C* (см. табл. 16.1), называют *рычажными*. Рычажный механизм, звенья которого образуют только вращательные пары, называется *шарнирным*. В плоском рычажном механизме звенья образуют только одноподвижные пары вида *B* или *II*.

В технике наиболее распространены четырехзвенные плоские рычажные механизмы — шарнирный четырехзвенник (рис. 16.1, а), кривошипно-ползунный механизм (рис. 16.4, а) и кулисный механизм (рис. 16.4, б). Кроме того, к четырехзвенным относится еще восемь видов плоских рычажных механизмов, различающихся числом и порядком расположения вращательных и поступательных пар (однако число поступательных пар не должно превышать двух).

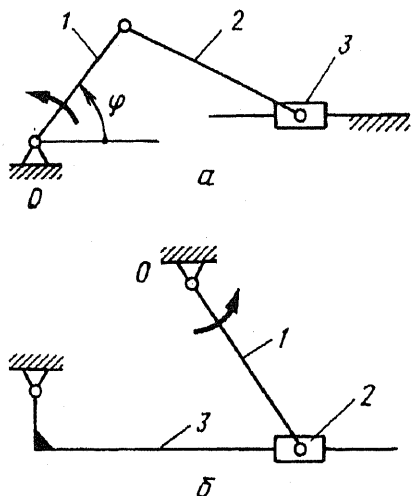


Рис. 16.4

К механизмам с высшими парами относятся кулачковые механизмы и зубчатые механизмы. Находят применение также комбинированные механизмы, например, зубчато-рычажный механизм (см. рис. 16.1, б). В машинах применяют и другие виды механизмов — фрикционные, механизмы с гибкими связями (ременная передача, цепная передача), волновые зубчатые передачи

— механизмы с гибкими звеньями, дающие возможность передавать движение через герметичную стенку, гидравлические и пневматические механизмы и т.д.

В АКУ применяются преимущественно плоские рычажные механизмы, которые и рассматриваются далее.

16.2.4. Виды звеньев

За звеньями рычажных механизмов в зависимости от характера их движения закрепились определенные названия, а именно: кривошип, коромысло, ползун, кулиса.

Кривошипом называется звено, которое образует вращательную пару со стойкой и может совершать полный оборот вокруг оси этой пары. *Коромыслом* называется звено, которое образует вращательную пару со стойкой и может совершать только не-

полный оборот вокруг оси этой пары. С подвижным звеном кривошип и коромысло образуют, как правило, вращательную или сферическую пару. *Ползун* — это звено, образующее поступательную пару со стойкой и движущееся прямолинейно-поступательно. Шатуном называется звено, образующее кинематические пары только с подвижными звеньями. *Кулиса* — это звено, вращающееся вокруг неподвижной оси и образующее с другим — подвижным звеном поступательную пару.

В механизмах, изображенных на рис. 16.1, *а* и 16.4, *а*, *б*, звено 1 является кривошипом или коромыслом, звено 2 — шатуном, звено 3 — кривошипом или коромыслом (на рис. 16.1, *а*), ползуном (на рис. 16.4, *а*) или кулисой (на рис. 16.4, *б*).

Существует три разновидности шарнирного четырехзвенника (см. рис. 16.1, *а*): 1) *кривошипно-коромысловый* механизм (входное звено 1 — кривошип, звено 3 — коромысло), 2) *двухкривошипный* механизм (звенья 1 и 3 — кривошипы), 3) *двухкоромысловый* механизм (звенья 1 и 3 — коромысла).

16.2.5. Два типа рычажных механизмов

Как отмечалось в § 16.1, если одно из двух звеньев, образующих входную пару, есть стойка, то оно называется *входным звеном*. Допустим, что механизм имеет две входных пары, одна из которых образуется входным звеном и стойкой, а вторая — указанным входным звеном и другим подвижным звеном. В этом случае последнее тоже будем называть *входным звеном*. Сказанное относится и к механизмам с числом входных звеньев более двух. На рис. 16.5, *а* приведен шестизвенный плоский шарнирный механизм с тремя входными парами — P_{01} , P_{12} и P_{05} . Звенья 1, 2 и 5 этого механизма являются входными; их положение задается углами φ_{01} , φ_{12} и φ_{05} .

В зависимости от расположения входных пар рычажные механизмы разделим на два типа. В механизмах *первого типа* любую из входных пар образуют друг с другом стойка и входное звено или два входных звена. К механизмам первого типа относятся рычажные механизмы, показанные на рис. 16.1, *а*, *в*, 16.4 и 16.5, *а*.

В механизмах *второго типа* имеется хотя бы одна входная пара, образованная двумя подвижными звеньями, ни одно из

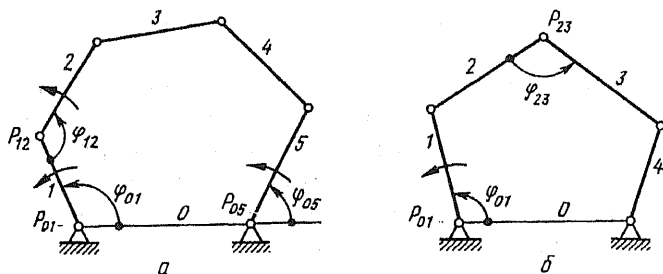


Рис. 16.5

которых не является входным. Примеры механизмов второго типа приведены на рис. 16.1, б и 16.5, б. В пятизвенном плоском шарнирном механизме, показанном на рис. 16.5, б, входными парами являются шарниры P_{01} и P_{23} (углы φ_{01} и φ_{23} считаются заданными переменными параметрами). В этом механизме имеется только одно входное звено — звено 1. Что касается звеньев 2 и 3, образующих входную пару P_{23} , то в соответствии с введенной выше терминологией они не являются входными звеньями.

§ 16.3. ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ МЕХАНИЗМА. МЕХАНИЗМЫ С ИЗБЫТОЧНЫМИ СВЯЗЯМИ

16.3.1. Число степеней свободы механизма

В теоретической механике обобщенными координатами механической системы называют независимые между собой параметры, однозначно определяющие положение системы. Так как механизм — это система связанных друг с другом твердых тел (звеньев), одно из которых является неподвижным (стойкой), то понятие «обобщенные координаты» может быть распространено и на механизм. *Обобщенными координатами механизма* называются независимые между собой параметры (линейные или угловые), однозначно определяющие положение всех звеньев механизма относительно стойки.

Число обобщенных координат называется *числом степеней свободы*, или *подвижностью* механизма. Подвижность механизма не может быть меньше 1.

Большинство механизмов, применяемых в технике, имеют одну обобщенную координату и соответственно одну степень свободы. Но встречаются и механизмы с двумя степенями свободы и более.

В качестве обобщенных координат механизма обычно принимают относительные перемещения звеньев, образующих входные пары. Например, в шарнирном четырехзвеннике (см. рис. 16.1, а) в качестве обобщенной координаты принимается угловая координата φ входного звена, а в механизме с качающимся цилиндром (см. рис. 16.2, б) за обобщенную координату принимается линейный параметр X .

Подвижность механизма обычно определяется при учете тех же допущений, которые принимаются при рассмотрении вопросов структуры и кинематики механизмов (см. § 16.1). В большинстве случаев подвижность может быть определена на базе структурной схемы механизма при помощи универсальных структурных формул. Однако существуют механизмы, подвижность которых может быть найдена правильно только на основе их кинематической схемы (это — так называемые механизмы с избыточными связями, рассматриваемые в п. 16.3.3).

16.3.2. Универсальные структурные формулы

Число W степеней свободы (подвижность) механизма определяется в общем случае по формуле

$$W = 6(n - 1) - s, \quad (16.1)$$

где n — число звеньев механизма (включая стойку); s — общее число связей, накладываемых кинематическими парами механизма на относительное движение его звеньев.

При выводе формулы (16.1) принято во внимание, что каждое из $n - 1$ подвижных звеньев, рассматриваемое как свободное твердое тело, имеет шесть степеней свободы.

Число s связей определяется числом и классом кинематических пар и находится по формуле

$$s = 5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5, \quad (16.2)$$

где p_1, p_2, p_3, p_4 и p_5 — число одно-, двух-, трех-, четырех- и пятиподвижных пар.

После подстановки (16.2) в (16.1) получаем структурную формулу

$$W = 6(n - 1) - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5, \quad (16.3)$$

которая называется *формулой Сомова-Малышева*.

Для рычажных механизмов формула (16.3) упрощается к виду

$$W = 6(n - 1) - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3, \quad (16.4)$$

так как для них $p_4 = p_5 = 0$.

Структурные формулы (16.3) и (16.4) применяют для пространственных механизмов. Но их можно применять и для плоских, и для сферических механизмов, если последние рассматривать как трехмерные объекты. Между тем обычно плоские и сферические механизмы рассматривают в двумерном пространстве, поскольку можно считать, что все звенья плоского механизма — это плоские фигуры, движущиеся в одной и той же неподвижной плоскости, а все звенья сферического механизма — это сферические фигуры, движущиеся по неподвижной сферической поверхности. При таком способе рассмотрения плоских и сферических механизмов структурные формулы для них видоизменяются по сравнению с формулами (16.3) и (16.4) к следующему виду:

1) для плоских механизмов ($p_3 = p_4 = p_5 = 0$)

$$W = 3(n - 1) - 2p_1 - p_2, \quad (16.5)$$

2) для плоских рычажных и сферических механизмов ($p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0$)

$$W = 3(n - 1) - 2p_1. \quad (16.6)$$

Формула (16.5) называется *формулой Чебышева*.

В формулах (16.5) и (16.6) p_1 есть число одноподвижных (низших) пар, а p_2 — число двухподвижных (высших) пар.

При выводе формул (16.5) и (16.6) принято во внимание, что каждое из $n - 1$ подвижных звеньев, рассматриваемое как свободное в двумерном пространстве, имеет три степени свобо-

ды, а одно- и двухподвижная пары накладывают соответственно две и одну связи.

Входные пары чаще всего являются одноподвижными. В этом случае число входных пар, как правило, совпадает с подвижностью W механизма.

Приведенные выше формулы (16.1) и (16.3) — (16.6) называют *универсальными структурными формулами механизмов*. Они получены из рассмотрения только структурной схемы механизма, т.е. без привлечения кинематической схемы.

Имеем для механизмов, показанных

на рис. 16.1, а, б и 16.4, а, б $n = 4$, $p_1 = 4$, $W = 1$;

для механизма на рис. 16.1, в $n = 6$, $p_1 = 7$, $W = 1$;

для механизма на рис. 16.1, г $n = 3$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $W = 1$;

для механизма на рис. 16.1, д $n = 5$, $p_1 = 5$, $p_2 = 1$, $W = 1$;

для механизма на рис. 16.5, а $n = 6$, $p_1 = 6$, $W = 3$;

для механизма на рис. 16.5, б $n = 5$, $p_1 = 5$, $W = 2$.

16.3.3. Механизмы с избыточными связями

Геометрические связи, наложенные на относительные движения звеньев механизма, выражаются соответствующими уравнениями. Универсальные структурные формулы выведены в предположении, что все эти уравнения взаимно независимы. Данное условие выполняется для большинства механизмов. Однако встречаются механизмы, для которых это условие не выполняется. Такой особенностью обладают *механизмы с избыточными связями*. Для них подвижность, найденная по универсальным структурным формулам, оказывается ниже фактической подвижности.

Избыточными связями в механизме называют такие связи, которые повторяют (дублируют) ограничения, наложенные другими связями. При наличии избыточных связей некоторые из уравнений связей получаются как следствие других взаимно независимых уравнений.

Рассмотрим здесь избыточные связи двух типов: 1) такие, которые можно обнаружить при анализе структурной схемы механизма; 2) такие, которые не проявляются на уровне струк-

турной схемы, но могут быть выявлены при исследовании кинематической схемы механизма.

Избыточные связи *первого типа* имеются у таких плоских и сферических механизмов, для которых получаются разные значения подвижности W при подсчете ее по формулам (16.3) и (16.5). В качестве примера рассмотрим шарнирный четырехзвенник (см. рис. 16.1, а), для которого $n = 4$, $p_1 = 4$, $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0$. По формуле (16.3) получаем $W = W_1 = 6(4 - 1) - 5 \cdot 4 = -2$; по формуле (16.5) находим $W = W_2 = 3(4 - 1) - 2 \cdot 4 = 1$.

Отсюда видно, что если рассматривать шарнирный четырехзвенник в трехмерном пространстве, то с точки зрения структуры он является не механизмом, а дважды статически неопределимой фермой. Этот результат объясняется тем, что при выводе формулы (16.3) не учтено специфическое свойство шарнирного четырехзвенника: взаимная параллельность осей четырех вращательных пар. Если при изготовлении параллельность осей будет нарушена, то при отсутствии зазоров шарнирный четырехзвенник действительно окажется упомянутой фермой.

Что касается структурной формулы (16.5), то она составлена с учетом указанного свойства механизма. Таким образом, в рамках допущений, принятых на уровне структурной и кинематической схем механизма (см. § 16.1) шарнирный четырехзвенник является механизмом с подвижностью $W = W_2 = 1$.

При низкой точности изготовления звеньев с целью исключения заклинивания плоского механизма иногда заменяют часть пар пятого класса на пары меньшего класса, например, на сферические или цилиндрические, что приводит к устранению или уменьшению числа избыточных связей первого типа. Между тем такая замена не всегда оправдана, так как пары пятого класса, особенно вращательные, наиболее просты в изготовлении, технологичны и надежны в работе. Поэтому в данном случае чаще идут на сохранение избыточных связей первого типа при одновременном уменьшении их возможного негативного влияния за счет правильного конструирования механизма, а также большей точности его изготовления и сборки.

Когда говорят о механизмах с избыточными связями, то обычно имеют в виду избыточные связи *второго типа*. Они встречаются как у плоских, так и у пространственных механизмов. Формальным признаком их существования в механизме является несовпадение фактической подвижности механизма со значением W , найденным по формуле (16.3) для пространственных механизмов или по формуле (16.5) для плоских механизмов. Указанное несовпадение может иметь место только при особых соотношениях между постоянными параметрами кинематической схемы механизма. Для иллюстрации сказанного приведем пример.

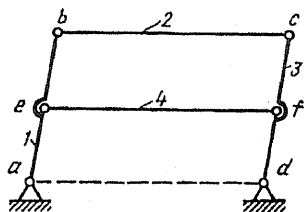


Рис. 16.6

На рис. 16.6 показан пятизвенный плоский шарнирный механизм двойного параллелограмма, в котором выполняются такие соотношения между геометрическими параметрами: $AB = CD$, $BE = CF$, $AD = BC = EF$. В этом механизме $n = 5$, $p_1 = 6$, $p_2 = 0$. При подсчете подвижности по формуле (16.5) получаем $W = 0$, что соответствует статически определимой ферме, а не механизму. Фактически же благодаря упомянутым выше соотношениям подвижность W данного механизма равна 1, т.е. механизм имеет одну избыточную связь второго типа. Ее можно устранить, заменив, например, шарнир F на двухподвижную (высшую) пару; тогда по формуле (16.5) получаем: $W = 3(5 - 1) - 2 \cdot 5 - 1 = 1$.

Примером пространственного рычажного механизма с избыточными связями может служить механизм структуры ВВВВ (механизм Беннета), имеющий четыре вращательных пары. Подсчет W по формуле (16.3) дает: $W = 6(4 - 1) - 5 \cdot 4 - 1 = -2$, что соответствует дважды статически неопределимой ферме. Между тем, механизм Беннета является одноподвижным. Отсюда следует, что в нем имеется три избыточных связи второго типа. Механизм Беннета обладает подвижностью вследствие особых соотношений между постоянными параметрами его кинематической схемы.

Избыточные связи в механизме Беннета можно устранить, заменив три последних вращательных пары на цилиндрические

(Ц) пары, в результате чего будет получен механизм структуры ВЦЦЦ частного вида. В механизме ВЦЦЦ общего вида в каждой из пар Ц имеются две степени свободы — вращение вокруг оси пары и прямолинейное поступательное движение вдоль этой оси. В упомянутом выше механизме ВЦЦЦ частного вида перемещения вдоль осей трех пар Ц равны нулю, т.е. по существу пары Ц в данном случае работают как пары В, что и позволяет получить механизм Беннета.

Кроме механизма Беннета к настоящему времени обнаружено еще несколько одноконтурных пространственных рычажных механизмов с избыточными связями. Среди них особый интерес представляют пяти- и шестизвенные механизмы с одними вращательными парами, т.е. механизмы структуры 5В и 6В. Задача поиска механизмов с избыточными связями является достаточно сложной. При обнаружении, например, механизмов 5В и 6В приходится отыскивать такие соотношения между постоянными параметрами механизмов 3В2Ц и 5В1Ц без избыточных связей, при которых в парах вида Ц будет отсутствовать поступательное движение вдоль их осей, т.е. они будут работать как пары вида В.

Число q избыточных связей второго типа и подвижность W механизма связаны соотношением

$$W = \mu(n - 1) - s + q, \quad (16.7)$$

где $\mu = 6$ для пространственных механизмов и $\mu = 3$ для плоских и сферических механизмов.

Соотношение (16.7) можно использовать для определения подвижности W , если предварительно найдено число q избыточных связей (число зависимых уравнений связей). Однако чаще соотношение (16.7) используют для подсчета q . При этом подвижность W устанавливается из рассмотрения кинематической схемы механизма: в более простых случаях на основе геометрических соображений без каких-либо аналитических выкладок (например, для механизма, показанного на рис. 16.6), в более сложных случаях — путем исследования функций положения звеньев (например, для механизма Беннета).

§ 16.4. ПРИНЦИП АССУРА СТРУКТУРНОГО СТРОЕНИЯ И ОБРАЗОВАНИЯ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

16.4.1. Принцип Ассура

Л.В. Ассур, изучавший строение одноподвижных плоских шарнирных механизмов, в 1914 г. сформулировал общий принцип образования (или строения) таких механизмов [2]. Ассур рассматривал механизмы, которые, с точки зрения введенной в п. 16.2.5 классификации, относятся к механизмам первого типа. Впоследствии принцип Ассура был распространен и на другие рычажные механизмы первого типа.

В соответствии с принципом Ассура механизм может быть разделен на две части: 1) *начальный механизм*, содержащий стойку и входные звенья; 2) *ведомую цепь*, содержащую все другие звенья механизма (предполагается, что кинематические пары, посредством которых ведомая цепь присоединяется к начальному механизму, отнесены к ведомой цепи).

Начальный механизм имеет столько же степеней свободы W , сколько и рычажный механизм, из которого он получен. Если ведомую цепь отсоединить от начального механизма и посредством тех же кинематических пар присоединить к стойке, то образуется статически определяемая ферма. Это означает, что ведомая цепь обладает нулевой подвижностью относительно тех звеньев начального механизма, к которым она присоединяется.

Кинематическая цепь, которая обладает указанным выше свойством ведомой цепи и не может быть расчленена на две кинематические цепи, каждая из которых обладает тем же свойством, называется *структурной группой*, или *группой Ассура*. Из свойства ведомой цепи следует, что либо она является структурной группой, либо ее можно разделить на две или более структурные группы. Группа Ассура состоит не менее, чем из двух звеньев.

Среди кинематических пар структурной группы имеются *внутренние* и *внешние*. Пары, которые образуют друг с другом звенья группы, есть внутренние пары. Внешние пары служат для присоединения звеньев данной группы к звеньям начального механизма или других групп. Число внешних пар называется *порядком* группы Ассура.

Таким образом, любой рычажный механизм первого типа состоит из начального механизма и одной или нескольких структурных групп. В свою очередь, последовательно присоединяя структурные группы к начальному механизму или к другим структурным группам (*метод наслоения*), можно получить любой

рычажный механизм первого типа. В этом и заключается принцип Ассур образования (или строения) механизмов.

Рассмотрим строение восьмизвенного плоского шарнирного механизма (рис. 16.7). Стойка O и входное звено 1 образуют начальный механизм, а остальные звенья — ведомую цепь. Последняя, в свою очередь, состоит из двух групп Ассур. В первую из них входят звенья $2, 3, 4$ и 5 , а во

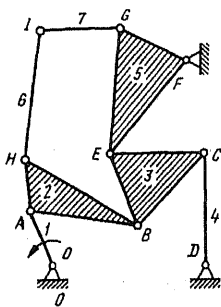


Рис. 16.7

вторую — звенья 6 и 7 . Первая группа Ассур (третьего порядка) присоединяется своими внешними шарнирами A, D и F к звеньям начального механизма. Вторая группа Ассур (второго порядка) присоединяется внешними шарнирами H и G к звеньям 2 и 5 первой группы.

В механизме, показанном на рис. 16.5, a , в состав начального механизма входят стойка O и входные звенья $1, 2$ и 5 . Звенья 3 и 4 образуют ведомую цепь, которая в данном случае является группой Ассур.

Существует определенный порядок следования групп Ассур (если их две или более) в механизме. Первая группа Ассур присоединяется своими внешними парами к звеньям начального механизма, т.е. к стойке и входным звеньям. Каждая последующая группа Ассур присоединяется своими внешними парами к стойке, входным звеньям или к звеньям предшествующих групп Ассур. При этом все внешние пары данной группы Ассур не могут быть присоединены к одному и тому же звену.

Принцип Ассур используется как при структурном анализе данного рычажного механизма (выделение в механизме стойки, входных звеньев и структурных групп), так и при структурном

синтезе механизмов (формирование структурной схемы из начального механизма и структурных групп).

Но значение принципа Ассура не ограничивается этапом структурного анализа или структурного синтеза рычажных механизмов, а распространяется и на этапы их кинематического и кинетостатического анализа, так как для каждой группы Ассура можно составить самостоятельные алгоритмы ее кинематического и кинетостатического анализа. Число применяемых на практике разновидностей групп Ассура невелико. При наличии указанных алгоритмов их анализа легко формируется алгоритм анализа любого рычажного механизма.

16.4.2. Плоские структурные группы и их классификация

В соответствии с указанным выше свойством групп Ассура между числом n_r звеньев плоской группы и числом p_r ее кинематических пар существует следующее соотношение:

$$W_r = 3n_r - 2p_r = 0, \quad (16.8)$$

где W_r — подвижность группы Ассура относительно тех звеньев, к которым она присоединяется своими внешними парами.

Соотношение (16.8) выполняется, если

$$n_r = 2k, \quad p_r = 2k, \quad (16.9)$$

где $k = 1, 2$ и т.д.

По предложению Г.Г. Баранова* число k называется *классом структурной группы*. Таким образом, двухзвенные группы Ассура являются группами первого класса, четырехзвенные — группами второго класса и т.д.

Существует только одна *двухзвенная* группа Ассура (рис. 16.8, а), называемая также *двухпроводковой группой*, или *диадой*. Ее порядок равен двум. Если в этой группе вида ВВВ заменить одну, или две вращательные пары (В) на поступательные (П), то получим еще четыре модификации двухзвенной группы, имеющие следующую структуру: ВВП, ВПВ, ВПП и ПВП (рис. 16.8, б—д).

* Баранов Г.Г. Курс теории механизмов и машин. М., 1975.

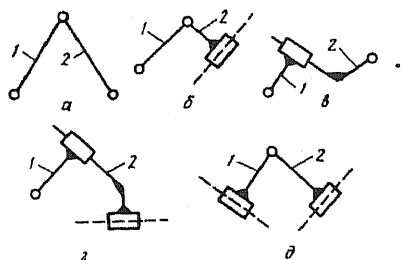


Рис. 16.8

Существует две *четырёхзвенных* группы Ассура, т.е. группы второго класса (рис. 16.9, а, б). Одна из них имеет второй порядок (рис. 16.9, а), а другая — третий порядок (рис. 16.9, б). Последнюю называют *трехпроводковой группой*. Заменой части пар вида В на пары вида II можно получить различные модификации четырехзвенных групп.

Число *шестизвенных* групп Ассура равно 10. На рис. 16.10 показаны три из них — четвертого, третьего и второго порядков. Первая группа (16.10, а) не имеет замкнутых контуров, вторая (16.10, б) имеет один замкнутый контур, третья (16.10, в) — два замкнутых контура.

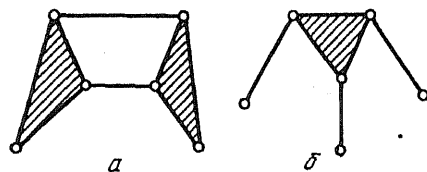


Рис. 16.9

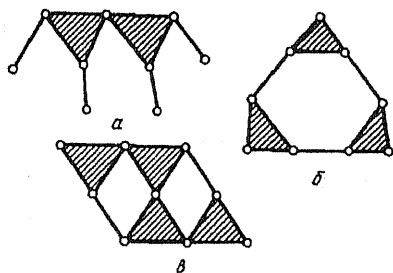
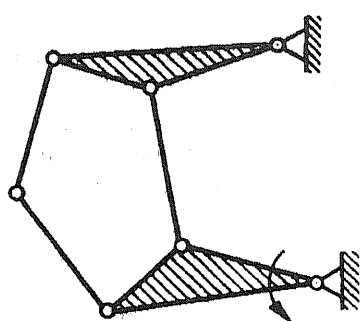


Рис. 16.10

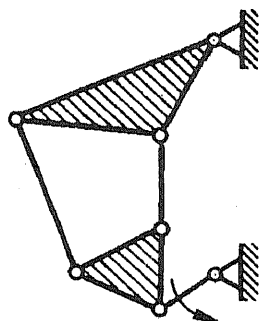
На практике в подавляющем большинстве плоских рычажных механизмов встречаются только двухзвенные группы, т.е. группы первого класса. Иногда в механизмах используются группы второго класса, преимущественно — трехпроводковая группа. Группы выше второго класса встречаются в механизмах крайне редко.

16.4.3. Структурная классификация плоских рычажных механизмов первого типа

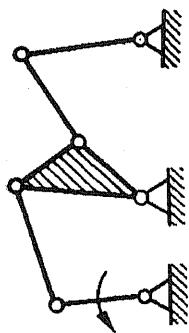
Считается, что класс плоского рычажного механизма совпадает с наивысшим классом входящих в него групп Ассура. Так,



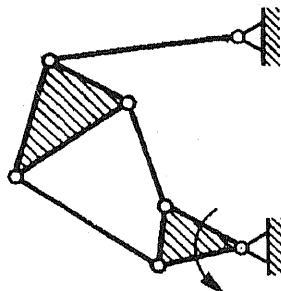
2



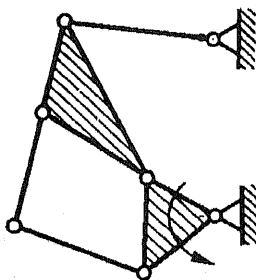
3



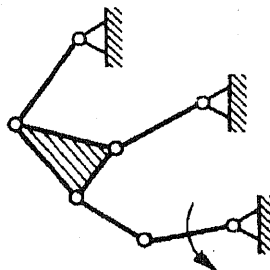
6



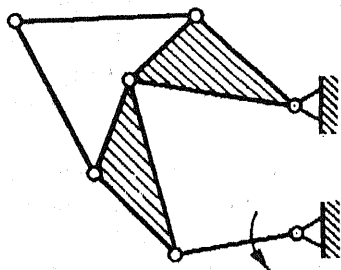
7



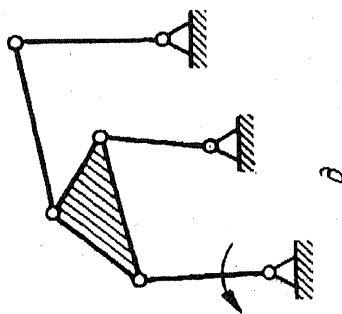
8



9



a



b

Рис. 16.11

класс механизма, изображенного на рис. 16.7, равен двум, поскольку в его структуре имеется группа второго класса (звенья 2, 3, 4 и 5) и группа первого класса (звенья 6 и 7).

На практике наиболее распространены механизмы первого класса, т.е. механизмы, содержащие двухзвенные группы Ассура. К механизмам первого класса относятся механизмы, приведенные на рис. 16.1, а, в, 16.4, а, б, 16.5, а.

Механизмы второго, третьего и т.д. классов называют *механизмами высоких классов*. Они сравнительно мало распространены на практике, что объясняется сложностью их кинематического анализа и синтеза.

Наиболее широкое применение в технике нашли одноподвижные плоские рычажные механизмы с числом звеньев 4 и 6. На рис. 16.11, а—з приведены все возможные схемы шестизвенных шарнирных механизмов. Первые пять из них (рис. 16.11, а—д) относятся к первому классу, три последующих (рис. 16.11, е—з) — ко второму классу. В зарубежной литературе по теории механизмов установилась традиция присваивать указанным механизмам такие наименования: механизмы Уатта I (рис. 16.11, а, б), механизм Уатта II (рис. 16.11, в), механизм Стефенсона I (рис. 16.11, г), механизмы Стефенсона II (рис. 16.11, ж, з), механизмы Стефенсона III (рис. 16.11, д, е).

16.4.4. Распространение принципа Ассура на рычажные механизмы второго типа

В теории механизмов принято считать, что принцип Ассура не является универсальным в том смысле, что он относится только к рычажным механизмам первого типа, так как механизмы второго типа (см. п. 16.2.5) невозможно разделить на начальный механизм и группы Ассура. Отсюда делается вывод о том, что на плоские рычажные механизмы второго типа не может быть распространена структурная классификация, о которой говорилось выше применительно к механизмам первого типа.

Однако можно изменить трактовку принципа Ассура таким образом, что он окажется пригодным и для рычажных механизмов второго типа. Это позволит распространить на них структурную классификацию, а также методы и алгоритмы ки-

нематического анализа (см. главу 17), разработанные для механизмов первого типа.

Важнейшим элементом принципа Ассура, описанного в п. 16.4.1 применительно к рычажным механизмам первого типа, является выделение ведомой цепи, которая может быть разделена на группы Ассура. Покажем, что и для рычажных механизмов второго типа можно получить кинематическую цепь, обладающую указанным свойством ведомой цепи — возможностью разделения на группы Ассура.

Ограничимся здесь рассмотрением одноподвижных плоских рычажных механизмов второго типа. Пусть задан закон относительного движения двух подвижных звеньев, образующих входную пару механизма.

Для получения упомянутой кинематической цепи выполним следующие операции:

- 1) ликвидируем относительную подвижность двух звеньев, образующих входную пару механизма;
- 2) отбросим стойку.

В результате ликвидации относительной подвижности двух указанных звеньев они объединяются в одно звено, которое мы назовем условным звеном и обозначим через $У$. После отбрасывания стойки получается кинематическая цепь, содержащая $n - 2$ звеньев и $p - 1$ кинематических пар (здесь n и p — числа звеньев и пар механизма). Так как $W = 3(n - 1) - 2p = 1$, то $3(n - 2) = 2(p - 1)$. Отсюда следует, что между числом звеньев и числом пар указанной кинематической цепи выполняется соотношение вида (16.8), характерное для групп Ассура и для ведомой цепи. В связи с этим упомянутую кинематическую цепь будем называть *ведомой цепью* плоского рычажного механизма второго типа.

На практике наиболее распространен случай, когда в механизмах второго типа входная пара является поступательной; она образуется двумя звеньями — цилиндром и поршнем, которые, в свою очередь, образуют вращательные пары (шарниры) со смежными звеньями, причем ось входной поступательной пары проходит через центры двух указанных шарниров. В этом случае условное звено $У$ имеет вид стержня, присоединяемого к двум смежным звеньям при помощи шарниров, расстояние между которыми будем считать длиной звена $У$ и обозначать

начать через l_y . Условное звено имеет переменную длину, поскольку

$$l_y = (l_y)_0 + s, \quad (16.10)$$

где s — обобщенная координата механизма (перемещение поршня по отношению к цилиндру); $(l_y)_0$ — значение длины l_y при $s = 0$.

Отметим, что описанный способ получения ведомой цепи механизма вполне пригоден и для рычажных механизмов первого типа: при его применении мы получим тот же результат, что и при отделении начального механизма.

Общим свойством ведомых цепей механизмов первого и второго типов является то, что каждая такая цепь или является группой Ассура, или может быть разделена на несколько групп Ассура. Отличие же их друг от друга заключается в том, что ведомая цепь механизмов второго типа содержит условное звено $У$ (оно входит в одну из групп Ассура), а у ведомой цепи механизмов первого типа такого звена нет.

Описанный выше единый способ получения ведомой цепи представляет собой основу *модифицированного принципа Ассура*, пригодного для рычажных механизмов первого и второго типов.

В качестве примеров применения модифицированного принципа Ассура рассмотрим три шестизвенных механизма второго типа, показанных на рис. 16.12, а, 16.13, а и 16.14, а. У этих механизмов входная пара является поступательной и образуется подвижными звеньями 1 и 2 — цилиндром и поршнем. Задано относительное перемещение s поршня 2 по отношению к цилиндру 1. На рис. 16.12, б, 16.13, б и 16.14, б показаны ведомые цепи рассматриваемых механизмов. При этом ведомое звено $У$ изображено двойной линией.

Отдельного обсуждения требует вопрос о формировании групп Ассура из звеньев ведомой цепи механизма второго типа. Для механизмов первого типа данный вопрос решается в соответствии с принципом Ассура в его традиционной трактовке, изложенной в п. 16.4.1. Например, очевидным является правило, по которому звено ведомой цепи механизма не может принадлежать одновременно двум разным группам Ассура, входящим в данную цепь.

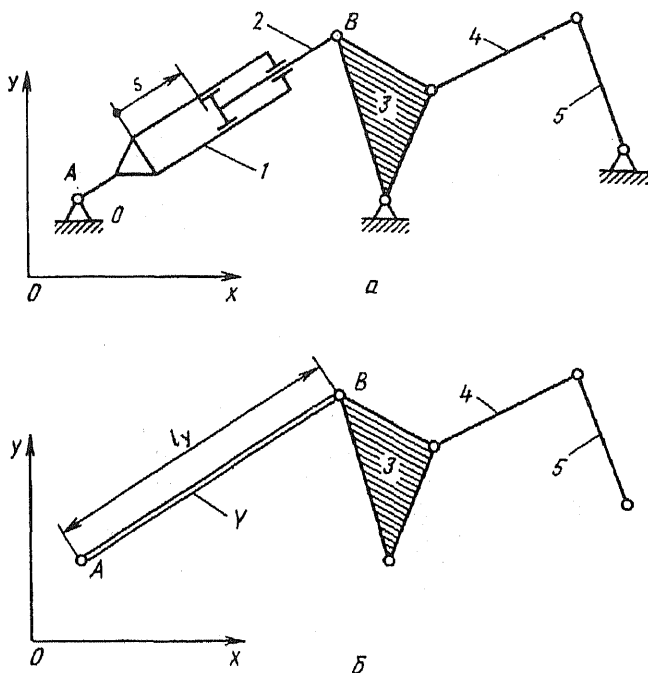


Рис. 16.12

Что касается механизмов второго типа, то среди них встречаются два рода механизмов, различающихся способом формирования групп Ассур из звеньев ведомой цепи. Механизмы второго типа первого рода в этом отношении не отличаются от механизмов первого типа. Механизмы второго типа второго рода характеризуются особым способом формирования групп Ассур, который описан ниже.

К механизмам первого рода относятся такие рычажные механизмы второго типа, у которых звено $У$ входит в состав первой по номеру группы Ассур среди групп, образующих ведомую цепь механизма. Если же звено $У$ не входит в состав указанной группы, то такие механизмы относятся к механизмам второго рода. Отметим, что нумерация групп Ассур производится в порядке их наложения (в этом же порядке в дальнейшем производится кинематический анализ механизма).

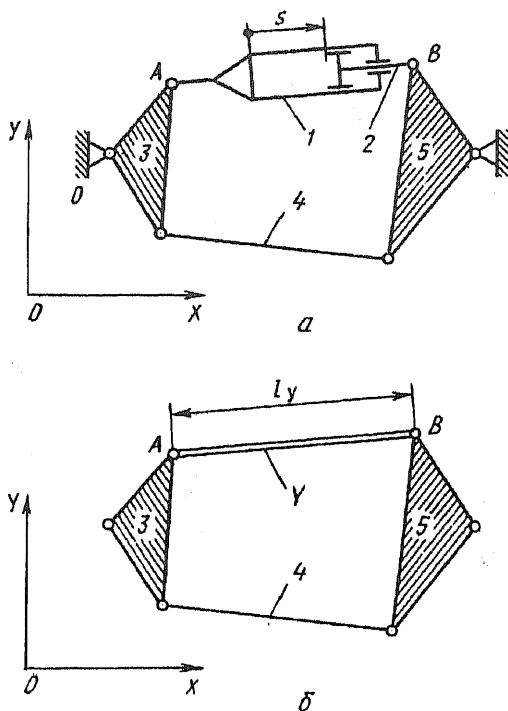


Рис. 16.13

Особенность структуры рычажных механизмов второго типа второго рода состоит в том, что часть звеньев ведомой цепи таких механизмов не имеет относительной подвижности по отношению к звену У. Эти звенья образуют кинематическую цепь, которую будем называть *подцепью ведомой цепи*. Нетрудно показать, что подцепь является группой Ассура или состоит из нескольких групп Ассура. Звенья подцепи вместе со звеном У образуют одно звено, которое будем называть *фиктивным звеном* и обозначать через Φ .

Рассмотрим теперь кинематическую цепь, состоящую из звена Φ и звеньев ведомой цепи, не участвовавших в формировании звена Φ . Эту цепь будем называть *фиктивной ведомой цепью механизма*. Последняя или является группой Ассура, или ее можно разделить на несколько групп Ассура, причем первой

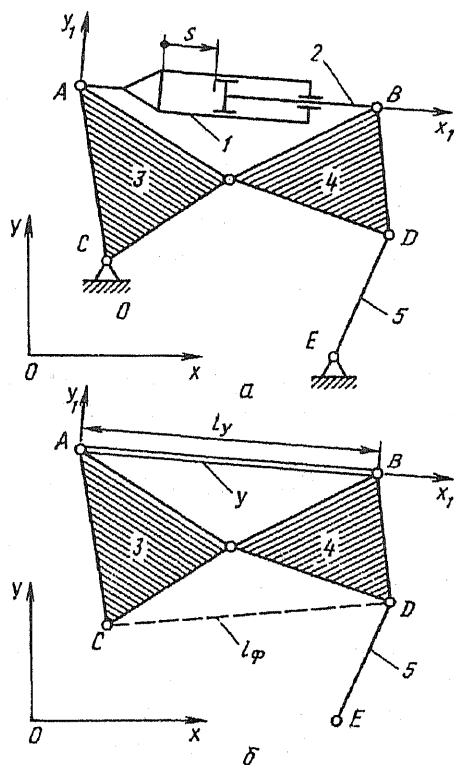


Рис. 16.14

из них по номеру (в порядке наложения) является группа, содержащая звено Φ . Отметим, что любое из звеньев подцепы входит в две группы Ассур: во-первых, в группу, входящую в подцепь, и, во-вторых, в группу, содержащую звено Φ .

Среди механизмов второго типа, приведенных на рис. 16.12, а, 16.13, а и 16.14, а первый и второй механизмы относятся к первому роду, а третий механизм — ко второму роду.

Ведомая цепь первого механизма (см. рис. 16.12, б) разделяется на две диады, первая из которых содержит звенья $У$ и $З$, а вторая — звенья 4 и 5 . Поэтому рассматриваемый механизм есть механизм первого класса (см. 16.4.3).

Ведомая цепь второго механизма (см. рис. 16.13, б) представляет собой четырехзвенную группу Ассур второго порядка

(см. рис. 16.9, *a*), так что этот механизм есть механизм второго класса.

Звенья 3 и 4 ведомой цепи третьего механизма (см. рис. 16.14, *б*) не имеют относительной подвижности по отношению к звену У и, следовательно, образуют подцепь. Последняя представляет собой диаду. Подцепь вместе со звеном У образует фиктивное звено Ф. В свою очередь, звено Ф вместе со звеном 5 образует фиктивную ведомую цепь, которая представляет собой диаду. Значит, третий механизм (см. рис. 16.14, *a*) есть механизм первого класса.

§ 16.5. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

16.5.1. Структурный анализ

Структурный анализ плоского рычажного механизма состоит в исследовании его структурной схемы. Он выполняется в такой последовательности:

- 1) найти число n звеньев механизма (включая стойку);
- 2) установить число p кинематических пар, а также вид каждой пары (поступательная или вращательная);
- 3) определить число W степеней свободы механизма, а также выявить наличие или отсутствие избыточных связей (см. п. 16.3.3);
- 4) пронумеровать звенья: 0 — стойка; 1, 2, 3, ..., $n - 1$ — подвижные звенья;
- 5) указать входную пару (входные пары), а также входное звено (входные звенья);
- 6) указать тип механизма — первый или второй (см. п. 16.2.5);
- 7) выделить ведомую цепь с учетом типа механизма — см. п. 16.4.4 (при формировании ведомой цепи для механизмов второго типа вводится в рассмотрение условное звено, получаемое путем жесткого соединения друг с другом двух подвижных звеньев, образующих входную пару);
- 8) разделить ведомую цепь на группы Ассура, указать последовательность наложения групп, установить класс и порядок каждой группы (см. п. 16.4.2);
- 9) указать класс механизма (см. пп. 16.4.3 и 16.4.4).

16.5.2. Структурный синтез

Применительно к рычажным механизмам можно выделить четыре вида структурного синтеза: 1) синтез структурных групп, 2) синтез замкнутых кинематических цепей, 3) синтез структурных схем механизмов, 4) выбор структурной схемы проектируемого механизма.

Рассмотрим каждый из этих четырех видов структурного синтеза применительно к плоским рычажным механизмам первого типа.

Синтез структурных групп. В п. 16.4.1 говорилось о том, что в соответствии с принципом Ассура любой рычажный механизм можно образовать из начального механизма (стойка и входные звенья) и одной или нескольких структурных групп, или групп Ассура. Таким образом, структурные группы -- это своего рода неделимые «структурные элементы», из которых можно составить любые рычажные механизмы. Поэтому целью синтеза структурных групп является создание своеобразной «периодической системы структурных элементов» или, по современной терминологии, «банка» структурных групп.

Ранее (см. п. 16.4) говорилось о том, что при образовании плоских механизмов используется главным образом двухзвенная группа (диада) и значительно реже -- четырехзвенные группы. С их помощью можно построить весьма большое число механизмов. Вместе с тем при синтезе структурных схем плоских рычажных механизмов определенный интерес могут представлять также группы Ассура с числом звеньев шесть и более.

Синтез плоских структурных групп базируется прежде всего на формулах (16.9). Однако для того, чтобы кинематическая цепь, удовлетворяющая этим формулам, была группой Ассура, необходимо выполнение следующих условий: 1) эта цепь не должна распадаться на две или более группы Ассура; 2) на каждом звене цепи должно быть не более одного внешнего шарнира; 3) общее число внешних шарниров не должно быть меньше двух; 4) число звеньев цепи, образующих замкнутый контур, должно быть не менее четырех; 5) в составе цепи не должна содержаться подцепь, представляющая собой группу Ассура, такую, что все ее внешние шарниры присоединяются к одному и тому же звену данной цепи.

Формулы (16.9) и приведенные выше условия позволяют составить некоторые уравнения и неравенства, облегчающие синтез плоских структурных групп.

Синтез структурных групп можно рассматривать как задачу комбинаторной математики. Плодотворной может оказаться также идея использования таких разделов современной математики, как теория графов и топология. Все указанные выше условия, которым должны удовлетворять группы Ассура, удается формализовать, т.е. представить в виде некоторого алгоритма, что дает возможность при синтезе структурных групп использовать ЭВМ.

Синтез замкнутых кинематических цепей. Наряду с принципом Ассура образования механизмов широко распространен и другой подход, предложенный Грюблером в 70-х годах XIX века, который основывается на использовании замкнутых кинематических цепей. Поясним этот подход на примере плоских замкнутых кинематических цепей с вращательными парами, на базе которых могут быть образованы плоские шарнирные механизмы с одной степенью свободы ($W=1$).

Чтобы получить механизм с $W=1$ из плоской замкнутой цепи, нужно одно звено цепи закрепить, т.е. сделать стойкой, а еще одно звено принять в качестве входного. Отсюда следует, что рассматриваемая цепь должна иметь $W=4$. Из формулы $W=3n-2p$ видно, что между числом n звеньев и числом p шарниров цепи должно выполняться соотношение: $3n-2p=4$, которое дает такие сочетания n и p : 1) $n=4$, $p=4$; 2) $n=6$, $p=7$; 3) $n=8$, $p=10$; 4) $n=10$, $p=13$ и т.д.

Целью синтеза замкнутых кинематических цепей является со-

здание «банка» таких топологически неповторяющихся цепей с различным числом звеньев. Установлено, что существует только одна четырехзвенная плоская замкнутая шарнирная цепь (рис. 16.15, а), две шестизвенные цепи (рис. 16.15, б, в) и 16 восьмизвенных цепей, одна из которых показана на рис. 16.15, г. В настоящее время синтезированы, по-видимому, все возможные цепи с числом звеньев $n=10$ и многие цепи с $n=12$ при $W=4$.

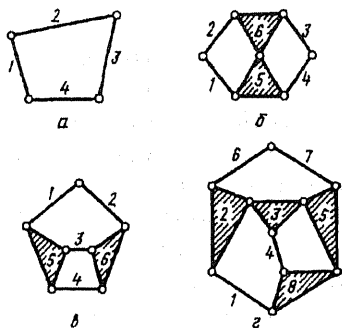


Рис. 16.15

Из четырехзвенной цепи путем обращения любого из звеньев в стойку образуется шарнирный четырехзвенник (см. рис. 16.1, а).

За шестизвенными цепями закрепились такие наименования: цепь Уатта (рис. 16.15, б) и цепь Стефенсона (рис. 16.15, в). Возможны три варианта выбора стойки и входного звена в цепи Уатта, которые дают три шестизвенных механизма Уатта (см. рис. 16.14, а—в). В цепи Стефенсона возможны пять вариантов выбора входного звена и стойки, что дает пять шестизвенных механизмов Стефенсона (см. рис. 16.14, г—з). Например, если в цепи Стефенсона принять в качестве стойки звено 1, а в качестве входного — звено 2, то получим механизм Стефенсона II (см. рис. 16.14, з).

Из 16 восьмизвенных цепей можно получить всего 153 восьмизвенных плоских шарнирных механизма. Например, восьмизвенный механизм, показанный на рис. 16.7, получается из восьмизвенной цепи, приведенной на рис. 16.15, г, если в последней звено 8 принять за стойку, а звено 1 — за входное.

Синтез структурных схем механизмов. Целью синтеза структурных схем рычажных механизмов является создание атласа таких схем, из которых конструктор имел бы возможность выбрать подходящую схему для проектируемого механизма. Создание подобного атласа возможно на основе как *принципа Ассура*, так и *принципа Грюблера* образования механизмов (см. выше). При формировании атласа структурных схем механизмов целесообразно придерживаться определенного системного подхода. Например, следует синтезировать отдельно схемы плоских и пространственных механизмов; среди плоских механизмов — отдельно механизмы с числом звеньев $n = 4, 6, 8, 10$ и т.д.; среди плоских механизмов с определенным числом звеньев — отдельно механизмы первого, второго, третьего и других классов и т.д.

При использовании принципа Ассура образования механизмов необходимо следовать определенным правилам (некоторые из этих правил были сформулированы в § 16.4). Эти правила удастся формализовать, т.е. представить в виде алгоритма, что открывает возможность применения ЭВМ для синтеза структурных схем рычажных механизмов*.

* В главе книги [5] описан метод структурного синтеза плоских шарнирных механизмов первого класса, реализуемый на основе теории графов с применением ЭВМ. Там же приведен атлас восьмизвенных механизмов данного класса, который включает 66 неповторяющихся структурных схем.

Выбор структурной схемы проектируемого механизма. Когда говорят о структурном синтезе механизмов, то обычно имеют в виду четвертый вид структурного синтеза — выбор структурной схемы проектируемого механизма.

Необходимый исходный материал для такого выбора содержат упомянутые выше атласы структурных схем рычажных механизмов. При выборе структурной схемы конструктор руководствуется комплексом технологических, конструктивных, геометрических и других требований, предъявляемых к проектируемому механизму. Главное среди этих требований — воспроизведение механизмом заданного движения исполнительного органа с заданной степенью точности.

На этапе структурного синтеза механизма, который является первым этапом в системе его проектирования, еще не стоит задача точного выполнения указанного главного требования (такая задача возникает на следующем этапе — при кинематическом синтезе механизма). Речь идет о выборе структурной схемы такого механизма, который в принципе позволял бы решить поставленную задачу. Кроме того, желательно выбрать механизм с возможно меньшим числом звеньев.

На практике выбор структурной схемы производится чаще всего на основе предшествующего опыта или интуиции проектировщика. При огромном многообразии структурных схем рычажных механизмов такой эвристический подход к их выбору оправдан. Однако далеко не всегда проектировщик выбирает удачную структурную схему, о чем свидетельствуют конструкции многих существующих механизмов, применяемых в машинах и приборах. Вопрос о рациональном выборе структуры проектируемого механизма сравнительно сложен, поскольку он трудно поддается формализации и еще недостаточно разработан в теории механизмов.

Выбор структурной схемы механизма будет более обоснованным в том случае, когда проектировщик будет располагать информацией о потенциальных функциональных возможностях рычажных механизмов различной структуры. В связи с этим возникает задача предварительной *оценки функциональных возможностей механизмов* различных структурных схем с целью создания необходимой базы для обоснованного выбора схемы при решении конкретной задачи проектирования. Сначала могут быть исследованы в этом смысле механизмы сравнительно

простой структуры, например, механизмы, наиболее часто применяемые в практике проектирования. Затем подобная информация может накапливаться по мере исследования функциональных возможностей механизмов более сложной структуры.

При решении задачи об оценке функциональных возможностей рычажных механизмов возникают две проблемы: 1) *выбор критериев* для такой оценки; 2) *выбор методов* исследования функциональных возможностей*.

§ 16.6. ОБЗОР СХЕМ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В АКУ

16.6.1. Основные элементы АКУ

Авиационные катапультные установки обеспечивают принудительное отделение (катапультирование) груза от летательного аппарата (ЛА), а также его удержание до момента начала отделения, т.е. в транспортном положении. Процесс катапультирования занимает весьма малый промежуток времени (примерно 0,1 — 0,2 с). Выделим два характерных положения установки и груза: 1) *транспортное положение* (до момента начала катапультирования груза); 2) *положение в момент отделения груза* от ЛА (т.е. в момент окончания катапультирования).

По направлению движения груза относительно ЛА при его отделении установки подразделяются на: а) установки с *поперечным движением груза* (когда грузу сообщается скорость, направленная примерно перпендикулярно продольной оси груза); б) установки с *продольным движением груза* (когда последнему сообщается скорость в основном в направлении его продольной оси). В практике проектирования наибольшее применение получили установки с поперечным движением груза.

Установка включает в себя четыре основных элемента: 1) корпус; 2) механизм принудительного отделения груза; 3) силовой привод; 4) замково-стопорное устройство.

* Комплекс вопросов, относящихся к оценке функциональных возможностей рычажных механизмов, включая две названные проблемы, освещен в главе 2 книги [5]. Там же приведены результаты исследования функциональных возможностей плоских шарнирных механизмов некоторых структурных схем с числом звеньев 4, 6 и 8.

Корпус представляет собой металлоконструкцию, обеспечивающую размещение всех механизмов установки, а также силовую связь груза с ЛА. Корпус жестко крепится к ЛА.

Механизм принудительного отделения груза обеспечивает его перемещение при катапультировании в направлении, перпендикулярном продольной оси груза, или вдоль этой оси. Кроме того, данный механизм вместе с замково-стопорным устройством обеспечивает удержание груза в транспортном его положении.

Силовой привод служит для приведения в движение механизма принудительного отделения. В зависимости от используемой энергии силовые приводы подразделяются на *пневматические* и *пиротехнические*. С точки зрения структуры силовой привод представляет собой два звена — цилиндр и поршень, одно из которых может совершать прямолинейно-поступательное перемещение по отношению к другому.

Замково-стопорное устройство предназначено для удержания механизма принудительного отделения груза в транспортном положении. На практике в основном применяются замково-стопорные устройства в виде рычажных механизмов (в данной книге эти устройства не рассматриваются).

Механизмы принудительного отделения груза чаще всего проектируются в виде плоских рычажных механизмов. Далее при изучении структуры и кинематики механизмов принудительного отделения груза они рассматриваются совместно с силовым приводом.

16.6.2. Плоские рычажные механизмы, применяемые в АКУ

На рис. 16.16 изображены структурные схемы плоских рычажных механизмов, применяемых в конструкциях или опытных разработках АКУ в качестве механизма принудительного отделения груза (вместе с силовым приводом). Всего приведено 12 схем (не считая схем *N* 5-а и *N* 7-а, являющихся модификациями схем *N* 5 и *N* 7 соответственно).

На схемах отмечены номера звеньев числами 0, 1, 2, ..., ($n-1$), где n — число звеньев механизма, включая стойку. Стойке присвоен номер 0 (стойкой является корпус установки). Нумерация двух звеньев — цилиндра и поршня, входящих в

Схема N 1

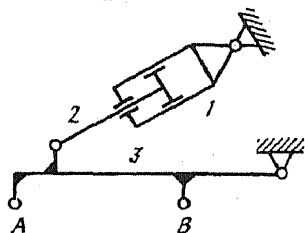


Схема N 2

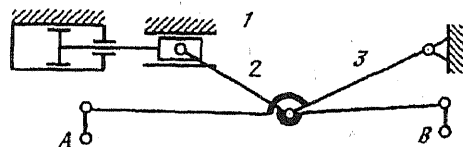


Схема N 3

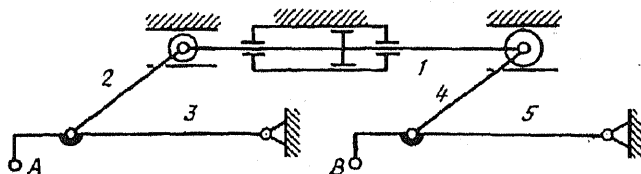


Схема N 4

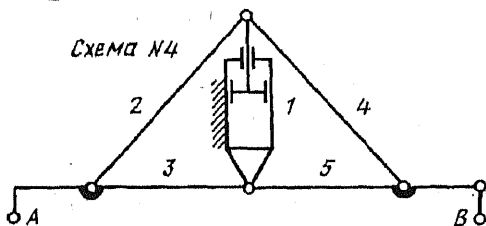


Схема N 5

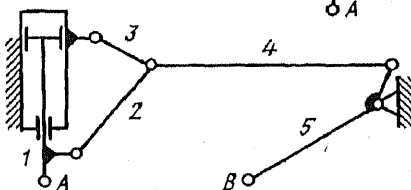


Схема N 5-а

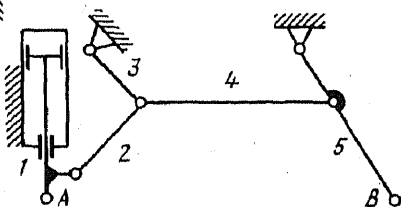


Схема N 6

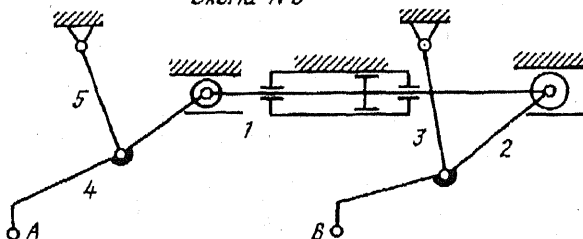


Рис. 16.16 (Начало)

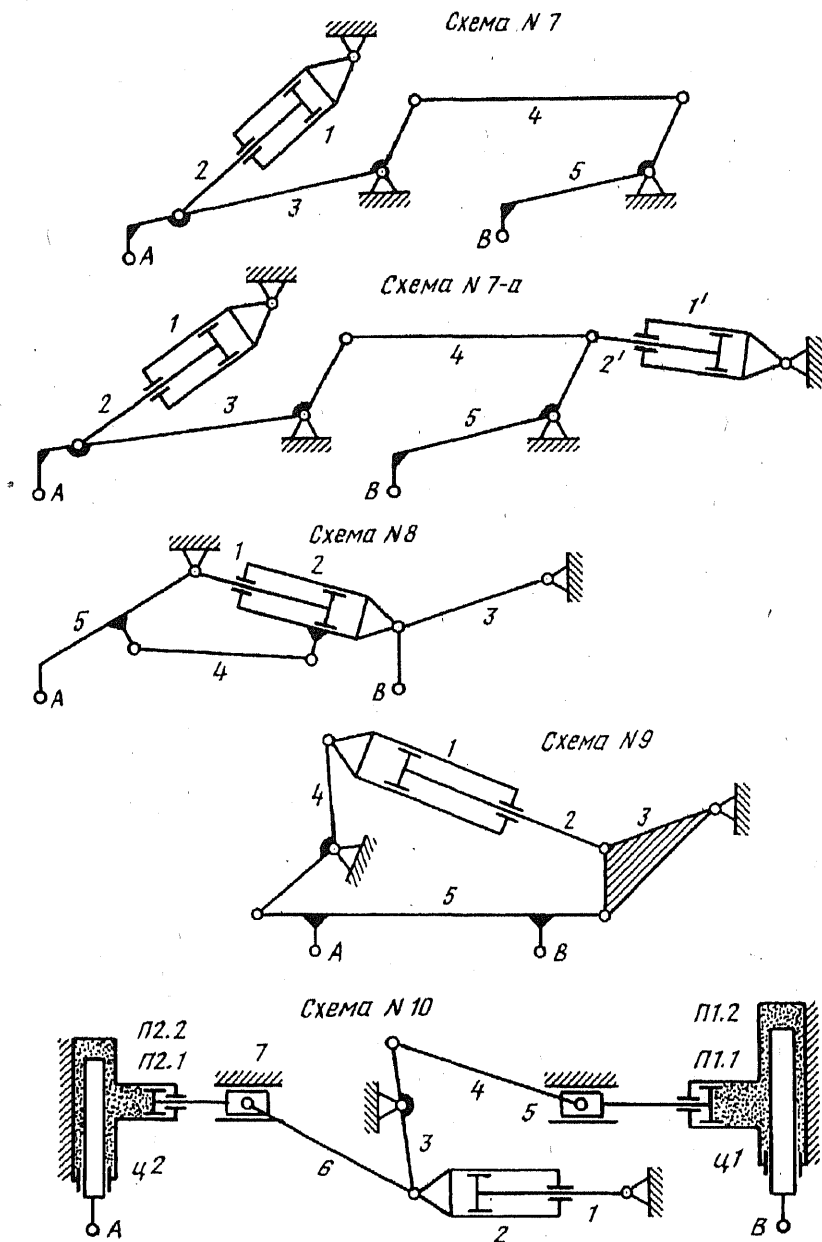


Рис. 16.16 (Продолжение)

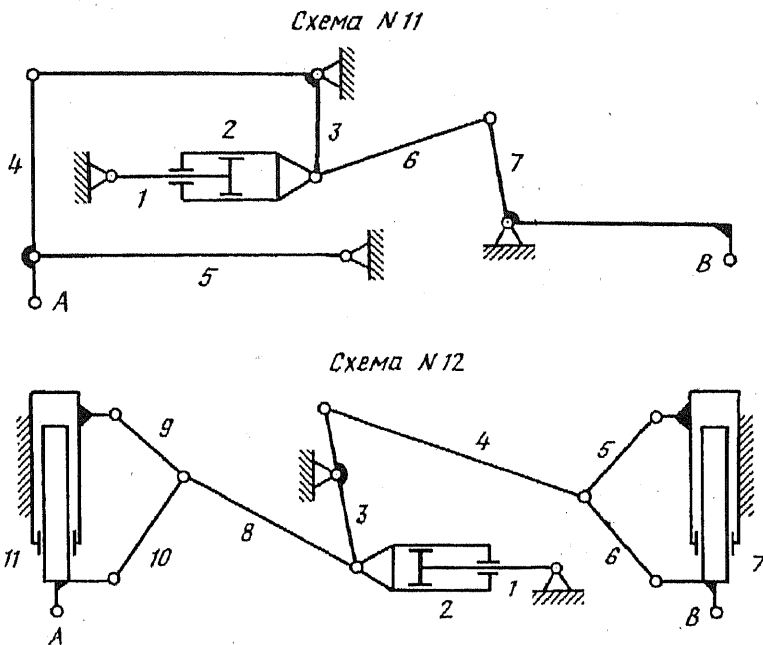


Рис. 16.16 (Окончание)

состав силового привода, производится по такому правилу: а) для схем N 2 — 6 (цилиндр жестко связан с корпусом установки) цилиндру присвоен номер 0, а поршню — номер 1; б) для схем N 1 и N 7 — 12 (цилиндр и поршень являются подвижными звеньями) этим звеньям присвоены номера 1 и 2 соответственно.

На рис. 16.16 все механизмы показаны в транспортном положении. При этом габариты механизма по высоте и ширине таковы, что все его звенья располагаются внутри корпуса установки. В момент отделения груза габариты механизма по ширине не увеличиваются, а по высоте значительно возрастают, так как некоторые из звеньев или их части опускаются за пределы корпуса вниз.

Груз (на схемах механизмов, изображенных на рис. 16.16, он не показан) присоединяется в точках A и B к соответствующим звеньям рычажного механизма. Система присоединения груза к механизму такова, что в транспортном положении груз

жестко связан со звеньями механизма, а к концу процесса отделения связь между грузом и механизмом нарушается.

Движение груза в процессе его отделения полностью определяется движениями звеньев рычажного механизма. Поэтому груз можно считать выходным звеном механизма. Анализ конструкций узлов присоединения груза к звеньям механизма принудительного отделения позволяет заключить, что на уровне структурной и кинематической схем систему присоединения

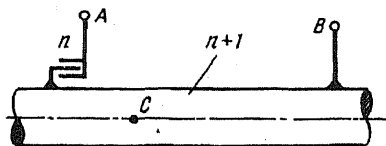


Рис. 16.17

груза к этому механизму можно представить условно в виде двухзвенной группы структуры ВПВ (см. п. 16.4.2), одним из звеньев которой является сам груз. Эту группу будем называть *присоединенной диадой*.

Таким образом, общее число звеньев рычажного механизма, если включить в его состав присоединенную диаду, равно $n + 2$. При этом грузу присвоим номер $n + 1$, а второму звену присоединенной диады — номер n (рис. 16.17). На рисунке введены обозначения: A и B — внешние пары присоединенной диады (шарниры); C — центр тяжести груза.

На рис. 16.18 показан один из механизмов (см. схему $N 2$ на рис. 16.16) вместе с присоединенной диадой в положении, когда поршень переместился в цилиндре на величину s . Для данного механизма $n = 4$.

Сделаем некоторые дополнительные замечания в отношении схем $N 5$ -а, $N 7$ -а и $N 10$, представленных на рис. 16.16.

Схема $N 5$ -а не отличается от схемы $N 5$ в смысле структуры механизма (отличия обнаруживаются только на уровне кинематических схем).

В схеме $N 7$ -а по сравнению со схемой $N 7$ введен второй силовой привод (звенья $1'$ и $2'$), который, однако, не оказывает влияния на функциональную зависимость между перемещением s поршня 2 в цилиндре 1 и перемещениями ведомых звеньев $3, 4, 5$ механизма (если не учитывать упругость звеньев и зазоры), поскольку законы движения $s = s(t)$ поршня 2 и $s' = s'(t)$ поршня $2'$ определенным образом синхронизированы.

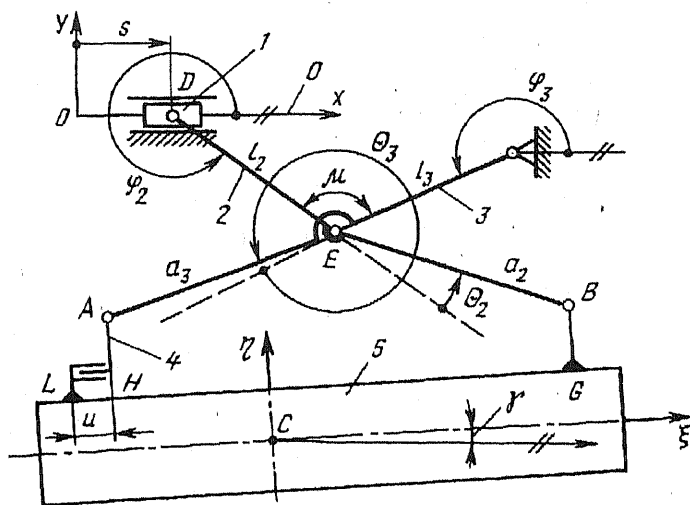


Рис. 16.18

Второй силовой привод введен в схеме *N* 7-а с целью улучшения динамических характеристик механизма принудительного отделения груза.

В схеме *N* 10, кроме собственно рычажного механизма, состоящего из звеньев 1, 2, ..., 7, в состав механизма принудительного отделения груза входят еще два гидромеханизма, первый из которых включает неподвижный цилиндр Ц1 и поршни П1.1, П1.2, а второй — неподвижный цилиндр Ц2 и поршни П2.1, П2.2. Между перемещениями s_5 ползуна 5 и s_B поршня П1.2 первого гидромеханизма, а также между перемещениями s_7 ползуна 7 и s_A поршня П2.2 второго гидромеханизма, имеет место прямая пропорциональность:

$$s_B = k_1 s_5, \quad s_A = k_2 s_7, \quad (16.11)$$

где k_1 и k_2 — постоянные коэффициенты.

§ 16.7. КЛАССИФИКАЦИЯ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В АКУ

Плоские рычажные механизмы, применяемые в авиационных катапультирующих установках в качестве механизмов принуди-

тельного отделения груза, характеризуются рядом особенностей, выделяющих их среди множества плоских рычажных механизмов, которые обычно встречаются в конструкциях производственных машин и которые являются традиционным объектом исследования в теории механизмов. Указанные особенности отражены в табл. 16.2, в которой содержатся также соответствующие сведения, относящиеся к механизмам, применяемым в производственных машинах и приборах.

Перечисленные в табл. 16.2 особенности плоских рычажных механизмов, применяемых в АКУ, потребовали разработки специфических методов кинематического анализа и синтеза рассматриваемых механизмов (эти вопросы будут рассмотрены в главах 17 и 18).

Таблица 16.2

Особенности плоских рычажных механизмов, применяемых в АКУ	Особенности рычажных механизмов, применяемых в производственных машинах и приборах
Входная кинематическая пара является поступательной (ее образует цилиндр и поршень)	Входная кинематическая пара является, как правило, вращательной
Для большинства применяемых схем оба звена, образующих входную пару, являются подвижными (т.е. поршень и цилиндр — подвижные звенья)	Одно из двух звеньев, образующих входную пару, является, как правило, неподвижным, т.е. стойкой
Подвешиваемый к механизму груз (который можно считать одним из звеньев механизма) совершает плоскопараллельное движение, т.е. имеет три обобщенные координаты	Выходное звено механизма совершает, как правило, прямолинейно-поступательное движение или вращательное движение вокруг неподвижной оси, т.е. имеет одну обобщенную координату
К механизму при его синтезе предъявляется комплекс требований, касающихся положений груза (трех его обобщенных координат), скорости его центра масс, его угловой скорости, габаритов механизма, углов давления, конструктивных ограничений	При синтезе механизма обычно фигурируют лишь требования, касающиеся положений выходного звена (одной его обобщенной координаты), а также углов давления и конструктивных ограничений

Таблица 16.3

Но- мер при- знака	Содержание признака		Проявление признака у рычажных механизмов, применяемых в АКУ	Номера схем механизмов
1	Вид входной пары		поступательная	1—12
2	Тип рычажного механизма (см. п. 16.2.5)		первый	2—6
			второй	1, 7—12
3	Класс рычажного механизма (см. п. 16.4.3)		первый	1—8, 10—12
			второй	9
4	Характер движения двух звеньев (цилиндра и поршня), образующих входную пару; в механизмах второго типа		цилиндр или поршень образует вращательную пару со стойкой	1, 7, 8, 10—12
			цилиндр или поршень не образуют кинематических пар со стойкой	9
5	К каким звеньям механизма подвешивается груз (точнее — звенья присоединенной диады)		к двум разным звеньям (с номерами k_1 и k_2)	2—8, 10—12
			к одному и тому же звену (с номером k)	1, 9
6	Характер движения	звеньев k_1 и k_2	$k_1 \rightarrow \text{пост.}, k_2 \rightarrow \text{пост.}$	10, 12
			$k_1 \rightarrow \text{пост.}, k_2 \rightarrow \text{вр.}$	5
			$k_1 \rightarrow \text{вр.}, k_2 \rightarrow \text{вр.}$	3, 4, 7, 8
			$k_1 \rightarrow \text{вр.}, k_2 \rightarrow \text{пл.}$	2, 11
			$k_1 \rightarrow \text{пл.}, k_2 \rightarrow \text{пл.}$	6
		звена k	$k \rightarrow \text{вр.}$	1
			$k \rightarrow \text{пл.}$	9

7	Число n звеньев механизма (не считая присоединенной диады)	$n = 4$	1, 2
		$n = 6$	3—9
		$n = 8$	10, 11
		$n = 12$	12

Анализ структурных схем рычажных механизмов, применяемых в АКУ (см. рис. 16.16), позволяет произвести их классификацию по разным признакам. Результаты классификации схем по структурным признакам отображены в табл. 16.3, в которой приняты такие сокращения: пост. — прямолинейно-поступательное движение; вр. — вращение вокруг неподвижной оси; пл. — плоскопараллельное движение.

В механизмах первого типа (см. табл. 16.3, признак 2) цилиндр неподвижен, а в механизмах второго типа оба звена, образующих входную пару (т.е. цилиндр и поршень), являются подвижными. В том случае, когда цилиндр и поршень в механизмах второго типа не образуют кинематическую пару со стойкой, оба звена совершают плоскопараллельное движение. Конкретные значения k_1 , k_2 и k (см. табл. 16.3, признаки 5 и 6) видны из рис. 16.16: например, $k_1 = 7$, $k_2 = 11$ для схемы N 12; $k = 5$ для схемы N 9.

Дополнительная информация о структурных особенностях и строении рычажных механизмов АКУ, показанных на рис. 16.16, дана в табл. 16.4. Из последней колонки таблицы видно, что в рассматриваемых механизмах встречаются структурные группы следующих видов: 1) диада вида ВВВ (см. рис. 16.8, а); 2) диада вида ВВП (см. рис. 16.8, б); 3) диада вида ВВВ с условным звеном, т.е. со «звеном» переменной длины (см. п. 16.4.4); 4) четырехзвенная группа Ассура второго порядка (см. рис. 16.9, а) с условным звеном, т.е. со «звеном» переменной длины.

Таблица 16.4

Номер схемы механиз- ма	Класс механизма	Тип механизма	Число звеньев	Группы Ассура, входящие в со- став механизма
1	первый	второй	4	диада ВВВ с ус- ловным звеном
2	первый	первый	4	диада ВВВ
3, 4, 5, 6	первый	первый	6	1) диада ВВВ, 2) диада ВВВ
7, 8	первый	второй	6	1) диада ВВВ с условным звеном, 2) диада ВВВ
9	второй	второй	6	четырёхзвенная группа 6В второ- го порядка с ус- ловным звеном
10	первый	второй	8	1) диада ВВВ с условным звеном, 2) диада ВВП, 3) диада ВВП
11	первый	второй	8	1) диада ВВВ с условным звеном, 2) диада ВВВ, 3) диада ВВВ
12	первый	второй	12	1) диада ВВВ с условным звеном, 2) диада ВВВ, 3) диада ВВП, 4) диада ВВВ, 5) диада ВВП

§ 16.8. СИНТЕЗ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ ШЕСТИЗВЕННЫХ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ ДЛЯ АКУ

При разработке рычажных механизмов принудительного отделения груза для АКУ проектировщик руководствуется комплексом требований и ограничений, среди которых можно выделить требования, относящиеся к структуре механизма. К этим требованиям, учитываемым на этапе структурного синтеза механизма (см. п. 16.5.2), относятся следующие: 1) входная пара должна быть поступательной, она образуется двумя звеньями — цилиндром и поршнем; 2) механизм может быть или первого типа (цилиндр неподвижен), или второго типа (цилиндр и поршень — подвижные звенья); 3) подвешиваемый к механизму груз должен совершать плоскопараллельное движение; 4) более предпочтительны механизмы с меньшим числом звеньев.

При выборе структурной схемы механизма в предварительном плане принимаются в расчет также и требования, относящиеся к кинематической схеме механизма, которые в полной мере могут быть учтены только на этапе кинематического синтеза механизма (этот вопрос будет рассмотрен в гл. 18).

Полезным источником при выборе структурной схемы механизма принудительного отделения груза может служить атлас структурных схем рычажных механизмов с заданным числом звеньев и с входной парой вида П (поступательной). Наиболее перспективными в плане практического применения можно считать шестизвенные механизмы. Найдем множество всех возможных структурных схем шестизвенных рычажных механизмов, у которых входная пара является поступательной, а шесть других пар — вращательными.

Как известно, существует всего девять схем одноподвижных шестизвенных шарнирных механизмов первого типа. Эти схемы показаны на рис. 16.19, где им присвоены шифры *ШШ1*, *ШШ2*, ..., *ШШ9*. На всех схемах входное звено имеет номер 1, а другие подвижные звенья — номера 2, 3, 4, 5. Если одну из семи вращательных пар в каком-либо шестизвенном шарнирном механизме заменить на поступательную пару и сделать эту пару входной, то мы получим шестизвенный рычажный механизм, относящийся к упомянутому выше множеству механизмов.

Очевидно, что из одной схемы шестизвенного шарнирного механизма (рис. 16.19) можно путем указанного структурного

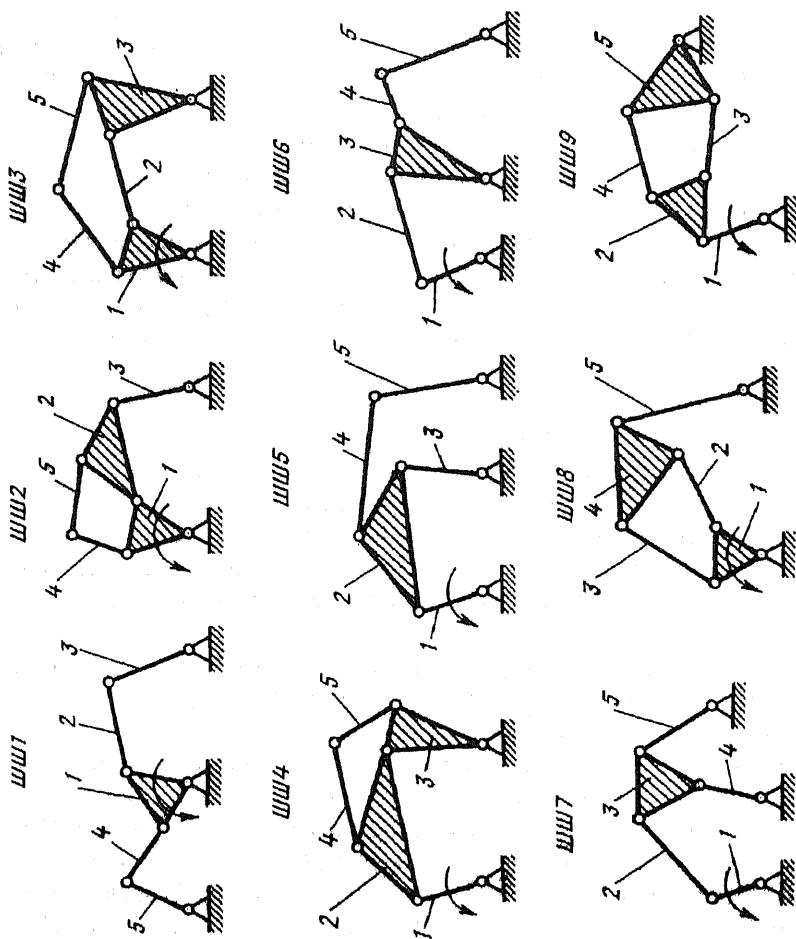


Рис. 16.19

преобразования получить несколько схем шестизвенников с входной поступательной парой. Из всех полученных таким образом схем необходимо исключить повторяющиеся схемы. В результате мы получим искомое множество неповторяющихся структурных схем. Установлено, что в него входит всего 25 схем, среди которых 9 схем относятся к механизмам первого типа (рис. 16.20) и 16 схем — к механизмам второго типа (рис. 16.21). Механизмам первого типа присвоим шифры *Ш1.1*, *Ш1.2*, ..., *Ш1.9*, а механизмам второго типа — шифры *Ш2.1*, *Ш2.2*, ..., *Ш2.16*. Механизмы *Ш1.і* получены из механизмов *ШШі* ($i = 1, 2, \dots, 9$) путем перемены вида входной пары — вращательная пара заменена на поступательную.

Что касается механизмов *Ш2.1* — *Ш2.16*, то они могут быть разделены на две серии: в *первую серию* входят шестизвенники *Ш2.1* — *Ш2.11*, у которых цилиндр образует вращательную пару со стойкой (это есть механизмы с качающимся цилиндром); во *вторую серию* входят шестизвенники *Ш2.12* — *Ш2.16*, у которых цилиндр и поршень не образуют кинематических пар со стойкой, т.е. совершают плоскопараллельное движение.

Шестизвенники первой серии получают из соответствующих шестизвенных шарнирных механизмов (см. рис. 16.19) следующим образом: звено 1 становится цилиндром, а смежное с ним подвижное звено — поршнем. Например, из схемы *ШШ6* получается схема *Ш2.6*, а из схемы *ШШ2* получаются *Ш2.2* и *Ш2.8*.

Шестизвенники второй серии образуются из схем *ШШ2*, *ШШ3*, *ШШ4*, *ШШ5*, *ШШ7*, *ШШ8* и *ШШ9*, у которых имеются два смежных звена, совершающих плоскопараллельное движение, путем замены вращательной пары, образуемой двумя указанными звеньями, на поступательную (одно из этих звеньев становится цилиндром, а другое поршнем). Так, из схемы *ШШ2* (или *ШШ4*) образуются шестизвенники *Ш2.13* и *Ш2.14*, из схемы *ШШ5* (или *ШШ7*) образуется шестизвенник *Ш2.16*, из схемы *ШШ8* (или *ШШ0*) — шестизвенник *Ш2.12*, из схемы *ШШ4* — шестизвенник *Ш2.15*.

Произведем структурную классификацию шестизвенных механизмов, показанных на рис. 16.19, 16.20 и 16.21 на основании принципа Ассур (см. § 16.4).

Шестизвенники *ШШ1* — *ШШ6* содержат две диады (в первую диаду входят звенья 2 и 3, во вторую — звенья 4 и 5) и

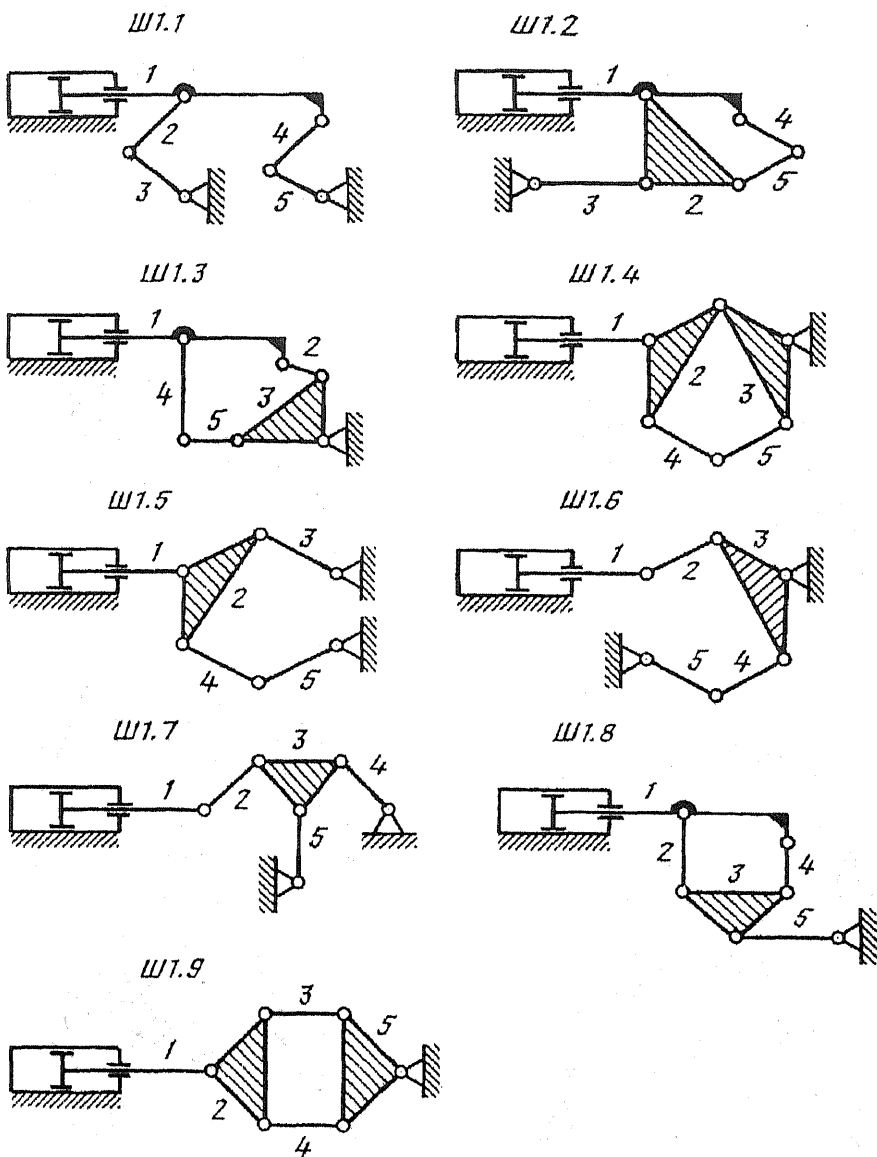


Рис. 16.20

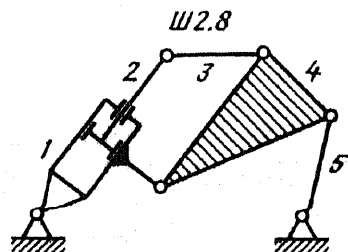
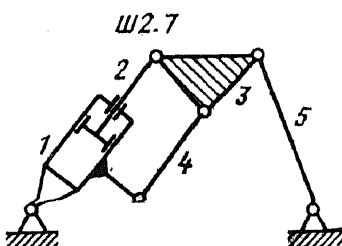
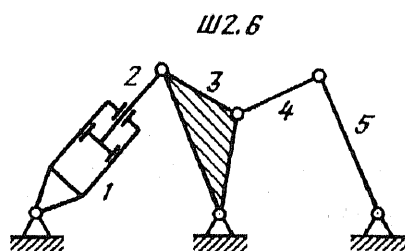
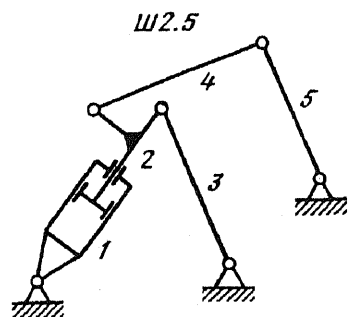
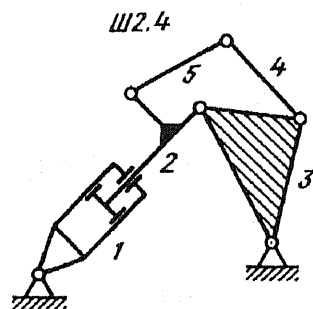
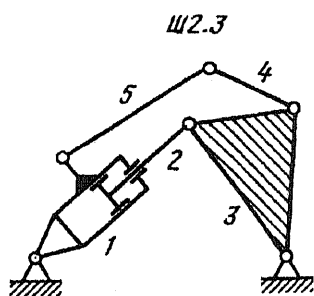
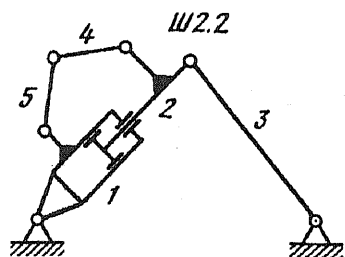
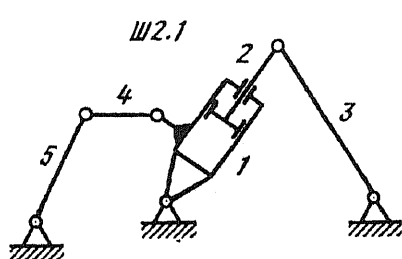


Рис. 16.21 (Начало)

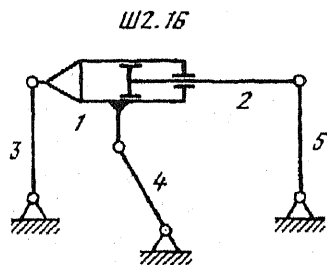
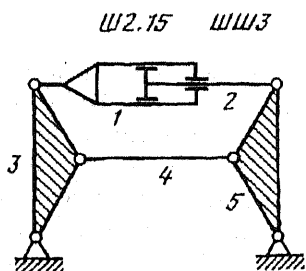
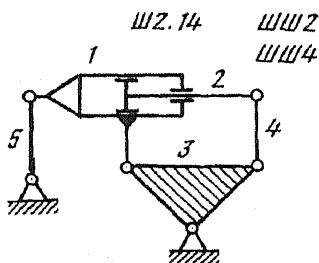
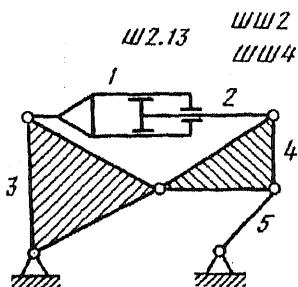
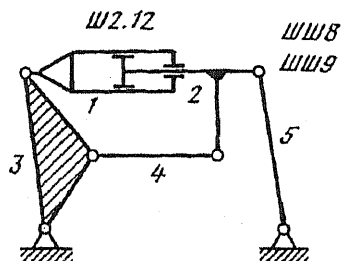
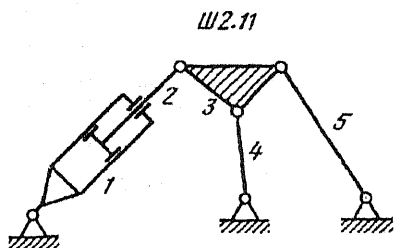
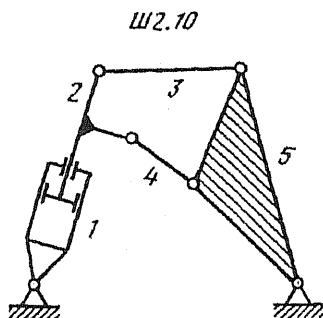
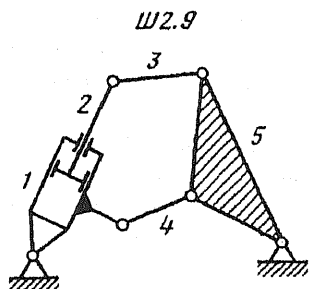


Рис. 16.21 (Окончание)

относятся к механизмам первого класса. Шестизвенники *ШШ7* — *ШШ9* содержат четырехзвенную группу Ассура (звенья 2, 3, 4, 5) и относятся к механизмам второго класса. Аналогичную структуру имеют и шестизвенные механизмы *Ш1.1* — *Ш1.9* первого типа.

Сведения о классификации шестизвенников *Ш2.1* — *Ш2.16* второго типа приведены в табл. 16.5, где приняты обозначения: У — условное звено, полученное путем жесткого соединения друг с другом звеньев 1 и 2; Ф — фиктивное звено, полученное путем объединения звеньев У, 3 и 4.

Таблица 16.5

Шифры механизмов	Структура ведомой цепи			Род механизмов	Класс механизмов
<i>Ш2.1</i> — <i>Ш2.6</i>	Звенья	первой диады	У, 3	Первый	Первый
		второй диады	4, 5		
<i>Ш2.7</i> , <i>Ш2.8</i> , <i>Ш2.12</i> , <i>Ш2.13</i> , <i>Ш2.14</i>	Звенья	первой диады	3, 4	Второй	Первый
		второй диады	Ф, 5		
<i>Ш2.9</i> , <i>Ш2.10</i> , <i>Ш2.15</i>	Звенья, входящие в группу Ассура второго класса второго порядка			Первый	Второй
<i>Ш2.11</i> , <i>Ш2.16</i>	Звенья, входящие в группу Ассура второго класса третьего порядка			Первый	Второй

Из сопоставления схем *N* 3 — 9, приведенных на рис. 16.16, со схемами шестизвенников, показанных на рис. 16.20 и 16.21, видно, что любая из схем *NN* 3, 4 и 6 есть шестизвенник *Ш1.1*, схема *N* 7 — шестизвенник *Ш2.6*, схема *N* 8 — шестизвенник *Ш2.5*, схема *N* 9 — шестизвенник *Ш2.15*. Следовательно, из общего числа 25 возможных схем шестизвенных рычажных механизмов с входной поступательной парой практическое применение в АКУ нашли только пять схем: *Ш1.1*, *Ш1.6*, *Ш2.5*, *Ш2.6* и *Ш2.15*.

Таким образом, при структурном синтезе рычажных механизмов для авиационных катапультных установок проектировщику предоставляются широкие возможности для выбора новых структурных схем, ранее не использованных на практике. Кроме того, в каждой из схем (как новых, так и ранее известных) можно осуществить несколько вариантов выбора звена или двух звеньев, к которым подвешивается груз.

Глава 17. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ АКУ

§ 17.1. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ СХЕМА МЕХАНИЗМА И ЕЕ ПАРАМЕТРЫ

Кинематический анализ механизма заключается в определении движения звеньев механизма по заданному относительному движению двух звеньев, образующих входную пару (см. § 16.1). Применительно к механизмам первого типа (см. п. 16.2.5), в которых одно из двух указанных звеньев есть стойка, а второе — входное звено, кинематический анализ состоит в определении движения звеньев ведомой кинематической цепи механизма по заданному движению входного звена. Что касается механизмов второго типа (когда задано относительное движение двух подвижных звеньев), то для них кинематический анализ заключается в определении абсолютного движения всех подвижных звеньев механизма.

Когда говорят об определении движения звеньев механизма, то имеют в виду определение их положений, скоростей и ускорений. Кроме того, на этапе кинематического анализа рычажного механизма должны быть найдены значения критериев передачи (которые характеризуют качество передачи движения и сил в механизме, являясь при этом геометрическими параметрами, формируемыми только на базе параметров кинематической схемы механизма).

Как уже отмечалось в § 16.1, *кинематическая схема механизма* — это такая его структурная схема, на которой указаны размеры звеньев, необходимые для кинематического анализа механизма. Такие размеры — линейные и угловые — будем на-

зывать *постоянными параметрами* кинематической схемы механизма.

Введем также *переменные параметры* кинематической схемы механизма, к которым будем относить линейные или угловые величины, определяющие положения подвижных звеньев относительно стойки или относительно других подвижных звеньев.

Число и конкретный выбор постоянных и переменных параметров механизма зависят от принятого способа параметризации механизма и содержания задачи его кинематического анализа.

Рациональным считается такой способ параметризации, при котором все постоянные параметры механизма являются взаимно независимыми. При этом условии их число будет минимально возможным.

Среди переменных параметров механизма имеются *независимые* и *зависимые* параметры. Независимые переменные параметры называются также *обобщенными координатами механизма*, а их число W называется *числом степеней свободы механизма* (см. п. 16.3.1). В технике чаще всего встречаются одноподвижные механизмы, для которых $W = 1$.

В качестве обобщенной координаты механизма обычно принимается переменный параметр, определяющий положение входного звена относительно стойки (для механизмов первого типа) или определяющий относительное положение двух подвижных звеньев, образующих входную кинематическую пару (для механизмов второго типа).

Обобщенную координату рычажного механизма обозначим через q . Отметим, что $q = \varphi$ или $q = s$, где φ — относительное угловое, а s — относительное линейное перемещение двух звеньев, образующих входную пару. Если последняя относится к виду В, то $q = \varphi$; если же она относится к виду П, то $q = s$.

В четырехзвенном механизме с качающимися цилиндром (рис. 17.1) l_0, l_1, l_2, l_3 — постоянные параметры; $s, \varphi_1, \varphi_3, \mu$ — переменные параметры. Задано относительное перемещение s звена 2 по отношению к звену 1; поэтому s есть обобщенная координата механизма. Параметры $\varphi_1, \varphi_3, \mu$ являются

зависимыми переменными параметрами. Угол μ называется *углом передачи*.

В механизме, показанном на рис. 16.18 (груз 5 и звено 4 включены в состав механизма), постоянными являются величины $x_F, y_F, l_2, \Theta_2, a_2, l_3, \Theta_3, a_3, BG, AH, \xi_G, \eta_G = \eta_L, \xi_L$. К переменным параметрам относятся $s, \varphi_2, \varphi_3, \mu, x_C, y_C, \gamma, u$. Звено 1 является входным, а звено 5 (груз) — выходным. Задано перемещение s ползуна 1 по отношению к стойке 0, т.е. s есть обобщенная координата механизма. Все другие переменные параметры механизма являются зависимыми от s .

§ 17.2. ФУНКЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

17.2.1. Функция положения механизма

Функцией положения механизма называют зависимость координаты выходного звена от обобщенных координат механизма. Под координатой выходного звена здесь понимается переменный параметр, определяющий положение выходного звена относительно стойки. Если положение выходного звена относительно стойки определяется d координатами, то вводится d функций положения механизма (например, в случае плоскопараллельного движения выходного звена $d=3$).

В табл. 17.1 приведены функции положения для рычажных механизмов, показанных на рис. 17.1, 17.2, 17.3, 17.4 и 17.5.

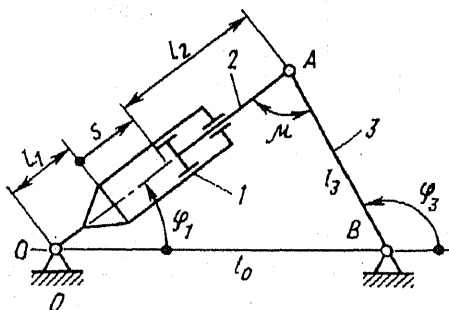


Рис. 17.1

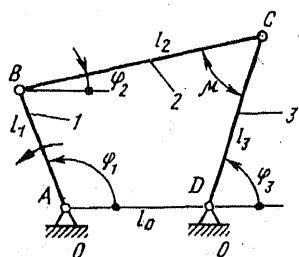


Рис. 17.2

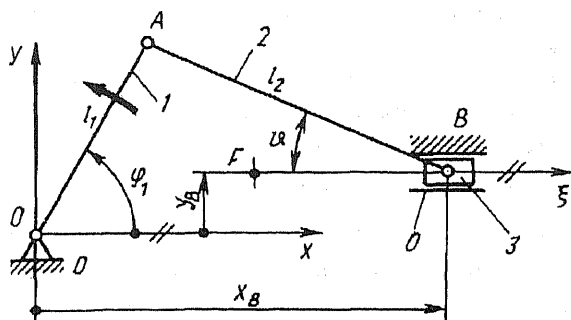


Рис. 17.3

В таблице приняты следующие обозначения: n — число звеньев механизма (включая стойку); W — число степеней свободы, $N_{\text{вых}}$ — номер выходного звена; d — число функций положения механизма.

Таблица 17.1

Схема механизма	n	W	Обобщенные координаты	$N_{\text{вых}}$	d	Функции положения механизма
Рис. 17.1	4	1	s	3	1	$\varphi_3(s)$
Рис. 17.2	4	1	φ_1	3	1	$\varphi_3(\varphi_1)$
Рис. 17.2	4	1	φ_1	2	3	$x_B(\varphi_1), y_B(\varphi_1), \varphi_2(\varphi_1)$
Рис. 17.3	4	1	φ_1	3	1	$x_B(\varphi_1)$
Рис. 17.4	6	1	φ_1	5	1	$\varphi_5(\varphi_1)$
Рис. 17.5	7	2	φ_1, φ_2	6	1	$\varphi_6(\varphi_1, \varphi_2)$

Наряду с функцией положения механизма (относящейся к выходному звену) вводятся в рассмотрение еще функции положения других подвижных звеньев, входящих в ведомую кинематическую цепь. Например, в шестизвенном механизме, пока-

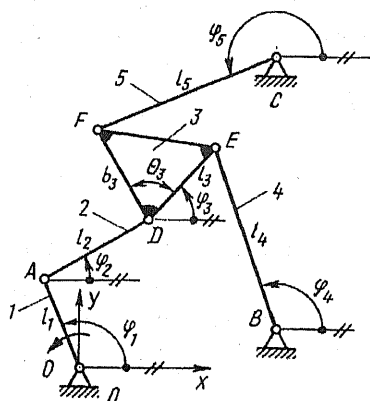


Рис. 17.4

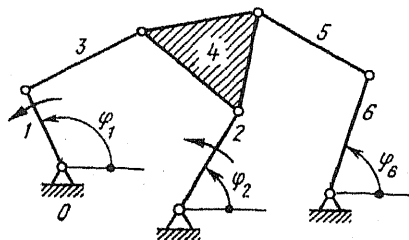


Рис. 17.5

занном на рис. 17.4, имеется четыре функции положения: $\varphi_2(\varphi_1)$, $\varphi_3(\varphi_1)$, $\varphi_4(\varphi_1)$ и $\varphi_5(\varphi_1)$; причем, $\varphi_5(\varphi_1)$ — это функция положения механизма, так как звено 5 — выходное.

17.2.2. Передаточные функции

Пусть q — обобщенная координата одноподвижного механизма, а $\varphi_i(q)$ — функция положения звена i . Введем в рассмотрение геометрические передаточные функции этого звена: первую передаточную функцию $\varphi'_i(q) = d\varphi_i/dq$ и вторую передаточную функцию $\varphi''_i(q) = d^2\varphi_i/dq^2$ ($i = 2, 3, \dots, n-1$). Если φ_i — угловая координата звена i , то первую и вторую передаточные функции этого звена называют также аналогом угловой скорости и аналогом углового ускорения звена i соответственно.

При помощи первой и второй передаточных функций можно определять угловые скорости и угловые ускорения звеньев механизма, а также скорости и ускорения отдельных точек этих звеньев при условии, что задан закон изменения $q = q(t)$ обобщенной координаты механизма как функции времени t .

В качестве примера найдем угловую скорость ω_3 и угловое ускорение ε_3 звена 3 шарнирного четырехзвенника (см. рис. 17.2):

$$\omega_3 = \dot{\phi}_3 = \phi'_3 \dot{\phi}_1 = \phi'_3 \omega_1; \quad (17.1)$$

$$\varepsilon_3 = \ddot{\phi}_3 = \phi''_3 \dot{\phi}_1^2 + \phi'_3 \ddot{\phi}_1 = \phi''_3 \omega_1^2 + \phi'_3 \varepsilon_1, \quad (17.2)$$

где ϕ_1 , $\omega_1 = \dot{\phi}_1$, $\varepsilon_1 = \ddot{\phi}_1$ — угловая координата, угловая скорость и угловое ускорение входного звена 1 (одна и две точки над буквой означают первую и вторую производные по времени). Закон движения $\phi_1 = \phi_1(t)$ входного звена 1 считается заданным.

Отметим важную особенность функций положения, а также первой и второй передаточных функций: все эти функции есть геометрические характеристики механизма, не зависящие от времени. Если же требуется найти закон движения звена i механизма, т.е. зависимость $\phi_i = \phi_i(t)$, то для этого нужно сначала получить функцию положения $\phi_i(q)$, а затем подставить в нее вместо q заданную зависимость $q = q(t)$.

Введем в рассмотрение еще два понятия. *Аналогом скорости и аналогом ускорения* точки какого-либо звена механизма называются соответственно первая и вторая производные радиус-вектора этой точки по обобщенной координате механизма.

§ 17.3. СБОРКИ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

17.3.1. Сборки механизма

При фиксированном относительном положении двух звеньев механизма, образующих входную пару (а значит, и при фиксированном значении обобщенной координаты q механизма) его звенья можно собрать, как правило, несколькими способами, т.е. существует несколько возможных *сборок механизма* заданной структуры при заданных значениях его постоянных параметров. Так, четырехзвенные механизмы (см. рис. 17.1, 17.2 и 17.3) имеют по две сборки, а шестизвенные механизмы первого класса (см. рис. 16.11, $a-d$) — по четыре сборки.

На рис. 17.6 показаны две возможные сборки шарнирного четырехзвенника. Первой сборке отвечает замкнутый контур ABC_1DA , а второй сборке — контур ABC_2DA . Из рисунка видно, что при фиксированных положениях внешних шарниров B и D диады, состоящей из звеньев 2 и 3, возможны два варианта ее сборки — BC_1D и BC_2D .

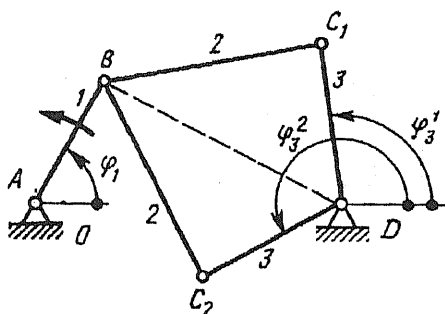


Рис. 17.6

На рис. 17.7 показаны две возможные сборки четырехзвенного механизма с качающимся цилиндром: OAB — первая сборка, $OA'B$ — вторая сборка.

На рис. 17.8 изображены две возможные сборки четырехзвенного ползунно-коромыслового механизма: ABC — первая сборка, $AB'C$ — вторая сборка. Наличие двухборок у данного механизма при каком-либо значении обобщенной координаты q обусловлено тем, что звенья 2 и 3 диады вида BVB , входящей в состав механизма, при фиксированных положениях внешних шарниров A и C диады могут быть собраны двумя способами.

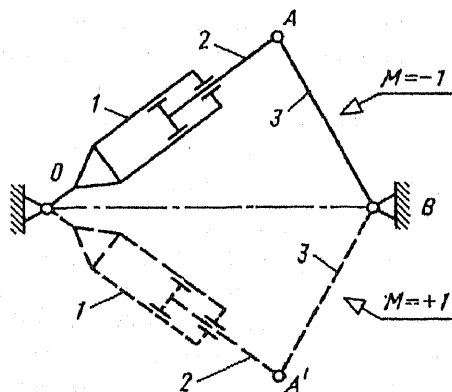


Рис. 17.7

Вопрос о сборках механизма обсудим далее на примере плоских рычажных механизмов с $W = 1$. Пусть рассматриваемый механизм существует при всех значениях обобщенной координаты q , принадлежащих отрезку $[A, B]$. Наличие несколькихборок механизма при любом $q \in [A, B]$ обусловлено тем, что звенья каждой из групп Ассура, входящих в его состав, при фиксированных положениях внешних кинематических пар груп-

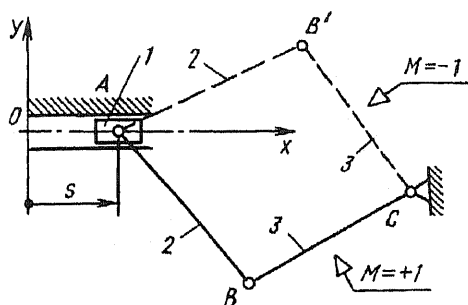


Рис. 17.8

та сборки (см. ниже), четырехзвенные группы с шестью вращательными парами могут иметь до шести вариантов сборки (см § 17.9) и т.д.

Пусть при некотором значении $q = q_* \in [A, B]$ механизм находится в какой-либо одной из своих сборок. Будем теперь обобщенную координату q непрерывно и монотонно изменять. Если при этом положения звеньев ведомой цепи механизма будут также непрерывно изменяться, то это означает, что механизм продолжает оставаться в той же сборке, в которой он находился при $q = q_*$.

Таким образом, термин «сборка» относится не только к определенному положению (из нескольких возможных положений) каждого из звеньев ведомой цепи механизма при фиксированном значении обобщенной координаты q , но и к множеству непрерывно изменяющихся положений звеньев ведомой цепи при непрерывном и монотонном изменении q в пределах некоторого отрезка.

На практике рычажные механизмы работают обычно в какой-либо одной из возможных сборок на всем заданном отрезке изменения обобщенной координаты q , не переходя в другую сборку. Поэтому в реальном механизме имеет место однозначное соответствие между значением обобщенной координаты q и положениями подвижных звеньев. В связи с этим отметим, что приведенное в § 16.1 определение понятия «кинематическая схема механизма» нуждается в некотором уточнении, если мы хотим его применить к реальному рычажному механизму: кроме структурной схемы и значений постоянных параметров, нужно еще указывать ту конкретную сборку, в которой будет дейст-

пы могут быть собраны двумя или более способами, т.е. существует два или более вариантов сборки группы. У двух разных вариантов сборки структурной группы положения всех или части внутренних пар, а значит, и звеньев, не совпадают. Так, двухзвенная группа Ассура вида ВВВ имеет два вариан-

зовать механизм. Если не сделать такого дополнения, то понятие «кинематическая схема» будет включать в себя все возможные сборки данного механизма.

17.3.2. Функции положения сборок механизма и области их существования

Отрезок $[A_r, B_r]$ изменения обобщенной координаты q , в пределах которого существует r -я сборка механизма, будем называть *областью существования* r -й сборки ($r = 1, 2, \dots, G$). Здесь G — общее число сборок механизма; r — порядковый номер сборки.

Пусть ψ — переменный параметр, определяющий положение выходного звена механизма. Зависимость $\psi = \psi_r(q)$, $A_r \leq q \leq B_r$, будем называть *функцией положения* r -й сборки механизма.

Отметим, что функции положения всех звеньев ведомой цепи механизма в какой-либо его сборке имеют ту же область определения (совпадающую с областью существования данной сборки), что и функция положения выходного звена.

Будем различать два типа сборок механизма. *Сборка первого типа* существует на ограниченном отрезке $[A_r, B_r]$ изменения обобщенной координаты q , а соответствующая ей функция положения $\psi_r(q)$ не является периодической функцией. *Сборка второго типа* существует при любых значениях обобщенной координаты q , а соответствующая ей функция положения $\psi_r(q)$ является периодической функцией.

У механизмов, входная пара которых является вращательной и, следовательно, $q = \varphi$, встречаются сборки как первого, так и второго типа. В случае, когда r -я сборка есть сборка первого типа, всегда выполняется условие: $B_r - A_r < 2\pi$. Если же r -я сборка относится ко второму типу, то функция $\psi_r(\varphi)$ существует при любых значениях аргумента φ и является периодической с периодом 2π . Поэтому, не умаляя общности, для сборки второго типа можно принять: $A_r = 0$, $B_r = 2\pi$.

У механизмов, входная пара которых является поступательной и, следовательно, $q = z$, могут быть сборки только первого типа.

Для рассматриваемого механизма введем следующие обозначения: G_1 и G_2 — число сборок первого и второго типа соответственно на некотором отрезке изменения обобщенной координаты q ($G = G_1 + G_2$; в частном случае может быть $G_1 = 0$ или $G_2 = 0$); H — число сборок при данном значении $q = q_*$ обобщенной координаты, а также на некотором отрезке изменения q , включающем значение $q = q_*$. Пусть $1, 2, \dots, G$ — порядковые номера отдельных сборок, причем первые G_1 номеров относятся к сборам первого типа, а последующие номера — к сборкам второго типа.

Число вариантов сборки группы Ассура обычно четное. Поэтому и число H вариантов сборки механизма при данном $q = q_*$ тоже обычно четное. Значение H зависит от q , т.е. $H = H(q)$. Если при некотором $q = q_*$ механизм не существует, то $H = 0$. Если $G_1 = 0$, то $H(q) \equiv G$ при любых q . В общем случае $H \leq G$. В области существования механизма всегда имеются такие интервалы изменения q , в пределах которых $H(q) \equiv \text{const}$.

На рис. 17.9 в качестве примера показаны графики функций положения выходного звена 5 шестизвального плоского шарнирного механизма второго класса (см. рис. 17.4) при определенных значениях его постоянных параметров для всех возможных его сборок. В данном случае $G_1 = 6$, $G_2 = 2$, $G = 8$. При изменении обобщенной координаты $q = \varphi_1$ от 0 до 2π встречаются участки, где число H вариантов сборки механизма равно 2, 4 или 6. Так, $H = 2$ при $0 \leq \varphi_1 \leq A_1$; $H = 4$ при $A_1 < \varphi_1 < A_3$; $H = 6$ при $A_3 < \varphi_1 < B_3$ и т.д.

На рис. 17.10 показаны графики функций положения $\psi = \psi(s)$ выходного звена 3 для всех возможных сборок ползунно-коромыслового четырехзвенника (см. рис. 17.8) при следующих значениях его постоянных параметров: $x_C = 12$, $y_C = -5$, $l_2 = 3$, $l_3 = 10$. В данном случае $G = 4$, а области существования сборок определяются неравенствами: а) $0 \leq s \leq 7,101$ — для сборок 1 и 2; б) $16,899 \leq s \leq 24$ — для сборок 3 и 4.

Остановимся еще на некоторых особенностях сборок первого типа. Левая граница A_r r -й сборки одновременно является

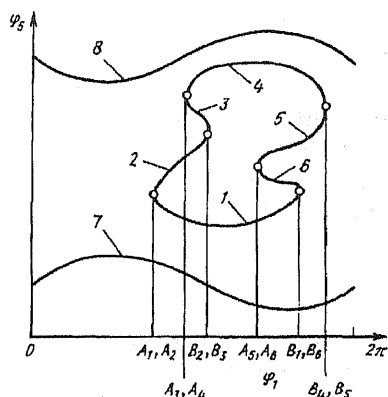


Рис. 17.9

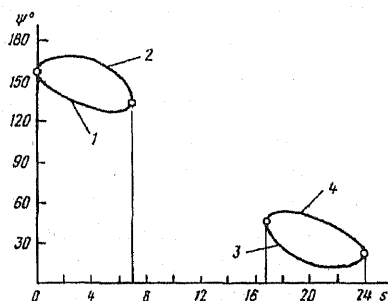


Рис. 17.10

левой границей A_g другой, g -й, сборки, а правая граница B_r r -й сборки одновременно является правой границей B_h другой, h -й, сборки (отметим, что $g = h$ или $g \neq h$).

Положение механизма, отвечающее общей границе двух сборок первого типа, будем называть *особым (мертвым) положением*, а соответствующее значение обобщенной координаты q — *особой (критической, мертвой) точкой*. Число критических точек равно числу сборок первого типа и обычно четное. В критических точках механизм имеет конфигурацию застопоривания.

Отметим, что термин «мертвое положение» может быть применен к указанному особому положению механизма лишь при условии, что движущее усилие приложено только к звену, образующему входную пару.

Функции положения сборок второго типа непрерывны вместе со своими производными любого порядка при всех $q \in [0, 2\pi]$. Что касается функций положения сборок первого типа, то они также непрерывны вместе со своими производными при всех $q \in (A_r, B_r)$, т.е. за исключением граничных точек области существования r -й сборки. При приближении q к A_r справа или к B_r слева значения первых производных функций положения звеньев ведомой цепи механизма по аргументу q неограниченно возрастают; на самой же границе касательная к

графику каждой из указанных функций становится вертикальной. Участки области существования сборки первого типа, достаточно близко примыкающие к ее границам, т.е. к критическим точкам, характеризуются неблагоприятными значениями критериев качества передачи движения и сил (см. § 17.4).

Отметим, что механизм при своем действии не может самопроизвольно перейти от данной сборки к другой сборке. Для того, чтобы перейти к другой сборке, нужно при фиксированном относительно положении двух звеньев, образующих входную пару, разъединить звенья механизма, по крайней мере, в одной кинематической паре и затем их вновь соединить, изменив сборку. В том случае, когда функции положения двух сборок не имеют ни одной общей точки (см., например, сборки 1 и 3 на рис. 17.10), невозможность самопроизвольного перехода к другой сборке очевидна. В случае же, когда две сборки первого типа имеют общую границу (см., например, сборки 1 и 2 на рис. 17.10), переход от одной сборки к другой через эту общую граничную точку невозможен по следующим причинам: во-первых, дальнейшее монотонное (в том же направлении) изменение обобщенной координаты q невозможно, поскольку за пределами критической точки обе сборки не существуют; во-вторых, для того, чтобы вывести механизм на границу сборки, т.е. в мертвое положение, пришлось бы приложить к входному звену бесконечно большую движущую силу (или движущий момент) при конечной силе сопротивления (или моменте сопротивления), приложенной к выходному звену (предполагается, что другие активные силы и моменты, кроме указанных выше, не действуют)*.

17.3.3. признаки вариантов сборки групп Ассура

Хотя механизм и имеет несколько сборок, но фактически он всегда работает, находясь в одной конкретной сборке. Поэтому актуальным является вопрос о введении каких-либо при-

* Здесь не рассматриваются частные виды механизмов со специально подобранными сочетаниями значений постоянных параметров (например, механизм шарнирного параллелограмма), у которого переход к другой сборке возможен за счет использования динамических эффектов (например, инерционных сил и моментов).

знаков, с помощью которых можно было бы отличать одну сборку от другой. Наличие таких признаков необходимо как при анализе, так и при синтезе механизма.

Выше было отмечено, что вариант сборки механизма при данном положении входного звена определяется вариантами сборки группы Ассура, входящих в состав механизма. Поэтому сначала рассмотрим вопрос о признаках вариантов сборки группы Ассура.

Существует пять модификаций двухзвенной плоской структурной группы (диады): ВВВ, ВВП, ВПВ, ВПП и ПВП (см. п. 16.4.2, рис. 16.8). Группы ВВВ, ВВП и ВПВ имеют по два варианта сборки (рис. 17.11 — 17.13) в общем

случае и только при особых положениях звеньев один вариант сборки. Группы ВПП и ПВП имеют один вариант сборки.

Указанные особые положения звеньев групп ВВВ (рис. 17.11), ВВП (рис. 17.12) и ВПВ (рис. 17.13) следующие: 1) точки A , B и C лежат на одной прямой — для группы ВВВ;

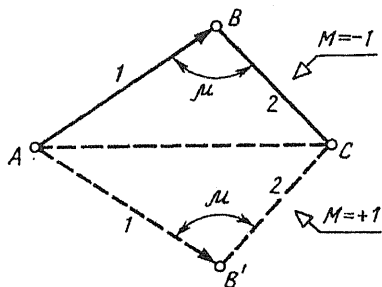


Рис. 17.11

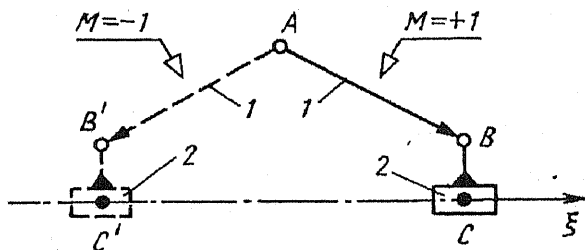


Рис. 17.12

2) $AB \perp \xi$ для группы ВВП; 3) $BD = 0$ — для группы ВПВ. Если в составе механизма имеются структурные группы ВВВ, ВВП или ВПВ, то звенья этих групп не должны оказываться в особых положениях на всем заданном отрезке изменения обобщенной координаты q ; в противном случае механизм будет неработоспособным, поскольку при особом положении звеньев группы достигается мертвое положение механизма.

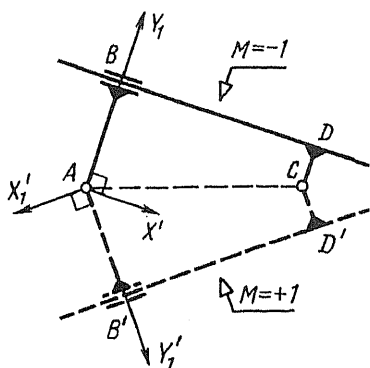


Рис. 17.13

Заметим, что группа ВПВ имеет один вариант сборки не только в указанном выше особом положении, но также и в том случае, когда $AB = CD = 0$ (это условие относится к размерам звеньев, а не к особым их положениям).

Для групп ВВВ, ВВП и ВПВ введем следующие *признаки* (числовые показатели) M варианта сборки:

1) для групп ВВВ и ВПВ

$$M = \text{sign} [M_C(u)] = \text{sign} [(\vec{CA} \times u) \cdot k]; \quad (17.3)$$

2) для группы ВВП

$$M = \text{sign} |(\vec{AB})_\xi| = \text{sign} |(\vec{AB} \cdot \xi^0)|, \quad (17.4)$$

где $u = \vec{AB}$ — для группы ВВВ и $u = Y_1^0$ — для группы ВПВ Y_1^0 есть орт оси Y_1 , неизменно связанной со звеном 1, проходящей через точку A и направленной перпендикулярно оси внутренней поступательной пары группы ВПВ); $M_C(u)$ — момент вектора u относительно точки C (алгебраическое значение); $(\vec{AB})_\xi$ — проекция вектора $\vec{AB}$ на ось ξ ; k и ξ^0 — орты осей z и ξ (ось z перпендикулярна плоскости чертежа и направлена к нам; ось z и орт k на рис. 17.11 и 17.13 не показаны); sign — функция-сигнум, т.е. знак величины, являющейся аргументом этой функции. Правило выбора знака момента $M_C(u)$ такое: если поворот вектора u вокруг точки C виден происходящим против часовой стрелки, то $M_C(u) > 0$, в противном случае $M_C(u) < 0$.

Отсюда видно, что при отсутствии особых положений звеньев группы признак M принимает значения $+1$ или -1 . На рис. 17.11 — 17.13 изображены оба варианта сборки групп ВВВ, ВВП и ВПВ с указанием значения M для каждой из них. При особых положениях звеньев группы получаем:

$M = 0$, так как $M_C(u) = 0$ — для групп ВВВ и ВПВ или $(\overrightarrow{AB})_\xi = 0$ — для группы ВПВ.

Важно отметить, что числовой показатель M является структурным, а не метрическим признаком группы, поскольку он инвариантен по отношению к метрическим (геометрическим) параметрам звеньев группы.

Что касается плоских групп Ассура с числом звеньев 4, 6 и более, то число их вариантов сборки при фиксированных положениях внешних пар (точнее — элементов внешних пар, принадлежащих тем звеньям механизма, к которым присоединяются звенья данной группы Ассура) может быть достаточно большим. Например, как будет показано в § 17.9, число вариантов сборки четырехзвенных плоских групп Ассура (см. рис. 16.9) может достигать шести. Однако для большинства групп Ассура с числом звеньев 4 и более пока не найден структурный признак, аналогичный признаку M для двухзвенных групп, который позволял бы отличать один вариант сборки от другого.

17.3.4. Признаки сборки рычажных механизмов

Если для каждой из структурных групп, входящих в состав механизма, указать вариант сборки, то тем самым будет однозначно определен и вариант сборки механизма при данном значении обобщенной координаты q . Отсюда следует, что для плоских механизмов первого класса, состоящих из диад, при задании варианта сборки необходимо указать набор значений признаков M_k ($k = 1, 2, \dots, m$) вариантов сборки отдельных диад, где k — порядковый номер диады, m — число диад.

На рис. 17.14 показан шестизвенный механизм первого класса. Для данного механизма $m = 2$. Стойка и входное звено имеют номера 0 и 1 соответственно. Звенья 2 и 3 образуют диаду 1, а звенья 4 и 5 — диаду 2. Определим значения признаков M_1 и M_2 , характеризующих сборку данного механизма. Находим: $M_{C_1}(A_1\overrightarrow{B_1}) < 0$, $(A_2\overrightarrow{B_2})_\xi > 0$. На основании формул (17.3) и (17.4) получаем: $M_1 = -1$, $M_2 = +1$.

В качестве признаков, определяющих сборку механизма первого класса во всей области ее существования, могут быть использованы те же самые признаки M_k ($k = 1, 2, \dots, m$), ко-

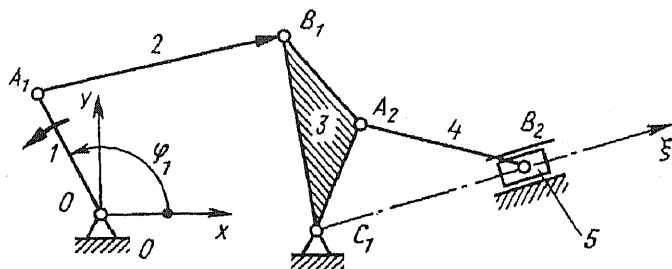


Рис. 17.14

торые устанавливают вариант сборки механизма при данном q . Дело в том, что внутри области существования каждой сборки механизма отсутствуют мертвые положения, а значит, отсутствуют особые положения звеньев диад, о которых упоминалось ранее. Отсюда следует, что признак M_k варианта сборки каждой диады при любых перемещениях внешних пар диады не должен обратиться в нуль, т.е. должен сохранить неизменным свое значение $+1$ или -1 .

Таким образом, каждой сборке плоского механизма первого класса соответствует вполне определенный набор значений признаков M_k ($k = 1, 2, \dots, m$) при любых значениях обобщенной координаты q из области существования данной сборки. Значения M_k входят непосредственно в формулы анализа механизма первого класса (этот вопрос будет рассмотрен в § 17.10).

Рассмотрим теперь механизмы, содержащие такую структурную группу, для которой не найден структурный признак, аналогичный признаку M для двухзвенной группы. Для таких механизмов не представляется возможным ввести какой-либо числовой критерий или набор критериев, с помощью которых можно было бы однозначно выделить конкретную сборку среди всех возможныхборок исследуемого механизма. При анализе на ЭВМ конкретной сборки какого-либо из таких механизмов необходимо иметь априорную информацию об искомой функции положения этой сборки, которая и будет служить своеобразным признаком, выделяющим данную сборку среди другихборок.

§ 17.4. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ПЕРЕДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

На каждом из этапов исследования или проектирования рычажного механизма используются определенные критерии для оценки его работоспособности. Здесь мы рассмотрим критерии работоспособности, сферой действия которых является этап кинематического анализа или кинематического синтеза механизма. Указанные критерии будем называть *критериями качества передачи движения*, или сокращенно — *критериями передачи*.

17.4.1. Угол давления и угол передачи

В теории механизмов и в инженерной практике в качестве критерия передачи широко используют такой геометрический параметр, как *угол давления*. Углом давления ϑ называют острый угол между направлением силы давления (нормальной реакции) R_{ik} на звено k со стороны смежного звена i и скоростью v точки приложения этой силы.

В кривошипно-ползунном механизме (см. рис. 17.3) угол давления ϑ определяется в шарнире В как острый угол между реакцией R_{23} (считается, что она направлена по отрезку АВ) и скоростью v_B . В шестизвенном плоском шарнирном механизме, показанном на рис. 17.15, вводится два угла давления — ϑ_C (угол между R_{23} и v_C) и ϑ_F (угол между R_{45} и v_F).

Угол давления характеризует в известной мере условия передачи сил в реальном механизме, но в то же время является чисто геометрическим критерием, действующим на уровне кинематической схемы. При нахождении угла давления силовой анализ механизма не производится. Поэтому сфера применения угла давления как критерия передачи в рычажных механизмах является ограниченной. Угол давления в кинематической паре, образуемой звеньями i и k , определяется обычно при условии, что эта пара является вращательной, звено i является двухпарным и образует две вращательных пары со смежными звеньями, а звено k образует вращательную или поступательную пару со стойкой. В этом случае после определения положений звеньев i и k механизма легко устанавливаются направления векторов

R_{ik} и v (вектор R_{ik} считается направленным вдоль продольной оси звена i , проходящей через центры двух его пар). Из сказанного следует, что, например, для шестизвенного механизма, приведенного на рис. 17.4, не представляется возможным найти углы давления в шарнирах E и F , так как звено 3 является трехпарным.

Наряду с углом давления в плоских шарнирных механизмах первого класса используют также другой критерий передачи — угол передачи. Углом передачи называют угол μ между двумя звеньями диады вида ВВВ (см. рис. 17.11). Угол μ может принимать значения от 0 до π , причем $\mu = 0$ или $\mu = \pi$ только при особых положениях звеньев диады (см. п. 17.3.3), т.е. в мертвых положениях механизма.

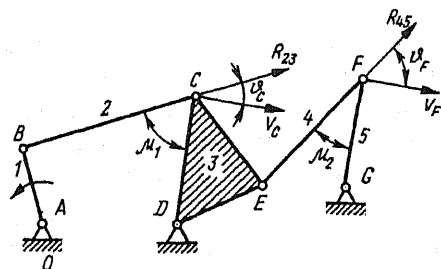


Рис. 17.15

На рис. 17.2 показан угол передачи μ в шарнирном четырехзвеннике. Для шестизвенного механизма, приведенного на рис. 17.15, вводится два угла передачи — μ_1 и μ_2 (в каждой из двух диад).

Отметим, что в тех случаях, когда в механизме может быть найден и угол давления

ϑ и угол передачи μ , между ними существует такое соотношение:

$$\vartheta = |\mu - 0,5\pi|. \quad (17.5)$$

Передача движения от ведущего (входного) звена к ведомым звеньям механизма считается благоприятной, если угол давления ϑ на всем диапазоне изменения обобщенной координаты q удовлетворяет условию

$$\vartheta(q) \leq \vartheta_d. \quad (17.6)$$

Аналогичное требование накладывается и на угол передачи:

$$\mu_d \leq \mu(q) \leq \pi - \mu_d. \quad (17.7)$$

Здесь ϑ_d и μ_d — допускаемые значения угла давления и угла передачи. Их величина устанавливается, исходя из конкретных условий работы механизма. Например, угол ϑ_d часто берут в пределах от 30 до 45°, а угол μ_d — в пределах от 45 до 60°.

17.4.2. Критерий передачи

Как уже отмечалось, угол давления ϑ или угол передачи μ может быть найден только для ограниченного набора структурных схем рычажных механизмов. Но и для этих механизмов углы ϑ и μ не всегда достоверно информируют о качестве передачи движения. Между тем, могут быть получены такие критерии передачи, которые, во-первых, являются более объективными показателями качества механизма (на уровне его кинематической схемы) и, во-вторых, применимы для любых рычажных механизмов.

Здесь мы введем только один критерий к указанного типа. Он может быть использован для одноподвижных плоских рычажных механизмов. Критерий k выражается формулой

$$k = Q_c / R, \quad (17.8)$$

где Q_c — модуль условной силы сопротивления Q_c ; R — максимальный из модулей реакций в кинематических парах механизма*.

Условная сила сопротивления Q_c прикладывается к выходному звену, и ее направление устанавливается в зависимости от характера движения выходного звена. Если выходное звено образует поступательную пару со стойкой, т.е. является ползуном, то сила Q_c направляется вдоль оси движения ползуна. Если выходное звено образует вращательную пару со стойкой, т.е. является коромыслом или кривошипом, то сила Q_c — это одна из сил пары (Q_c, Q_c') с моментом M_c , причем, $Q_c = M_c / d$, где M_c — условный момент сопротивления, d — плечо пары

* Речь идет не о фактически действующих на звенья механизма активных силах и реакциях связей, а о некоторой условной системе сил, вводимой в рассмотрение только в связи с расчетом критерия передачи.

сил, равное длине выходного звена. Если выходное звено совершает плоскопараллельное движение, то направление (точнее — линия действия) силы Q_c назначается с возможно более полным учетом реальных сил, приложенных к выходному звену исследуемого или проектируемого рычажного механизма. Что касается модуля силы Q_c (или величины момента M_c), то он назначается произвольно.

При определении реакций R_{ik} в кинематических парах механизма (i и k — номера звеньев, образующих кинематические пары) принимаются следующие допущения:

1) в качестве механизма рассматривается его кинематическая схема;

2) к звеньям механизма прикладывается унифицированная система активных сил;

3) при расчете реакций R_{ik} считается, что все подвижные звенья механизма находятся в равновесии при любом значении обобщенной координаты q механизма из заданного промежутка ее изменения, а силы трения отсутствуют.

Указанная выше унифицированная система активных сил включает в себя силу сопротивления Q_c или момент сопротивления M_c (о них уже говорилось ранее) и уравнивающую силу $Q_{ур}$ или уравнивающий момент $M_{ур}$.

Выбор звена, к которому приложена сила $Q_{ур}$ или момент $M_{ур}$, а также направление вектора $Q_{ур}$, зависит от двух факторов: от типа рычажного механизма (первый или второй — см. п. 16.2.5); от вида входной пары (В или П). При этом возможны четыре случая, отвечающих различным сочетаниям двух указанных факторов. Они отображены на рис. 17.16, $a—г$, где показаны два звена, образующих входную пару, а именно: стойка 0 и входное звено 1 — для механизмов первого типа (рис. 17.16, $a, б$), подвижные звенья 1 и 2 — для механизмов второго типа (рис. 17.16, $в, г$).

При статическом анализе сил, действующих на подвижные звенья механизма, вектор Q_c (или момент M_c) считается заданным, а неизвестными являются модуль вектора $Q_{ур}$ (или момент $M_{ур}$) и реакции в кинематических парах. Общее число неизвестных (в пересчете на скалярные величины) равно

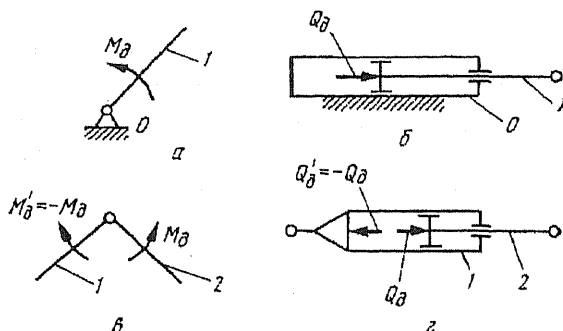


Рис. 17.16

$2p + 1$, где p — число кинематических пар в механизме. При этом для каждой кинематической пары вида В или П нужно найти два неизвестных, а именно: а) для пары вида В — R_{ik}^x и R_{ik}^y , б) для пары вида П — R_{ik} и M_{ik}^A . Здесь: R_{ik}^x и R_{ik}^y — проекции реакции R_{ik} в паре вида В на оси неподвижной системы координат Oxy ; R_{ik} и M_{ik}^A — модуль главного вектора R_{ik} и главный момент относительно точки А реакций в паре вида П (точка А лежит на оси относительного перемещения двух звеньев, образующих данную пару). Отметим, что главный вектор R_{ik} реакций в паре вида П направлен перпендикулярно указанной оси.

Число уравнений равновесия $n - 1$ подвижных звеньев плоского рычажного механизма равно $3(n - 1)$. В соответствии с формулой (16.6) для одноподвижного механизма получаем: $W = 3(n - 1) - 2p = 1$. Отсюда следует, что $3(n - 1) = 2p + 1$, т.е. число уравнений равновесия совпадает с числом неизвестных.

17.4.3. Методика расчета критерия передачи

Расчет значения критерия передачи к при некотором значении обобщенной координаты q механизма выполняется в такой последовательности:

- 1) определяют положения подвижных звеньев механизма;
- 2) прикладывают к входному и выходному звеньям механизма указанную выше унифицированную систему активных сил (или моментов);

3) составляют уравнения равновесия каждого из подвижных звеньев механизма, учитывая упомянутые активные силы и моменты и реакции в кинематических парах;

4) решают полученную линейную систему уравнений равновесия относительно неизвестных, перечень которых был указан в п. 17.4.2 (обычно эта система уравнений разделяется на несколько простых подсистем, что упрощает ее решение);

5) находят модули R_{ik} реакций R_{ik} в кинематических парах, а также величину R , равную наибольшему из этих модулей;

6) вычисляют k по формуле (17.8).

Все найденные в результате расчета величины ($Q_{ур}$, $M_{ур}$, R_{ik}^x , R_{ik}^y , R_{ik} , M_{ik}^A , R) всегда получаются прямо пропорциональными Q_c или M_c . Отсюда следует, что при подсчете k по формуле (17.8) Q_c сократится. Следовательно, критерий передачи k , характеризующий относительный уровень реакций в кинематических парах механизма, в то же время непосредственно не зависит от сил и моментов. Он имеет чисто геометрическую природу и зависит только от параметров кинематической схемы механизма.

Отметим, что описываемый здесь статический анализ сил, выполняемый при указанных в данном параграфе допущениях, предназначен исключительно для получения критерия передачи k и не заменяет силового (статического или кинетостатического) анализа механизма, который производится на одном из последующих этапов его проектирования.

Применение уравнений статики при расчете величины R , фигурирующей в знаменателе формулы (17.8) для критерия k , не означает, что этот критерий адекватно отображает качество передачи сил только для тихоходных механизмов, при силовом анализе которых можно пренебречь инерционными нагрузками. Дело в том, что критерий передачи k характеризует лишь относительный, а не абсолютный уровень реакций в кинематических парах. При использовании уравнений кинетостатики вместо уравнений статики возрастает абсолютный уровень реакций, но их относительный уровень часто изменяется лишь незначительно (по отношению к возросшему абсолютному уров-

ню задаваемых сил, в состав которых включаются силы инерции звеньев).

Расчет критерия передачи k должен быть произведен для ряда последовательных значений обобщенной координаты q из заданного промежутка. В результате будет получена *критериальная функция* $k = k(q)$ в табличной форме.

Нетрудно показать, что всегда $R \geq Q_c$. Поэтому критериальная функция $k(q)$ может принимать любые неотрицательные значения в пределах от 0 до 1. При этом наиболее благоприятное значение критерия k равно 1, а самое неблагоприятное — равно 0. Значение $k = 0$ достигается в мертвом положении механизма, т.е. на границе данной сборки первого типа (см. п. 17.3.2). Если механизм находится вблизи мертвого положения, то значения k близки нулю.

17.4.4. Проверка качества передачи движения

При анализе или синтезе механизма необходимо проверять условие

$$k(q) \geq k_d \quad \text{при всех } q \in [A, B], \quad (17.9)$$

где k_d — минимально допустимое значение критерия k ; $[A, B]$ — заданный отрезок изменения обобщенной координаты q .

Если ввести в рассмотрение углы ϑ и ϑ_d такие, что $\vartheta = k$ и $\cos \vartheta_d = k_d$, то условие (17.9) можно записать в виде $\vartheta \leq \vartheta_d$, что совпадает с условием (17.6). Следовательно, критерий передачи k можно трактовать как косинус некоторого угла давления ϑ , а k_d — как косинус максимально допустимого угла давления ϑ_d . Для многих механизмов такой искусственно введенный угол давления ϑ имеет абстрактный смысл, т.е. на кинематической схеме механизма ему не соответствует какой-либо конкретный угол. В то же время равенство $\vartheta_d = k_d$ позволяет обоснованно выбирать значение k_d . Например, если принято $\vartheta_d = 45^\circ$, то тогда получаем $k_d = \cos 45^\circ = 0,707$.

Для плоских рычажных механизмов рассмотренной выше структуры, как правило, не требуется другого критерия пере-

дачи, кроме критерия k . Что касается рычажных механизмов иной структуры, как плоских, так и пространственных, то для них могут быть построены соответствующие критерии передачи, причем, для многих из этих механизмов чаще всего приходится вводить по несколько критериев передачи, включая критерий k . Но принцип их формирования остается таким же, как и при получении критерия k .

Использование описанного критерия передачи открывает возможность оценки работоспособности различных структурно-параметрических вариантов рычажных механизмов, формируемых в процессе их кинематического синтеза, что особенно важно при оптимизационном синтезе (вопрос будет рассмотрен в главе 18).

Учет критерия передачи на стадии кинематического синтеза не гарантирует получения работоспособного механизма после его конструктивной реализации, но создает необходимые предпосылки для этого. При неблагоприятном значении этого критерия практически невозможно компенсировать недостатки кинематической схемы средствами, доступными на стадии конструирования, и создать работоспособный механизм. В свою очередь, при разработке конструкции механизма появляется возможность вводить новые критерии работоспособности (например, коэффициент полезного действия и др.).

По величине критерия передачи можно судить не только о качестве передачи движения и сил в механизме, но и о степени удаленности от опасной зоны, примыкающей к границам области существования сборки, в которой все качественные характеристики механизма (первые и вторые передаточные функции, чувствительность функций положения звеньев к погрешностям в значениях постоянных параметров механизма и др.) становятся неблагоприятными.

§ 17.5. ЗАДАЧИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Сформулируем характерные задачи кинематического анализа одноподвижных плоских рычажных механизмов.

Задача № 1. При заданном значении обобщенной координаты q механизма и для определенной его сборки установить, существует ли эта сборка; если сборка существует, то найти

следующие величины (список I): положения звеньев ведомой цепи (см. пп. 16.4.1 и 16.4.4) по отношению к стойке, координаты отдельных точек этих звеньев, значения критериев передачи движения, значения аналогов угловых скоростей и угловых ускорений звеньев ведомой цепи, значения аналогов скоростей и ускорений отдельных точек этих звеньев.

Задача № 2. При заданном значении q найти число H всех возможных вариантов сборки механизма; если $H > 0$, то в каждом из вариантов сборки определить величины, указанные в списке I (см. задачу № 1).

Задача № 3. На заданном отрезке $[A, B]$ измерения обобщенной координаты q механизма для одной определенной его сборки установить, принадлежит ли отрезок $[A, B]$ области существования данной сборки, и если принадлежит, то получить следующие функции (список II): функции положения звеньев ведомой цепи механизма, траектории отдельных точек этих звеньев, зависимости критериев передачи от q , зависимости аналогов угловой скорости и углового ускорения звеньев от q , зависимости аналогов скоростей и ускорений отдельных точек этих звеньев от q .

Обычно функции (зависимости) и траектории точек, указанные в списке II, определяются в табличной форме, т.е. для ряда последовательных значений q , принадлежащих отрезку $[A, B]$.

Возможен другой вариант постановки задачи № 3: требуется найти область существования (по параметру q) рассматриваемой сборки и в этой области получить функции, указанные в списке II.

Задача № 4. Найти общее число G сборок механизма; выявить среди них сборки первого и второго типов (см. п. 17.3.2) и установить число тех и других; определить области существования (по параметру q) сборок первого типа; получить для всех найденных сборок функции, перечисленные в списке II (см. задачу № 3).

На практике при решении сформулированных выше задач обычно не требуется определять весь набор величин или функций, фигурирующих в списках I и II. Но требование найти положения звеньев при данном q или функции положения звеньев всегда содержится в задаче анализа механизма, так как

все другие названные в списках I и II величины или функции могут быть найдены лишь после решения задачи о положениях.

При помощи аналогов угловых и линейных скоростей и ускорений можно определить угловые скорости и угловые ускорения звеньев механизма, а также скорости и ускорения отдельных точек этих звеньев, при условии, что задан закон изменения $q = q(t)$ обобщенной координаты q в функции времени t . Например, угловая скорость $\dot{\varphi}_i$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}_i$ звена i вычисляются по формулам (здесь предполагается, что угловая координата φ_i звена i отсчитывается от неподвижной оси):

$$\dot{\varphi}_i = \varphi_i' \dot{q}, \quad \ddot{\varphi}_i = \varphi_i'' \dot{q}^2 + \varphi_i' \ddot{q}, \quad (17.10)$$

где $\varphi_i' = d\varphi_i/dq$, $\varphi_i'' = d^2\varphi_i/dq^2$ — аналоги угловой скорости и углового ускорения звена i .

§ 17.6. ПОГРУППНЫЙ СПОСОБ АНАЛИЗА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

17.6.1. Принцип кинематического исследования

Методы решения сформулированных в § 17.5 задач рычажных механизмов по способу реализации разделяются на графические, графоаналитические и аналитические. Мы будем рассматривать только аналитические методы (относя к ним и численные методы). Эти методы ориентированы на использование вычислительной техники, поскольку кинематический анализ рычажных механизмов сопряжен с большим объемом вычислений.

Для того, чтобы выполнить анализ рычажного механизма с получением конкретных численных результатов, необходимо иметь алгоритм анализа и в случае применения ЭВМ — соответствующую программу. Процесс разработки указанного алгоритма включает в себя ряд этапов. Каждому из них в теории механизмов соответствует своя группа методов.

Огромное многообразие структурных схем плоских и пространственных рычажных механизмов обуславливает и большое разнообразие методов их кинематического анализа. К тому же и сам термин «метод кинематического анализа рычажного механизма» имеет довольно широкое толкование, так как в одних

случаях он относится к выбранному общему подходу или принципу, используемому при анализе механизма, в других случаях — к математическому аппарату, с помощью которого может быть составлена исходная система уравнений анализа, в третьих — к алгоритму решения какого-либо этапа задачи анализа и т.д.

Остановимся далее на общем подходе к анализу рычажных механизмов. Наиболее рациональный принцип кинематического исследования рычажного механизма — это последовательный анализ структурных групп (групп Ассура), входящих в его состав, в порядке их присоединения при образовании структурной схемы механизма. Такой принцип называют *погруппным способом анализа механизма*.

При применении погруппного способа задача анализа механизма сводится к серии задач анализа отдельных структурных групп, входящих в состав механизма. Алгоритм анализа любого рычажного механизма можно составить, формируя его из отдельных унифицированных блоков (модулей), каждый из которых содержит алгоритм какой-либо структурной группы. Предварительно необходимо разработать алгоритмы анализа различных структурных групп. Такой подход существенно упрощает процедуру анализа, так как, например, число плоских групп Ассура, встречающихся в схемах плоских механизмов, невелико (см. п. 16.4.2), а число различных структурных схем плоских механизмов, получаемых из этих групп, весьма большое.

Погруппный способ кинематического анализа рычажных механизмов хорошо согласуется с аналогичным принципом в их структурном анализе (см. § 16.4 и п. 16.5.1), т.е. в данном случае можно говорить о методологическом единстве структурного и кинематического анализа рычажных механизмов.

17.6.2. Применение погруппного способа для механизмов первого и второго типа

Реализация погруппного способа анализа имеет некоторые особенности в зависимости от типа рычажного механизма (см. п. 16.2.5).

В механизмах первого типа анализу структурных групп предшествует анализ входного звена при данном значении обоб-

щенной координаты механизма. Например, для механизма, приведенного на рис. 16.18, задача о положении выходного звена 5 при заданном значении обобщенной координаты z решается в такой последовательности: 1) анализ положения входного звена 1 (расчет координат x и y шарнира D); 2) анализ диады вида ВВВ, состоящей из звеньев 2 и 3, в результате чего определяются координаты x и y шарниров A и B ; 3) анализ диады вида ВПВ, состоящей из звеньев 4 и 5, в результате чего определяются обобщенные координаты x_C , y_C , γ звена 5.

При выполнении кинематического анализа рычажных механизмов второго типа на основе погруппного способа необходимо учитывать особенности применения модифицированного принципа Ассура, описанного в п. 16.4.4.

Рассмотрим применение погруппного способа к рычажным механизмам второго типа с поступательной входной парой, образованной звеньями 1 и 2, т.е. цилиндром и поршнем, на примере трех шестизвенных механизмов, показанных на рис. 16.12 + 16.14. Пусть требуется определить положения звеньев указанных механизмов при заданном значении относительного перемещения z поршня 2 по отношению к цилиндру 1.

Структурный анализ трех рассматриваемых схем, выполненный в п. 16.4.4., показал, что на рис. 16.12 приведен механизм первого рода первого класса, на рис. 16.13 — механизм первого рода второго класса, на рис. 16.14 — механизм второго рода первого класса.

Анализ положений звеньев механизмов начинаем с определения по данному z длины l_y условного звена $У$ по формуле (16.10). Затем находим положения звеньев $У$, 3, 4 и 5 ведомой цепи в неподвижной системе координат Oxy на основе погруппного способа анализа.

Для механизмов второго типа первого рода расчет положений звеньев групп Ассура, входящих в ведомую цепь, производится так же, как и для рычажных механизмов первого типа. Например, в механизме, показанном на рис. 16.12, сначала определяются положения звеньев $У$ и 3 первой диады, а затем положения звеньев 4 и 5 второй диады. В механизме, показанном на рис. 16.13, положения звеньев $У$, 3, 4 и 5, образующих четырехзвенную группу Ассура второго порядка, определяются по алгоритму, изложенному в § 17.9.

Что касается механизмов второго типа второго рода, то для них методика применения погруппного способа анализа имеет существенные отличия. Так, для механизма, показанного на рис. 16.14, задача о положениях звеньев (после определения l_y по данному s) решается в такой последовательности:

1) найти положения звеньев 3 и 4 первой дады в подвижной системе координат Ax_1y_1 , неизменно связанной с условным звеном $У$;

2) вычислить координаты точек C и D в системе Ax_1y_1 и найти длину $l_\Phi = CD$ фиктивного звена Φ ;

3) по значениям длин l_Φ и DE звеньев Φ и 5 второй диады и по известным координатам оцор C и E в неподвижной системе Oxy определить положения этих звеньев и координаты точки D в системе Oxy ;

4) по известным значениям координат точек C и D в системах Ax_1y_1 и Oxy найти положение системы Ax_1y_1 , а также звеньев $У$, 3 и 4, в неподвижной системе координат Oxy .

Отметим, что длина l_Φ фиктивного звена Φ , как и длина l_y условного звена $У$, является переменной, так как она зависит от обобщенной координаты s механизма.

Единый принцип структурной классификации плоских рычажных механизмов первого и второго типов позволяет применять идентичные методы при решении задачи о положениях звеньев групп Ассура и механизмов. Что касается задачи о скоростях и ускорениях, то при ее решении для механизмов второго типа нужно учитывать такую особенность, как переменность длины l_y условного звена $У$ и длины l_Φ фиктивного звена Φ .

17.6.3. Две задачи кинематического анализа структурных групп

Сформулируем две характерные задачи кинематического анализа структурных групп, которые непосредственно следуют из задач 1 и 2 кинематического анализа рычажных механизмов (см. § 17.5).

Задача № 1 Г Р. При заданных положениях, скоростях и ускорениях (или их аналогов) элементов внешних пар группы

Ассура и для одного определенного варианта сборки группы установить, существует ли этот вариант сборки; если он существует, то найти положения звеньев группы, координаты отдельных точек этих звеньев, значение критерия передачи (если таковой существует для данной группы), угловые скорости и угловые ускорения звеньев, скорости и ускорения отдельных точек этих звеньев (или их аналоги).

З а д а ч и № 2 Г Р. При заданных положениях, скоростях и ускорениях (или их аналогов) элементов внешних пар группы Ассура найти число H всех возможных ее вариантов сборки; если $H > 0$, то в каждом из вариантов сборки определить величины, указанные в задаче № 1 ГР.

Под элементом внешней пары группы Ассура здесь подразумевается или центр шарнира (если внешняя пара является вращательной, т.е. шарниром), или ось поступательной пары, принадлежащая тому звену механизма, с которым группа образует данную пару (если внешняя пара является поступательной).

На практике при решении двух сформулированных выше задач обычно не требуется определять весь набор указанных величин. Алгоритмы анализа двухзвенных и четырехзвенных плоских групп Ассура будут изложены в § 17.8 и § 17.9.

Погруппный способ анализа рычажных механизмов имеет еще одно важное достоинство: он позволяет разрабатывать единый алгоритм анализа для некоторого множества механизмов, объединенных общими структурными признаками, вместо разработки большого числа алгоритмов, каждый из которых предназначен для анализа того или иного механизма из указанного множества. Например, может быть разработан единый алгоритм анализа всех плоских рычажных механизмов первого класса, к которым относится подавляющее большинство рычажных механизмов, встречающихся в конструкциях машин (этот алгоритм будет изложен в § 17.10).

§ 17.7. АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ ПРОЕКЦИРОВАНИЯ ЗАМКНУТЫХ ВЕКТОРНЫХ КОНТУРОВ НА ОСИ КООРДИНАТ

17.7.1. Задача о положениях звеньев

Определение положений звеньев — это наиболее важная часть задачи анализа рычажного механизма или структурной группы. Она фигурирует в условии любой задачи кинематиче-

ского анализа (см. § 17.5, задачи № 1, № 2, № 3 и № 4 для механизма, а также п. 17.6.3, задачи № 1ГР и № 2ГР для структурной группы).

Первым этапом решения задачи о положениях звеньев является составление исходной системы уравнений анализа, связывающих постоянные и переменные параметры механизма. Применительно к плоским рычажным механизмам исходная система уравнений анализа наиболее просто составляется по методу проецирования замкнутых векторных контуров на оси координат.

В соответствии с этим методом на кинематической схеме механизма вводятся векторы, связанные со звеньями механизма. Затем выделяется ряд замкнутых векторных контуров и для каждого из них составляется векторное уравнение, отображающее условия замыкания контура. Число векторных уравнений, равное числу m контуров, зависит от числа n звеньев плоского механизма. Чаще всего $m = (n - 2) / 2$. Далее векторные уравнения проецируются на оси x и y неподвижной системы координат Oxy . В результате этого получается система из $2m = n - 2$ скалярных уравнений. Это и есть упомянутая выше исходная система уравнений анализа. В качестве неизвестных выступают искомые переменные параметры механизма, число которых обычно равно числу уравнений, т.е. $n - 2$. При этом обобщенная координата механизма считается известной.

Проиллюстрируем сказанное на примере шестизвенного механизма, изображенного на рис. 16.18. Постоянные и переменные параметры данного механизма приведены в § 17.1. Сначала на кинематической схеме механизма вводим векторы $\vec{DE}$, $\vec{DF}$, $\vec{FE}$, $\vec{EB}$, $\vec{EA}$, $\vec{CG}$, $\vec{GB}$, $\vec{CL}$, $\vec{LH}$ и $\vec{HA}$ (на рис. 16.18 они не показаны). Затем выделяем два замкнутых векторных контура $DEFD$ и $CGBEAHLCL$ и составляем для них два векторных уравнения:

$$\begin{cases} \vec{DE} = \vec{DF} + \vec{FE}; \\ \vec{CG} + \vec{GB} = \vec{CL} + \vec{LH} + \vec{HA} + (-\vec{EA}) + \vec{EB}. \end{cases} \quad (17.11)$$

Проецируя эти векторные уравнения на оси x и y , получаем четыре скалярных уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_2 \cos \varphi_2 = x_F - s + l_3 \cos \varphi_3 ; \\ l_2 \sin \varphi_2 = y_F + l_3 \sin \varphi_3 ; \\ (\xi_G - \xi_L) \cos \gamma - (BG - AH) \sin \gamma = -u \cos \gamma - \\ \quad - a_3 \cos (\varphi_3 + \Theta_3) + a_2 \cos (\varphi_2 + \Theta_2) ; \\ (\xi_G - \xi_L) \sin \gamma + (BG - AH) \cos \gamma = -u \sin \gamma - \\ \quad - a_3 \sin (\varphi_3 + \Theta_3) + a_2 \sin (\varphi_2 + \Theta_2) \end{array} \right. \quad (17.12)$$

с четырьмя неизвестными φ_2 , φ_3 , γ , u .

Второй этап решения задачи о положениях звеньев состоит в определении неизвестных параметров из исходной системы уравнений анализа. Обозначим через H число вещественных решений исходной системы. Случай $H = 0$ означает, что при данном значении обобщенной координаты s механизм не существует. В случае $H > 0$ существует H возможных вариантов сборки механизма при данном значении s . Применительно к структурной группе при заданных положениях ее внешних пар случай $H = 0$ означает, что группа не существует, а в случае $H > 0$ существует H вариантов сборки группы.

Уравнения исходной системы, как правило, нелинейны, поскольку они содержат синусы и косинусы искомых углов. Аналитическое решение исходной системы возможно не для всех рычажных механизмов. Но для плоских механизмов первого класса эта система оказывается всегда разрешимой в явном виде относительно искомых параметров, так как она распадается на несколько простых взаимно независимых подсистем, каждая из которых сводится к алгебраическому уравнению не выше второй степени и число которых равно числу двухзвенных групп Ассура в схеме механизма.

Для более сложных по структуре механизмов из исходной системы уравнений удастся в явном виде выразить лишь часть неизвестных параметров. Для других искомых параметров получается система меньшего числа уравнений (часто — одно уравнение с одним неизвестным), которую приходится решать численными методами с помощью ЭВМ.

Для структурных групп с числом звеньев $n_r = 2$ и $n_r = 4$ исходная система уравнений приводится к одному алгебраическому уравнению с одним неизвестным. При этом в случае $n_r = 2$ данное уравнение имеет степень не выше второй (см. § 17.8), а в случае $n_r = 4$ — не выше шестой (см. § 17.9).

Систему уравнений (17.12), полученную для рассматриваемого шестизвенного механизма первого класса, удастся разрешить в явном виде относительно четырех неизвестных, так как эта система распадается на две подсистемы по два уравнения с двумя неизвестными в каждой (что соответствует наличию двух групп Ассур в схеме механизма). Из первого и второго уравнений системы (17.12) находим неизвестные φ_2 и φ_3 . Затем из третьего и четвертого уравнений этой системы определяем неизвестные γ и u . Каждая из двух подсистем имеет не более двух решений. Следовательно, общее число H решений системы (17.12) не превышает четырех.

17.7.2. Определение скоростей и ускорений

Допустим, что задача о положениях звеньев механизма при данном значении s и в какой-либо из его сборок решена. Для получения аналогов угловых или линейных скоростей и ускорений звеньев при том же значении s необходимо продифференцировать по s уравнения исходной системы один и два раза. При первом дифференцировании получаем линейную систему уравнений, неизвестными которой являются аналоги скоростей. При втором дифференцировании получаем также линейную систему уравнений, в которой неизвестными являются аналоги ускорений.

Обе указанные системы уравнений имеют один и тот же определитель. Этот определитель есть якобиан D исходной системы уравнений анализа (17.12). Таким образом, аналоги скоростей и ускорений звеньев механизма всегда могут быть найдены в явном виде и однозначно, если только якобиан D отличен от нуля. Случай $D = 0$ является особым. Чаше всего при $D = 0$ механизм находится в мертвом положении (см. п. 17.3.2).

После определения аналогов скоростей и ускорений звеньев легко находятся их угловые скорости и угловые ускорения, а также скорости и ускорения отдельных точек этих звеньев (см. п. 17.2.2).

Скорости и ускорения звеньев группы Ассура могут быть найдены после решения задачи о положениях ее звеньев при условии, что известны скорости и ускорения внешних пар группы. В данном случае при определении как скоростей, так и ускорений, тоже получается линейная система уравнений, определителем которой является якобиан D исходной системы уравнений анализа группы.

Обратимся вновь к механизму, показанному на рис. 16.18. Дифференцируя уравнения (17.12) по s , получаем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} l_2 \sin \varphi_2 \varphi_2' = 1 + l_3 \sin \varphi_3 \varphi_3' ; \\ l_2 \cos \varphi_2 \varphi_2' = l_3 \cos \varphi_3 \varphi_3' ; \\ -(\xi_G - \xi_L) \sin \gamma \gamma' - (BG - AH) \cos \gamma \gamma' = -u' \cos \gamma + \\ \quad + u \sin \gamma \gamma' + a_3 \sin (\varphi_3 + \Theta_3) \varphi_3' - a_2 \sin (\varphi_2 + \Theta_2) \varphi_2' ; \\ (\xi_G - \xi_L) \cos \gamma \gamma' - (BG - AH) \sin \gamma \gamma' = -u' \sin \gamma - \\ \quad - u \cos \gamma \gamma' - a_3 \cos (\varphi_3 + \Theta_3) \varphi_3' + a_2 \cos (\varphi_2 + \Theta_2) \varphi_2' , \end{array} \right. \quad (17.13)$$

линейную относительно неизвестных $\varphi_2' = d\varphi_2/ds$, $\varphi_3' = d\varphi_3/ds$, $\gamma' = d\gamma/ds$, $u' = du/ds$.

Если теперь продифференцировать по s уравнения (17.13), то получим систему уравнений, линейную относительно φ_2'' , φ_3'' , γ'' , u'' .

Угловая скорость $\dot{\varphi}_2$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}_2$ звена 2 находятся по формулам

$$\dot{\varphi}_2 = \varphi_2' \dot{s}, \quad \ddot{\varphi}_2 = \varphi_2'' \dot{s}^2 + \varphi_2' \ddot{s}, \quad (17.14)$$

где $\dot{s}$ и $\ddot{s}$ — скорость и ускорение ползуна 1.

По аналогичным формулам определяются величины $\dot{\varphi}_3$, $\ddot{\varphi}_3$, $\dot{\gamma}$, $\ddot{\gamma}$, $\dot{u}$, $\ddot{u}$.

§ 17.8. АНАЛИЗ ДВУХЗВЕННЫХ СТРУКТУРНЫХ ГРУПП

В соответствии с погруппным способом анализа рычажных механизмов (см. § 17.6) их кинематическое исследование может быть выполнено путем последовательного анализа структурных групп, входящих в состав механизма.

Среди рычажных механизмов, применяемых в авиационных катапультных установках (АКУ), подавляющее большинство относится к механизмам первого класса (см. рис. 16.16 и табл. 16.4), т.е. к механизмам, содержащим двухзвенные структурные группы (диады). Из табл. 16.4 видно, что в указанных механизмах встречаются диады следующих видов: 1) ВВВ, 2) ВВП, 3) ВВВ с условным звеном, т.е. со «звеном» переменной длины (см. п. 16.4.4).

Рассмотрим алгоритмы анализа перечисленных диад, а также диады вида ВВП. Она представляет интерес, поскольку систему присоединения транспортируемого груза к звеньям рычажного механизма АКУ можно представить условно в виде диады ВВП, одним из звеньев которой является груз.

17.8.1. Параметры диад и постановка задачи их анализа

На рис. 17.17 + 17.19 изображены схемы диад вида ВВВ, ВВП и ВПВ. На рисунках введены следующие системы координат: Oxy — неподвижная система; AX_1Y_1 и CX_2Y_2 — подвижные системы, неизменно связанные со звеньями 1 и 2 соответственно. Кроме того, для диады ВВП введена координ-

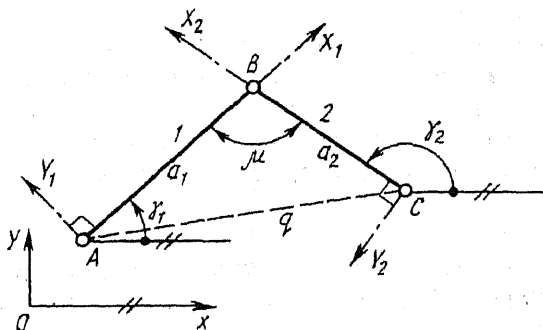


Рис. 17.17

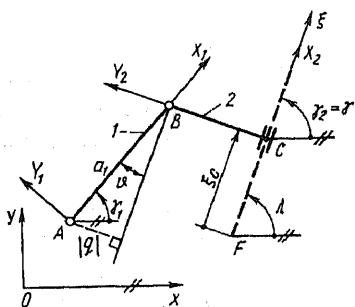


Рис. 17.18

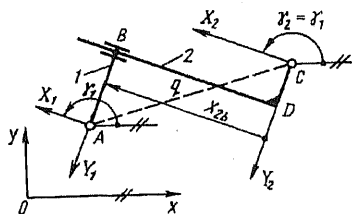


Рис. 17.19

натная ось $F\xi$, направленная вдоль оси поступательной пары (точка F принадлежит тому из звеньев механизма, которое образует поступательную пару со звеном 2 данной диады). Для диады ВВВ ось AX_1 направлена по AB от A к B , а ось CX_2 — по CB от C к B . Для диады ВВП ось AX_1 направлена по AB от A к B , а ось CX_2 — по оси $F\xi$. Для диады ВПВ оси AX_1 и CX_2 направлены параллельно оси внутренней поступательной пары и в одну сторону.

Будем считать, что задан вариант сборки каждой из рассматриваемых диад, устанавливаемый посредством признака сборки M , равного $+1$ или -1 (см. формулы (17.3) и (17.4)). В этой связи имеет смысл рассматривать только первую из двух характерных задач № 1ГР и № 2ГР кинематического анализа структурных групп, сформулированных в п. 17.6.3. Задача № 1ГР включает две подзадачи: а) анализ положений, б) анализ скоростей и ускорений.

Введем теперь параметры диад трех видов. В табл. 17.2 приведены *геометрические параметры* (линейные и угловые размеры), а в табл. 17.3 — *кинематические параметры* (линейные и угловые скорости и ускорения). Как геометрические, так и кинематические параметры диад подразделены на *задаваемые* и *вычисляемые*.

К задаваемым величинам, кроме указанных в табл. 17.2 и 17.3, будем относить также признак M сборки диады.

В табл. 17.2 и 17.3 приняты следующие обозначения: μ — угол передачи; ϑ — угол давления; $x_A, y_A, x_C, y_C, \dots$ — про-

екции на оси Ox и Oy скоростей точек $A, C, \dots$; $x_A, y_A, x_C, y_C, \dots$ — проекции на оси Ox и Oy ускорений точек $A, C, \dots$; $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \ddot{\gamma}_1, \ddot{\gamma}_2$ — угловые скорости и угловые ускорения звеньев 1 и 2 диады; $\dot{\lambda}$ и $\ddot{\lambda}$ — угловая скорость и угловое ускорение оси $F\xi$; $\dot{\xi}_C$ и $\ddot{\xi}_C$ — относительные скорости и ускорение точки C звена 2 по отношению к оси $F\xi$; $\dot{X}_{2B}$ и $\ddot{X}_{2B}$ — относительные скорость и ускорение точки B звена 1 по отношению к звену 2. Смысл других обозначений понятен из рис. 17.17 + 17.19.

Таблица 17.2

Группа Ассура	Геометрические параметры	
	задаваемые	вычисляемые
ВВВ	$a_1, a_2, x_A, y_A, x_C, y_C$	γ_1, γ_2, μ
ВВП	$a_1, X_{2B}, x_A, y_A, x_F, y_F, \lambda$	$\gamma_1, \gamma_2, \vartheta, \xi_C, x_C, y_C$
ВПВ	$Y_{1B}, Y_{2B}, x_A, y_A, x_C, y_C$	γ_1, X_{2B}

Таблица 17.3

Группа Ассура	Кинематические параметры	
	задаваемые	вычисляемые
ВВВ	$\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{x}_C, \dot{y}_C, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C$	$\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \ddot{\gamma}_1, \ddot{\gamma}_2$
ВВП	$\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{x}_F, \dot{y}_F, \lambda, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C, \dot{\lambda}$	$\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \xi_C, \dot{x}_C, \dot{y}_C, \ddot{\gamma}_1, \ddot{\gamma}_2, \xi_C, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C$
ВПВ	$x_A, y_A, x_C, y_C, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{x}_C, \dot{y}_C$	$\dot{\gamma}_1, \dot{X}_{2B}, \ddot{\gamma}_1, \ddot{X}_{2B}$

17.8.2. Решение задачи о положениях

Рассмотрим алгоритм расчета вычисляемых геометрических параметров диад трех видов.

Диада ВВВ (см. рис. 17.17). Воспользуемся векторным уравнением замкнутости контура: $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$. При проецировании этого уравнения на оси координат Ox и Oy получаем два скалярных уравнения:

$$\begin{cases} a_1 \cos \gamma_1 = x_C - x_A + a_2 \cos \gamma_2; \\ a_1 \sin \gamma_1 = y_C - y_A + a_2 \sin \gamma_2 \end{cases} \quad (17.15)$$

с двумя неизвестными γ_1 и γ_2 .

В результате решения системы уравнений (17.15) составлен следующий алгоритм расчета геометрических параметров диады ВВВ:

$$1) \ q = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2};$$

$$2) \text{ проверка условия: } |a_1 - a_2| < q < a_1 + a_2.$$

Если это условие не выполняется, то диада не существует; если выполняется, то следует перейти к пункту 3:

$$3) \ \mu = \arccos \frac{a_1^2 + a_2^2 - q^2}{2 a_1 a_2};$$

$$4) \ \cos \gamma_1 = \left[(x_C - x_A)(a_1 - a_2 \cos \mu) + M(y_C - y_A)a_2 \sin \mu \right] / q^2;$$

$$\sin \gamma_1 = \left[(y_C - y_A)(a_1 - a_2 \cos \mu) - M(x_C - x_A)a_2 \sin \mu \right] / q^2;$$

$$5) \ \gamma_2 = \gamma_1 - M \mu.$$

Диада ВВП (см. рис. 17.18). При проецировании векторного уравнения $\vec{AB} = \vec{AF} + \vec{FC} + \vec{CB}$ замкнутости контура диады ВВП на оси координат Ox и Oy получаем два скалярных уравнения с двумя неизвестными γ_1 и ξ_C :

$$\begin{cases} a_1 \cos \gamma_1 = x_F - x_A + \xi_C \cos \lambda - Y_{2B} \sin \lambda; \\ a_1 \sin \gamma_1 = y_F - y_A + \xi_C \sin \lambda + Y_{2B} \cos \lambda. \end{cases} \quad (17.16)$$

В результате решения системы уравнений (17.16) составлен следующий алгоритм расчета геометрических параметров диады ВВП:

$$1) \quad q = -Y_{2B} + (x_F - x_A) \sin \lambda - (y_F - y_A) \cos \lambda;$$

$$2) \quad \text{проверка условия: } |q| < a_1.$$

Если это условие не выполняется, то диада не существует; если выполняется, то следует перейти к пункту 3:

$$3) \quad \vartheta = \arcsin(|q|/a_1).$$

$$4) \quad \gamma_1 = \lambda + (1 - M) \frac{\pi}{2} - M \vartheta \operatorname{sign}(q),$$

где $\operatorname{sign}(q)$ — знак (+1 или -1) числа q ;

$$5) \quad \gamma_2 = \lambda;$$

$$6) \quad \xi_C = - (x_F - x_A) \cos \lambda - (y_F - y_A) \sin \lambda + M \sqrt{a_1^2 - q^2};$$

$$7) \quad x_C = x_F + \xi_C \cos \lambda; \quad y_C = y_F + \xi_C \sin \lambda.$$

Диада ВПВ (см. рис. 17.19). При проецировании векторного уравнения $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$ замкнутости контура диады ВПВ на оси координат Ox и Oy получаем два скалярных уравнения с двумя неизвестными γ_1 и X_{2B} :

$$\begin{cases} -Y_{1B} \cos \gamma_1 = x_C - x_A + X_{2B} \cos \gamma_1 - Y_{2B} \sin \gamma_1; \\ Y_{1B} \sin \gamma_1 = y_C - y_A + X_{2B} \sin \gamma_1 + Y_{2B} \cos \gamma_1. \end{cases} \quad (17.17)$$

Расчет геометрических параметров диады ВПВ, определяемых из уравнений (17.17), выполняется в такой последовательности:

$$1) \quad q = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2};$$

$$2) \quad \text{проверка условия: } q > |c_1|,$$

где $c_1 = Y_{1B} - Y_{2B}$. Если это условие не выполняется, то диада не существует; если выполняется, то следует перейти к пункту 3:

$$3) X_{2B} = M \sqrt{q^2 - c_1^2};$$

$$4) \cos \gamma_1 = [c_1 (y_C - y_A) - X_{2B} (x_C - x_A)] / q^2;$$

$$\sin \gamma_1 = [-c_1 (x_C - x_A) - X_{2B} (y_C - y_A)] / q^2;$$

$$5) \gamma_2 = \gamma_1.$$

17.8.3. Решение задачи о скоростях и ускорениях

Вычисляемые кинематические параметры диады (см. табл. 17.3) определяются путем двукратного дифференцирования по времени t двух исходных уравнений, связывающих ее геометрические параметры. Для диад ВВВ, ВВП и ВПВ исходными являются уравнения (17.15), (17.16) и (17.17). При первом дифференцировании получаются два уравнения, линейные относительно двух искомых скоростей, а при втором дифференцировании — два уравнения, линейные относительно двух искомых ускорений.

В результате решения двух пар указанных линейных уравнений определяются следующие кинематические параметры: $\dot{\gamma}_1$, $\dot{\gamma}_2$ и $\ddot{\gamma}_1$, $\ddot{\gamma}_2$ — для диады ВВВ; ξ_C , $\dot{\gamma}_1$ и ξ_C , $\ddot{\gamma}_1$ — для диады ВВП; $\dot{\gamma}_1$, $\dot{X}_{2B}$ и $\ddot{\gamma}_1$, $\ddot{X}_{2B}$ — для диады ВПВ. Что касается шести других вычисляемых кинематических параметров диады ВВП (см. табл. 17.3), то они легко определяются по достаточно очевидным формулам после того, как найдены упомянутые выше параметры этой диады.

В табл. 17.4 и 17.5 приведены формулы расчета линейных и угловых скоростей и ускорений, полученные описанным способом для диад трех видов.

Анализ формул для вычисляемых кинематических параметров двухзвенных групп Ассура трех рассматриваемых видов показывает, что при определенных условиях эти параметры могут неограниченно возрастать.

Таблица 17.4

Группа Ассура	Расчетные формулы
BBB	$\dot{\gamma}_1 = -M \left[(\dot{x}_C - \dot{x}_A) \cos \gamma_2 + (\dot{y}_C - \dot{y}_A) \sin \gamma_2 \right] / (a_1 \sin \mu)$ $\dot{\gamma}_2 = -M \left[(\dot{x}_C - \dot{x}_A) \cos \gamma_1 + (\dot{y}_C - \dot{y}_A) \sin \gamma_1 \right] / (a_2 \sin \mu)$
BBП	$\dot{\gamma}_1 = M \left[-(\dot{x}_F - \dot{x}_A) \sin \lambda + (\dot{y}_F - \dot{y}_A) \cos \lambda + \dot{\lambda} \xi_C \right] / (a_2 \cos \vartheta);$ $\xi_C = -(\dot{x}_F - \dot{x}_A) \cos \lambda - (\dot{y}_F - \dot{y}_A) \sin \lambda + Y_{2B} \dot{\lambda} - a_1 \dot{\gamma}_1 \sin(\gamma_1 - \lambda);$ $\dot{\gamma}_2 = \dot{\lambda}; \quad \dot{x}_C = \dot{x}_F + \xi_C \cos \lambda - \dot{\lambda} \xi_C \sin \lambda;$ $\dot{y}_C = \dot{y}_F + \xi_C \sin \lambda + \dot{\lambda} \xi_C \cos \lambda$
ВПВ	$\dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = \left[(\dot{x}_C - \dot{x}_A) \sin \gamma_1 - (\dot{y}_C - \dot{y}_A) \cos \gamma_1 \right] / X_{2B};$ $\dot{X}_{2B} = \left[(x_C - x_A)(\dot{x}_C - \dot{x}_A) + (y_C - y_A)(\dot{y}_C - \dot{y}_A) \right] / X_{2B}$

Таблица 17.5

Группа Ассура	Расчетные формулы
BBB	$\ddot{\gamma}_1 = -M \left[(\ddot{x}_C - \ddot{x}_A) \cos \gamma_2 + (\ddot{y}_C - \ddot{y}_A) \sin \gamma_2 + a_1 \dot{\gamma}_1^2 \cos \mu - \right.$ $\left. - a_2 \dot{\gamma}_2^2 \right] / (a_1 \sin \mu)$ $\ddot{\gamma}_2 = -M \left[(\ddot{x}_C - \ddot{x}_A) \cos \gamma_1 + (\ddot{y}_C - \ddot{y}_A) \sin \gamma_1 + a_1 \dot{\gamma}_1^2 - \right.$ $\left. - a_2 \dot{\gamma}_2^2 \cos \mu \right] / (a_2 \sin \mu)$
BBП	$\ddot{\gamma}_1 = M \left[-(\ddot{x}_F - \ddot{x}_A) \sin \lambda + (\ddot{y}_F - \ddot{y}_A) \cos \lambda + \ddot{\lambda} \xi_C + 2 \dot{\lambda} \dot{\xi}_C - Y_{2B} \dot{\lambda}^2 + \right.$ $\left. + a_1 \dot{\gamma}_1^2 \sin(\gamma_1 - \lambda) \right] / (a_2 \cos \vartheta);$

Группа Ассура	Расчетные формулы
ВВП	$\xi_C = -(\dot{x}_F - \dot{x}_A) \cos \lambda - (\ddot{y}_F - \ddot{y}_A) \sin \lambda + Y_{2B} \ddot{\lambda} - a_1 \ddot{\gamma}_1 \sin(\gamma_1 - \lambda) -$ $- a_1 \dot{\gamma}_1^2 \cos(\gamma_1 - \lambda) + \xi_C \dot{\lambda}^2;$ $\ddot{\gamma}_2 = \ddot{\lambda}; \quad \ddot{x}_C = \ddot{x}_F + (\xi_C - \xi_C \dot{\lambda}^2) \cos \lambda - (2 \dot{\lambda} \xi_C + \xi_C \ddot{\lambda}) \sin \lambda;$ $\ddot{y}_C = \ddot{y}_F + (\xi_C - \xi_C \dot{\lambda}^2) \sin \lambda + (2 \dot{\lambda} \xi_C + \xi_C \ddot{\lambda}) \cos \lambda$
ВПВ	$\ddot{\gamma}_1 = \ddot{\gamma}_2 = \{1(\ddot{x}_C - \ddot{x}_A) \sin \gamma_1 - (\ddot{y}_C - \ddot{y}_A) \cos \gamma_1 - (Y_{1B} - Y_{2B}) \dot{\gamma}_1^2 -$ $- 2 \dot{X}_{2B} \dot{\gamma}_1\} / X_{2B};$ $\ddot{X}_{2B} = -(\ddot{x}_C - \ddot{x}_A) \cos \gamma_1 - (\ddot{y}_C - \ddot{y}_A) \sin \gamma_1 - (Y_{1B} - Y_{2B}) \ddot{\gamma}_1 +$ $+ [(\dot{x}_C - \dot{x}_A) \sin \gamma_1 - (\dot{y}_C - \dot{y}_A) \cos \gamma_1] \dot{\gamma}_1$

Это явление наблюдается при приближении к особым положениям звеньев диады (см. п. 17.3.2), т.е. при выполнении следующих условий: 1) $\mu \rightarrow 0$ или π — для диады ВВВ; 2) $\vartheta \rightarrow \pi/2$ — для диады ВВП; 3) $X_{2B} \rightarrow 0$ — для диады ВПВ.

17.8.4. Расчет кинематических параметров диады ВВВ со «звеном» переменной длины

Рассмотрим особый случай, когда звено 1 диады вида ВВВ является условным (такая диада встречается только у рычажных механизмов второго типа — см. п.п. 16.2.5 и 16.4.4). В данном случае длина a_1 звена 1 будет переменной, поскольку в соответствии с формулой (16.10) $a_1 = l_y = (l_y)_0 + s$. Пусть известна зависимость обобщенной координаты s механизма от времени t :

$$s = s(t), \quad 0 \leq t \leq t_N. \quad (17.18)$$

Расчет геометрических параметров диады вида ВВВ с переменной длиной a_1 звена 1 не отличается от случая, когда $a_1 = \text{const}$, и выполняется по описанному в п. 17.8.2 алгоритму. Что касается расчета кинематических параметров движения звеньев 1 и 2, то при дифференцировании уравнений (17.15) по времени t нужно учитывать переменность длины a_1 . В частном случае, когда шарниры А и С неподвижны, при двукратном дифференцировании уравнений (17.15) получаем две системы уравнений, первая из которых линейна относительно неизвестных $\dot{\gamma}_1$ и $\dot{\gamma}_2$, а вторая — относительно неизвестных $\ddot{\gamma}_1$ и $\ddot{\gamma}_2$. В результате решения этих двух систем уравнений находим:

$$\dot{\gamma}_1 = M \dot{s} \operatorname{ctg} \mu / a_1; \quad \dot{\gamma}_2 = M \dot{s} / (a_1 \sin \mu); \quad (17.19)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}_1 &= M \left[\ddot{s} \cos \mu + a_2 \dot{\gamma}_2^2 - a_2 \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 (1 + \sin^2 \mu) \right] / (a_1 \sin \mu); \\ \ddot{\gamma}_2 &= M \left[\ddot{s} + a_2 \dot{\gamma}_2^2 \cos \mu - a_1 \dot{\gamma}_1^2 \right] / (a_2 \sin \mu). \end{aligned} \quad (17.20)$$

17.8.5. Кинематический анализ звена

Пусть выполнен анализ диады по формулам, приведенным в пп. 17.8.2 + 17.8.4, и тем самым найдены параметры движения каждого из двух звеньев диады. Теперь может быть решена следующая задача: найти параметры движения некоторой точки любого из двух звеньев диады или же некоторой оси, неизменно связанной с этим звеном.

Такая задача возникает, например, в том случае, когда звено диады является трехпарным (две из этих пар считаются принадлежащими данной диаде, а третью пару упомянутое звено диады образует со звеном, входящим в состав какой-либо из последующих структурных групп исследуемого рычажного механизма). Если третья пара есть пара вида В, т.е. шарнир, то требуется найти параметры движения (координаты, скорость, ускорение) точки, которая является центром этого шарнира; если же третья пара есть пара вида П, то подлежат определению параметры движения указанной выше оси, являющейся осью поступательной пары.

Сформулированную задачу будем называть *задачей анализа звена*.

Введем следующие обозначения (рис. 17.20): P и Q — две точки рассматриваемого звена, движущегося в неподвижной плоскости; Oxy — неподвижная система координат; PXY и $Q\xi$ — подвижные система координат и ось, неизменно связанные со звеном; φ — угол между осями Ox и PX ; ρ — постоянный угол между осями PX и $Q\xi$; β — угол между осями Ox и $Q\xi$. Величины x_P , y_P , φ примем в качестве обобщенных координат, определяющих положение звена в неподвижной системе координат Oxy (по крайней мере, одна из трех обобщенных координат звена является переменной).

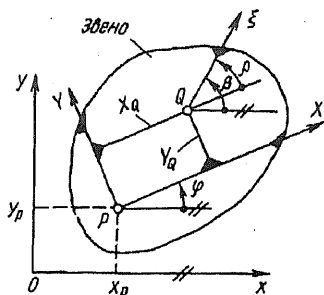


Рис. 17.20

Итак, известны величины: 1) x_P , y_P , φ ; 2) $\dot{x}_P$, $\dot{y}_P$, $\dot{\varphi}$, $\ddot{x}_P$, $\ddot{y}_P$, $\ddot{\varphi}$ — первые и вторые производные по времени от обобщенных координат звена; 3) X_Q , Y_Q ; 4) ρ (задается только при наличии оси $Q\xi$). Требуется определить: 1) x_Q , y_Q , $\dot{x}_Q$, $\dot{y}_Q$, $\ddot{x}_Q$, $\ddot{y}_Q$; 2) β , $\dot{\beta}$, $\ddot{\beta}$ — только при наличии оси $Q\xi$.

Расчет искомых параметров производится на основании формул, известных из курса теоретической механики:

$$\begin{cases} x_Q = x_P + X_Q \cos \varphi - Y_Q \sin \varphi, \\ y_Q = y_P + X_Q \sin \varphi + Y_Q \cos \varphi; \end{cases} \quad (17.21)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_Q = \dot{x}_P - (y_Q - y_P) \dot{\varphi}, \\ \dot{y}_Q = \dot{y}_P + (x_Q - x_P) \dot{\varphi}; \end{cases} \quad (17.22)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_Q = \ddot{x}_P - (x_Q - x_P) \dot{\varphi}^2 - (y_Q - y_P) \ddot{\varphi}, \\ \ddot{y}_Q = \ddot{y}_P - (y_Q - y_P) \dot{\varphi}^2 + (x_Q - x_P) \ddot{\varphi}. \end{cases} \quad (17.23)$$

$$\beta = \varphi + \rho; \quad \beta = \dot{\varphi}; \quad \beta = \ddot{\varphi}. \quad (17.24)$$

Приведенные формулы могут быть использованы не только при анализе звена диады, но и при анализе звена любой другой структурной группы, а также при анализе входного звена.

§ 17.9. Анализ четырехзвенных структурных групп

Среди 12 рычажных механизмов АКУ, показанных на рис. 16.16, лишь один механизм (схема № 9) относится к механизмам второго класса. Из табл. 16.4 видно, что в структуре данного шестизвального механизма имеется четырехзвенная группа Ассура второго порядка со «звеном» переменной длины. В соответствии с погруппным способом анализ указанного механизма сводится к анализу упомянутой группы, алгоритм которого излагается ниже.

17.9.1. Определение положений звеньев четырехзвенной группы второго порядка

Пусть известны размеры звеньев рассматриваемой структурной группы (рис. 17.21) и координаты x и y ее внешних шарниров A и B . Общее число задаваемых геометрических параметров группы равно 12, а именно:

$a_1, \Theta_1, b_1, a_2, a_3, a_4, \Theta_4, b_4, x_A, y_A, x_B, y_B$. Через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ обозначены угловые координаты звеньев 1, 2, 3, 4 группы. Требуется: 1) найти число H возможных вариантов сборки группы; 2) если $H > 0$, то найти значения углов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ для каждого из H вариантов сборки.

Проецируя два вектора уравнения $\vec{AC} + \vec{CE} = \vec{AB} + \vec{BE}$ и $\vec{AD} + \vec{DF} = \vec{AB} + \vec{BF}$ на оси x и y , получаем четыре скалярных уравнения с четырьмя неизвестными $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$:

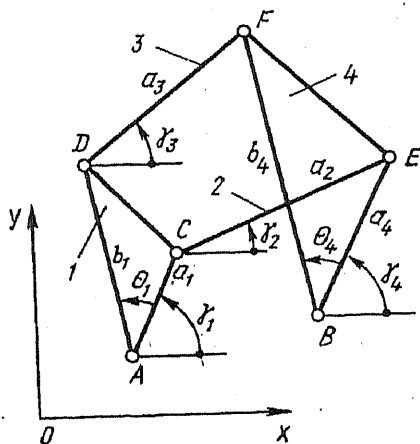


Рис. 17.21

$$\begin{cases} a_1 \cos \gamma_1 + a_2 \cos \gamma_2 = x_B - x_A + a_4 \cos \gamma_4; \\ a_1 \sin \gamma_1 + a_2 \sin \gamma_2 = y_B - y_A + a_4 \sin \gamma_4; \\ b_1 \cos (\gamma_1 + \Theta_1) + a_3 \cos \gamma_3 = x_B - x_A + b_4 \cos (\gamma_4 + \Theta_4); \\ b_1 \sin (\gamma_1 + \Theta_1) + a_3 \sin \gamma_3 = y_B - y_A + b_4 \sin (\gamma_4 + \Theta_4). \end{cases} \quad (17.25)$$

Из системы уравнений (17.25) могут быть последовательно исключены неизвестные γ_2 , γ_3 , γ_1 и получено одно уравнение с одним неизвестным γ_4 . Из уравнений (17.25) находим:

$$\begin{cases} \cos \gamma_2 = (u_1 - a_1 \cos \gamma_1) / a_2, \\ \sin \gamma_2 = (u_2 - a_1 \sin \gamma_1) / a_2; \end{cases} \quad (17.26)$$

$$\begin{cases} \cos \gamma_3 = [u_3 - b_1 \cos (\gamma_1 + \Theta_1)] / a_3, \\ \sin \gamma_3 = [u_4 - b_1 \sin (\gamma_1 + \Theta_1)] / a_3; \end{cases} \quad (17.27)$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= d_1 + a_4 \cos \gamma_4; & u_2 &= d_2 + a_4 \sin \gamma_4; \\ u_3 &= d_1 + b_4 \cos (\gamma_4 + \Theta_4); & u_4 &= d_2 + b_4 \sin (\gamma_4 + \Theta_4); \\ d_1 &= x_B - x_A, & d_2 &= y_B - y_A. \end{aligned}$$

На основании тождества $\cos^2 \gamma_i + \sin^2 \gamma_i = 1$ ($i = 2, 3$) из уравнений (17.26) и (17.27) получаем два уравнения:

$$\begin{cases} 2 a_1 (u_1 \cos \gamma_1 + u_2 \sin \gamma_1) - u_5 = 0; \\ 2 b_1 (u_3 \cos \gamma_1 + u_4 \sin \gamma_1) - u_6 = 0, \end{cases} \quad (17.28)$$

где

$$\begin{aligned} u_5 &= u_1^2 + u_2^2 + a_1^2 - a_2^2; & u_6 &= u_3^2 + u_4^2 + b_1^2 - a_3^2; \\ u_7 &= u_3 \cos \Theta_1 + u_4 \sin \Theta_1; & u_8 &= u_4 \cos \Theta_1 - u_3 \sin \Theta_1. \end{aligned}$$

Из системы (17.28) найдем:

$$\cos \gamma_1 = \Delta_1 / \Delta; \quad \sin \gamma_1 = \Delta_2 / \Delta, \quad (17.29)$$

где

$$\Delta = 2 a_1 b_1 (u_1 u_8 - u_2 u_7);$$

$$\Delta_1 = b_1 u_8 u_5 - a_1 u_2 u_6; \quad \Delta_2 = a_1 u_1 u_6 - b_1 u_7 u_5.$$

Используя тождество $\cos^2 \gamma_1 + \sin^2 \gamma_1 = 1$, из (17.29) получаем уравнение с одним неизвестным γ_4 :

$$F(\gamma_4) = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 - \Delta^2 = 0. \quad (17.30)$$

Функцию $F(\gamma_4)$ на основании приведенных выше формул можно записать так:

$$F = A_1 z^3 + A_2 z^2 v + A_3 z^2 + A_4 z v + A_5 z + A_6 v + A_7, \quad (17.31)$$

где $z = \sin \gamma_4$; $v = \cos \gamma_4$; $A_1, \dots, A_7$ — коэффициенты, зависящие только от 12 задаваемых параметров группы.

Выражения для коэффициентов $A_1, \dots, A_7$ весьма громоздки и здесь не приводятся. К тому же их использование при анализе группы связано с большим объемом вычислений и существенным увеличением программы для ЭВМ. Между тем, численные значения этих коэффициентов могут быть найдены без привлечения аналитических выражений для них, а при помощи метода, основанного на интерполировании.

Тригонометрическое уравнение (17.30) на основании (17.31) и тождества $z^2 + v^2 = 1$ можно записать в виде следующего алгебраического (относительно z) уравнения:

$$\Phi(z) \equiv B_0 z^6 + B_1 z^5 + \dots + B_5 z + B_6 = 0, \quad (17.32)$$

где

$$B_0 = A_1^2 + A_2^2; \quad B_1 = 2(A_1 A_3 + A_2 A_4);$$

$$B_2 = A_3^2 + A_4^2 - A_2^2 + 2A_1 A_5 + 2A_2 A_6;$$

$$B_3 = 2(A_3 A_5 + A_4 A_6 + A_1 A_7 - A_2 A_4);$$

$$B_4 = A_5^2 + A_6^2 - A_4^2 + 2A_3 A_7 - 2A_2 A_6;$$

$$B_5 = 2(A_5 A_7 - A_4 A_6); \quad B_6 = A_7^2 - A_6^2.$$

Число H вещественных корней уравнения шестой степени (17.32) не превышает 6. Обычно H принимает значения 0, 2, 4 или 6, поскольку число комплексных корней полинома четное, а все вещественные корни, если они существуют, обычно разные. В особых случаях, когда корни кратные (совпадающие), число H может принимать значения 1, 3 и 5; однако такие случаи весьма маловероятны и могут иметь место только при определенных сочетаниях значений задаваемых параметров четырехзвенной группы.

Случай $H = 0$ означает, что при заданных значениях параметров группа не существует. Случай $H > 0$ означает, что группа имеет H вариантов сборки.

Корни полинома $\Phi(z)$ могут быть найдены при помощи стандартных процедур, имеющихся обычно в математическом обеспечении ЭВМ.

После того, как найдены корни z_k ($k = 1, 2, \dots, H$) полинома $\Phi(z)$, дальнейший расчет производится отдельно для каждого из H вариантов сборки группы. Так, для варианта сборки с номером k находим:

- 1) $\sin \gamma_4 = z$; $\cos \gamma_4 = -\left(A_1 z_k^3 + A_3 z_k^2 + A_5 z_k + A_7\right) / \left(A_2 z_k^2 + A_4 z_k + A_6\right)$;
- 2) $u_1, u_2, \dots, u_8, \Delta, \Delta_1, \Delta_2$; 3) $\cos \gamma_i, \sin \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) — по формулам (17.29), (17.26) и (17.27); 4) углы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ — по найденным значениям синусов и косинусов этих углов.

17.9.2. Определение угловых скоростей и угловых ускорений звеньев четырехзвенной группы

Пусть известны следующие величины: 1) задаваемые геометрические параметры группы (см. п. 17.9.1); 2) $\dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{x}_B, \dot{y}_B, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{x}_B, \ddot{y}_B$ — проекции скоростей и ускорений внешних шарниров A и B на оси x и y . Пусть, кроме того, решена задача о положениях звеньев группы и тем самым получены

значения угловых координат $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ четырех ее звеньев (рассматривается какой-либо один из возможных вариантов сборки группы).

Требуется определить угловые скорости $\dot{\gamma}_i$ и угловые ускорения $\ddot{\gamma}_i$ звеньев группы ($i = 1, 2, 3, 4$).

При дифференцировании по времени t уравнений (17.25) получаем систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_1 \sin \gamma_1 \dot{\gamma}_1 - a_2 \sin \gamma_2 \dot{\gamma}_2 = \dot{x}_B - \dot{x}_A - a_4 \sin \gamma_4 \dot{\gamma}_4; \\ a_1 \cos \gamma_1 \dot{\gamma}_1 + a_2 \cos \gamma_2 \dot{\gamma}_2 = \dot{y}_B - \dot{y}_A + a_4 \cos \gamma_4 \dot{\gamma}_4; \\ -b_1 \sin (\gamma_1 + \Theta_1) \dot{\gamma}_1 - a_3 \sin \gamma_3 \dot{\gamma}_3 = \dot{x}_B - \dot{x}_A - \\ - b_4 \sin (\gamma_4 + \Theta_4) \dot{\gamma}_4; \\ b_1 \cos (\gamma_1 + \Theta_1) \dot{\gamma}_1 + a_3 \cos \gamma_3 \dot{\gamma}_3 = \dot{y}_B - \dot{y}_A + \\ + b_4 \cos (\gamma_4 + \Theta_4) \dot{\gamma}_4 \end{array} \right. \quad (17.33)$$

с четырьмя неизвестными $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3, \dot{\gamma}_4$, которые находим по правилу Крамера:

$$\dot{\gamma}_i = D_i / D, \quad (17.34)$$

где D и D_i — определители 4-го порядка ($i = 1, 2, 3, 4$).

Определитель D системы (17.33) представляет собой *якобиан* исходной системы уравнений (17.25) и выражается формулой

$$\begin{aligned} D = a_2 a_3 \left[a_1 b_4 \sin (\gamma_1 - \gamma_2) \sin (\gamma_4 + \Theta_4 - \gamma_3) - \right. \\ \left. - b_1 a_4 \sin (\gamma_4 - \gamma_2) \sin (\gamma_4 + \Theta_1 - \gamma_3) \right]. \end{aligned} \quad (17.35)$$

Определитель D_i получают при замене i -го столбца в определителе D на столбец правых частей уравнения (17.33).

Для нахождения угловых ускорений $\ddot{\gamma}_i$ звеньев группы нужно дифференцировать по времени уравнения (17.33), в результате чего получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными $\ddot{\gamma}_1, \ddot{\gamma}_2, \ddot{\gamma}_3, \ddot{\gamma}_4$. Заметим, что определитель этой но-

вой системы совпадает с определителем D исходной системы (17.25).

По найденным значениям $\dot{\gamma}_i$ и $\ddot{\gamma}_i$ легко определяются скорость и ускорение произвольной точки любого из звеньев группы.

17.9.3. Особые положения четырехзвенной группы

Особым положением четырехзвенной группы будем называть такое ее положение, в котором при конечных значениях скоростей внешних шарниров угловые скорости звеньев группы становятся бесконечно большими. Из формулы (17.34) видно, что особые положения группы имеют место при выполнении следующего условия:

$$D = 0. \quad (17.36)$$

При этом должны выполняться неравенства $D_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Для четырехзвенной группы второго порядка (рис. 17.21) условие (17.36) на основании формулы (17.35) принимает вид:

$$\begin{aligned} & a_1 b_4 \sin(\gamma_1 - \gamma_2) \sin(\gamma_4 + \Theta_4 - \gamma_3) - \\ & - b_1 a_4 \sin(\gamma_4 - \gamma_2) \sin(\gamma_1 + \Theta_1 - \gamma_3) = 0. \end{aligned} \quad (17.37)$$

Нетрудно показать, что при выполнении условия (17.37) три прямые, проходящие вдоль звеньев DF и CE , а также через внешние шарниры A и B , пересекаются в одной точке. Таким образом, геометрическим признаком существования особого положения у рассматриваемой группы является пересечение трех указанных прямых в одной точке (рис. 17.22).

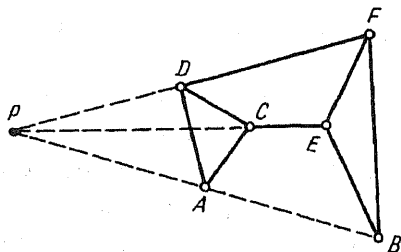


Рис. 17.22

Если в механизме, содержащем четырехзвенную группу Ассура, последняя оказывается в особом положении, то соответствующее положение механизма будет, как правило, «мертвым», при котором достигается граница области существования сборки первого типа (см. п. 17.3.2).

17.9.4. Расчет кинематических параметров четырехзвенной группы со «звеном» переменной длины

Рассмотрим случай, когда звено 3 четырехзвенной группы (см. рис. 17.21) является условным. Такая группа встречается у одной из известных схем рычажных механизмов АКУ, а именно у схемы № 9 (см. рис. 16.16). В соответствии с введенной в § 16.4 структурной классификацией данный механизм относится к механизмам второго типа второго класса первого рода. В рассматриваемом случае длина a_3 звена 3 группы является переменной, поскольку на основании формулы (16.10) $a_3 = l_y = (l_y)_0 + s$.

Пусть известна зависимость (17.18) обобщенной координаты s механизма от времени t .

Расчет геометрических параметров четырехзвенной группы с переменной длиной a_3 звена 3 не отличается от случая, когда $a_3 = \text{const}$, и выполняется по описанному в п. 17.9.1 алгоритму. Что касается расчета угловых скоростей $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3, \dot{\gamma}_4$ звеньев группы, то при дифференцировании уравнений (17.25) по времени t нужно учитывать переменность длины a_3 . В частном случае, когда внешние шарниры A и B неподвижны, при дифференцировании уравнений (17.25) получаем:

$$\begin{cases} -a_1 \sin \gamma_1 \dot{\gamma}_1 - a_2 \sin \gamma_2 \dot{\gamma}_2 = -a_4 \sin \gamma_4 \dot{\gamma}_4, \\ a_1 \cos \gamma_1 \dot{\gamma}_1 + a_2 \cos \gamma_2 \dot{\gamma}_2 = a_4 \cos \gamma_4 \dot{\gamma}_4, \\ \dot{s} \cos \gamma_3 - b_1 \sin (\gamma_1 + \Theta_1) \dot{\gamma}_1 - a_3 \sin \gamma_3 \dot{\gamma}_3 = \\ = -b_4 \sin (\gamma_4 + \Theta_4) \dot{\gamma}_4; \\ \dot{s} \sin \gamma_3 + b_1 \cos (\gamma_1 + \Theta_1) \dot{\gamma}_1 + a_3 \cos \gamma_3 \dot{\gamma}_3 = \\ = b_4 \cos (\gamma_4 + \Theta_4) \dot{\gamma}_4. \end{cases} \quad (17.38)$$

Из линейной системы уравнений (17.38) находим угловые скорости звеньев:

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_1 &= -\dot{s} a_2 a_3 a_4 \sin(\gamma_4 - \gamma_2) / D; \\
\dot{\gamma}_2 &= \dot{s} a_1 a_3 a_4 \sin(\gamma_4 - \gamma_1) / D; \\
\dot{\gamma}_3 &= -\dot{s} a_2 \left[a_1 b_4 \sin(\gamma_1 - \gamma_2) \cos(\gamma_4 + \Theta_4 - \gamma_3) - \right. \\
&\quad \left. - b_1 a_4 \sin(\gamma_4 - \gamma_2) \cos(\gamma_1 + \Theta_1 - \gamma_3) \right] / D; \\
\dot{\gamma}_4 &= -\dot{s} a_1 a_2 a_3 \sin(\gamma_4 - \gamma_2) / D,
\end{aligned} \tag{17.39}$$

где D — якобиан, определяемый по формуле (17.35).

§ 17.10. АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ, СОДЕРЖАЩИХ ДВУХЗВЕННЫЕ СТРУКТУРНЫЕ ГРУППЫ

17.10.1. Постановка задачи

Среди рычажных механизмов, применяемых в конструкциях машин и приборов, подавляющее большинство составляют плоские рычажные механизмы первого класса, содержащие двухзвенные структурные группы, или диады. В данном параграфе излагается единый алгоритм решения задачи анализа любого механизма указанной структуры, базирующийся на погруппном способе анализа механизмов (§ 17.6) и на алгоритмах анализа диад различных модификаций (§ 17.8). Единый алгоритм охватывает механизмы как первого, так и второго типа (в описываемой здесь версии алгоритма исключаются из рассмотрения только механизмы второго типа второго рода (см. п. 16.4.4), которые на практике встречаются крайне редко).

Пусть заданы структурная схема механизма и значения его постоянных параметров. Кроме того, известен вариант сборки механизма, задаваемый при помощи набора значений признаков M_k ($k = 1, 2, \dots, m$) вариантов сборки m диад, входящих в состав механизма (см. п. 17.3.3). Требуется выполнить анализ механизма в заданной его сборке, т.е. решить задачу № 3 (§ 17.5).

Анализ механизма будем производить для ряда дискретных значений q_v обобщенной координаты q механизма, равных

$$q_v = q(t_v) \quad (v = 1, 2, \dots, N), \quad (17.40)$$

где $q(t)$ — заданная зависимость обобщенной координаты от времени t ; t_v — заданные дискретные моменты времени.

Напомним, что $q = \varphi$ или $q = s$, где φ — относительное угловое, а s — относительное линейное перемещение двух звеньев, образующих входную пару. Если последняя является вращательной, то $q = \varphi$; если же она поступательная, то $q = s$.

17.10.2. Общая схема алгоритма

На рис. 17.23 приведена общая схема алгоритма анализа рассматриваемых механизмов и соответствующей программы для ЭВМ.

Далее в данном параграфе будет уточнен состав вводимых исходных данных (см. блок 1 на рис. 17.23).

Блоки 2 — 16 охватывают цикл по параметру v в пределах от 0 до N с шагом 1 (внешний цикл). При каждом v производится анализ механизма в положении, соответствующем значению $q = q_v$, которое рассчитывается в блоке 4 по формуле (17.40).

В зависимости от типа механизма (первый или второй) далее производится анализ входного звена 1 (блок 6) или условного звена У (блок 7).

Анализ входного звена 1 механизма первого типа выполняется на основании алгоритма, изложенного в п. 17.8.5. При этом звено 1 может быть двухпарным или трехпарным, а сами пары могут быть вида В или П.

Условное звено У вводится только для механизмов второго типа (см. п. 16.2.5): оно получается путем объединения звеньев 1 и 2, образующих входную пару, в одно звено за счет ликвидации относительной подвижности звеньев 1 и 2 при $q = q_v$. Анализ условного звена У заключается в определении его длины l_y по формуле (16.10).

Блоки 8 — 14 охватывают цикл по параметру k в пределах от 1 до m с шагом 1 (внутренний цикл). При каждом k производится анализ той диады механизма, которая имеет номер k .

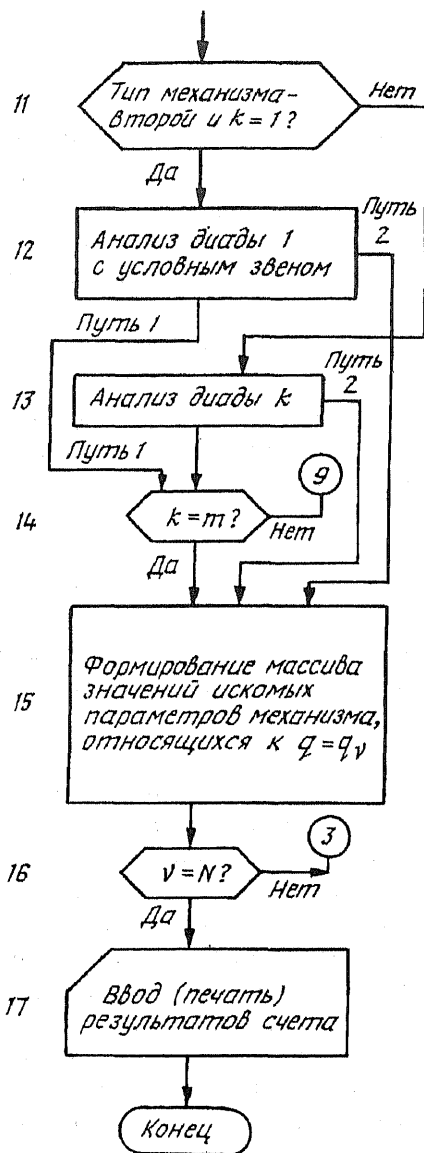
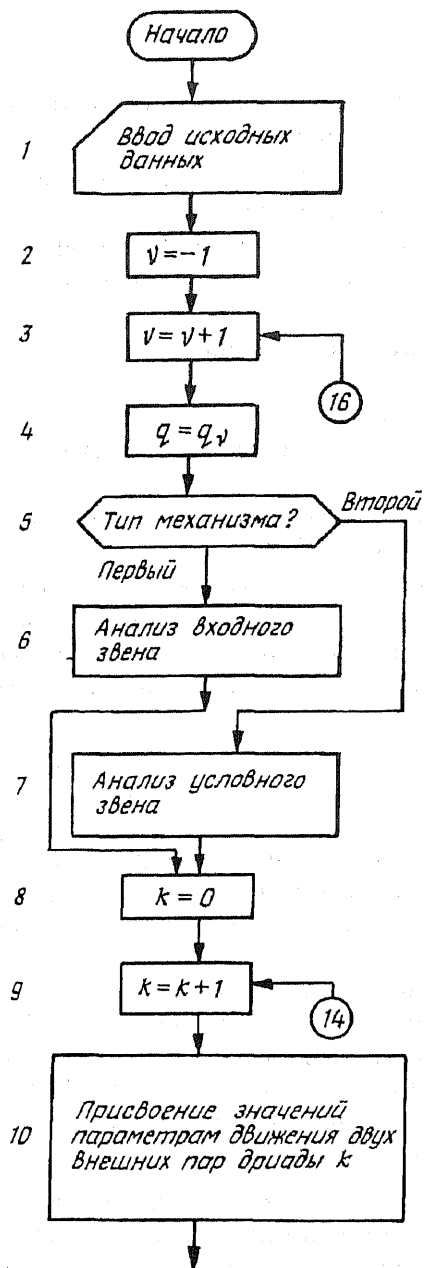


Рис. 17.23

В блоке 10 устанавливаются положения, а также скорости и ускорения, двух внешних пар диады k . Если внешняя пара относится к виду В (шарнир), то её положение определяется координатами x и y центра шара. Если внешняя пара относится к виду П, то её положение определяется тремя параметрами — координатами x и y некоторой точки, лежащей на продольной оси поступательной пары, и углом между этой осью и осью Ox (здесь Oxy — неподвижная система координат). В том случае, когда диада k присоединяется одной из внешних пар к стойке, положение этой пары известно заранее. Если же диада k присоединяется внешней парой к подвижному звену механизма, то её положение уже найдено к моменту начала анализа диады k , так как указанное подвижное звено есть либо входное звено (для механизмов первого типа), либо звено, принадлежащее диаде с меньшим номером.

Задача анализа диады, решаемая в блоке 12 (только для механизмов второго типа при $k=1$) или блоке 13 (во всех остальных случаях), была сформулирована ранее в общем виде в § 17.8; там же были изложены алгоритмы её решения для диад вида ВВВ, ВВП и ВПВ, а также для диады вида ВВВ с условным звеном.

При выполнении расчетов в блоке 12 или 13 возможны два случая: 1) при $q = q_v$ диада k существует; 2) при $q = q_v$ диада k не существует, т.е. имеет место разрыв кинематической цепи механизма. В первом случае происходит выход из блока 12 или 13 по пути 1, во втором случае — по пути 2. В последнем случае в таблице результатов расчета (см. блок 17 на рис. 17.23) в строке, соответствующей значению $q = q_v$, печатается сообщение «МЕХАНИЗМ НЕ СУЩЕСТВУЕТ» с указанием номера k диады, в которой имеет место разрыв цепи.

17.10.3. Единый алгоритм анализа механизмов первого класса

Программу анализа рычажных механизмов первого класса рекомендуется строить на основе блочного принципа, в соответствии с которым составляется сравнительно короткая и простая главная программа и несколько подпрограмм — независимых модулей, обращение к которым предусмотрено в главной

программе. Последняя определяет фактически лишь последовательность расчетов; сами же расчеты производятся, главным образом, в подпрограммах.

Основными модулями являются подпрограммы анализа диад различных видов (алгоритмы см. в п. 17.8.1 — 17.8.4), а также подпрограмма анализа отдельного звена механизма; это может быть или входное звено, или какое-либо звено любой из диад (алгоритмы см. в п. 17.8.5).

Блочный принцип может быть применен как при разработке главной программы, предназначенной для анализа механизма первого класса конкретной структурной схемы, так и при создании *единой* (универсальной) главной программы, пригодной для анализа любого рычажного механизма первого класса.

Рассмотрим некоторые аспекты создания такой единой программы.

Универсальность единой программы достигается тем, что вводятся определенные правила, касающиеся а) нумерации диад и звеньев механизма; б) выбора и системы обозначений характерных точек, в частности, шарниров, на кинематической схеме механизма; в) выбора систем координат — как неподвижных, так и подвижных, неизменно связанных с подвижными звеньями механизма; г) способа кодирования всех структурных особенностей рассматриваемых механизмов; д) системы обозначений их постоянных и переменных параметров. Указанные правила используются при разработке единой программы и при подготовке исходных данных, вводимых в ЭВМ с целью анализа конкретного механизма по данной программе.

Порядок нумерации диад механизма соответствует последовательности их наложения при формировании структурной схемы механизма. При этом в механизмах первого типа диада 1 присоединяется одной внешней парой к входному звену, а другой — к стойке; в механизмах второго типа диада 1 содержит условное звено $У$ (см. п. 16.4.4).

Порядок нумерации звеньев механизмов первого типа следующий: 0 — стойка; 1 — входное звено; $2k$ и $2k + 1$ — звенья диады k ($k = 1, 2, \dots, m$).

Нумерация звеньев механизмов второго типа имеет некоторые особенности, а именно: 1 и 2 — два звена, образующих входную пару (поступательную); $У$ и 3 — звенья диады 1 (здесь $У$ — условное звено, получаемое путем объединения звеньев 1

и 2 в одно звено при данном $s = s_v$): Нумерация других звеньев такая же, как и для механизмов первого типа.

Общее число звеньев механизма $n = 2m + 2$, где m — число диад.

Другие упомянутые выше правила, обеспечивающие универсальность единой программы анализа механизмов первого класса, здесь не конкретизируются.

Список обозначений характерных точек на схеме механизма назовем *структурным кодом механизма* и обозначим через SK .

Тип исследуемого механизма будем задавать при помощи признака $TYPE$, которому присваивается значение 1 (для механизмов первого типа) или 2 (для механизмов второго типа).

Структурный код SK механизма вместе с признаком $TYPE$ может использоваться в качестве символьной информации, вводимой в ЭВМ в составе исходных данных и служащей для полноценного описания структуры исследуемого механизма. На базе этой информации внутри программы формируется так называемая *структурная матрица* S , элементы которой выступают в роли признаков, автоматически управляющих последовательностью обращения к унифицированным подпрограммам анализа звена и диад, о которых говорилось ранее.

Все постоянные параметры, обозначенные по определенной системе, могут быть представлены в форме матрицы L — *матрицы параметров* механизма.

Кроме SK и $TYPE$ и L , необходимо ввести еще *матрицу сборки* M , элементами которой являются значения признаков M_k вариантов сборки диад механизма ($k = 1, 2, \dots, m$).

В состав исходных данных, вводимых в ЭВМ, входят: m , $TYPE$, SK , L , M , а также N , $t_1, \dots, t_N$ и некоторые другие величины (например, признаки, с помощью которых производится отбор переменных параметров, выводимых на печать в форме таблиц или графиков).

§ 17.11. АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ АКУ

В п. 16.6.2 были приведены 12 структурных схем плоских рычажных механизмов, применяемых в конструкциях или опытных разработках АКУ в качестве механизма принудительного

отделения груза (см. рис. 16.16). Все механизмы показаны на рисунке вместе с силовым приводом (цилиндр и поршень), но без транспортируемого груза. В § 16.7 дана подробная классификация указанных механизмов, главным образом, по структурным признакам (см. табл. 16.2, 16.3 и 16.4).

В данном параграфе излагаются алгоритмы кинематического исследования некоторых из показанных на рис. 16.16 схем. Рассмотрены, в частности, следующие наиболее характерные схемы: схема № 1 (четырёхзвенный механизм с качающимся цилиндром), схема № 2 (четырёхзвенный ползунно-коромысловый механизм), схема № 7 (шестизвенный механизм с качающимся цилиндром), схема № 9 (шестизвенный механизм второго класса второго типа), схема № 10 (восьмизвенный механизм с качающимся цилиндром). Отдельно рассматривается задача об определении параметров движения транспортируемого груза (ее решение не зависит от выбора схемы рычажного механизма, к которому подвешивается груз). Все представленные ниже решения получены на основе унифицированных алгоритмов анализа структурных групп различных видов, а также анализа отдельного звена (см. § 17.8 и 17.9).

17.11.1. Четырёхзвенный механизм с качающимся цилиндром

Постоянными параметрами данного механизма (см. рис. 17.24, а также схему № 1 на рис. 16.16) являются: x_{01} , y_{01} , x_{02} , y_{02} , $(l_y)_0 = (O_1 D)_{\min}$, $l_3 = O_2 D$, X_{3A} , Y_{3A} , X_{3B} , Y_{3B} , $M = +1$ (M — признак варианта сборки механизма).

Закон перемещения поршня 2 по отношению к цилиндру 1 задан в виде

$$s = s(t); \quad 0 \leq t \leq t_N, \quad (17.41)$$

где $s(t)$ — монотонная функция, причем $s(0) = 0$, $s(t_N) = S$ (рис. 17.25).

Задача анализа механизма состоит в определении при произвольном $t \in [0, t_N]$ (или при соответствующем значении $s = s(t)$) следующих переменных параметров: 1) Φ_1 , Φ_3 , μ , x_A , y_A , x_B , y_B ; 2) $\dot{\Phi}_1$, $\dot{\Phi}_3$, $\dot{\mu}$, $\dot{x}_A$, $\dot{y}_A$, $\dot{x}_B$, $\dot{y}_B$; 3) $\ddot{\Phi}_1$, $\ddot{\Phi}_3$, $\ddot{\mu}$, $\ddot{x}_A$, $\ddot{y}_A$, $\ddot{x}_B$, $\ddot{y}_B$.

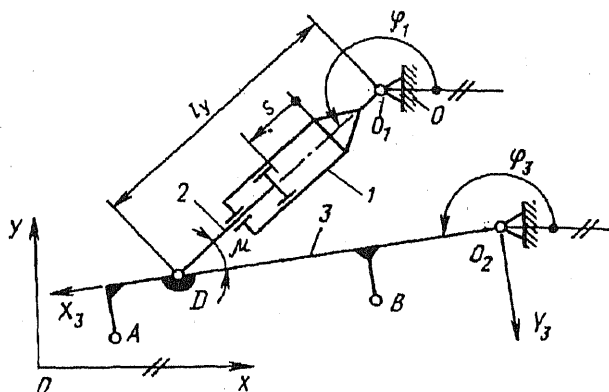


Рис. 17.24

Исследуемый механизм есть механизм второго типа. Поэтому сначала найдем длину l_y условного звена Y , образуемого жестким соединением друг с другом звеньев 1 и 2: $l_y = (l_y)_0 + s$.

Далее необходимо рассмотреть диаду вида ВВВ, состоящую из звеньев Y и 3. Для решения задачи анализа этой диады воспользуемся алгоритмом, изложенным в пп. 17.8.2 и 17.8.4. Нужно только учесть различия в обозначениях, которые легко устанавливаются из сравнения рис. 17.24 с рис. 17.17 (например, обозначения $A, B, C, a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2$ следует заменить на $O_1, D, O_2, l_y, l_3, \phi_1, \phi_3$ соответственно).

Искомые величины $\phi_1, \phi_3, \mu, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_3, \ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_3$ определяются в такой последовательности:

$$q = \sqrt{(x_{02} - x_{01})^2 + (y_{02} - y_{01})^2}; \quad (17.42)$$

проверка условия:

$$|l_y - l_3| < q < l_y + l_3; \quad (17.43)$$

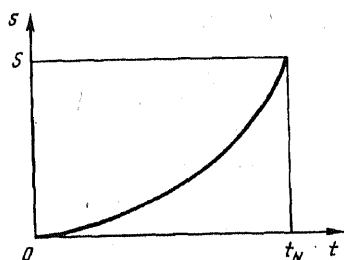


Рис. 17.25

$$\mu = \arccos \frac{l_y^2 + l_3^2 - q^2}{2l_y l_3}; \quad (17.44)$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 = & \left[(x_{02} - x_{01}) (l_y + l_3 \cos \mu) + \right. \\ & \left. + M (y_{02} - y_{01}) l_3 \sin \mu \right] / q^2, \\ \sin \varphi_1 = & \left[(y_{02} - y_{01}) (l_y - l_3 \cos \mu) - \right. \\ & \left. - M (x_{02} - x_{01}) l_3 \sin \mu \right] / q^2. \end{aligned} \quad (17.45)$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 - M \mu; \quad (17.46)$$

$$\dot{\varphi}_1 = M \dot{s} \operatorname{ctg} \mu / l_y; \quad \dot{\varphi}_3 = M \dot{s} / (l_3 \sin \mu);$$

$$\ddot{\varphi}_1 = M \left[\ddot{s} \cos \mu + l_3 \dot{\varphi}_3^2 - l_3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 (1 + \sin^2 \mu) \right] / (l_y \sin \mu);$$

$$\ddot{\varphi}_3 = M \left[\ddot{s} + l_3 \dot{\varphi}_3^2 \cos \mu - l_y \dot{\varphi}_1^2 \right] / (l_3 \sin \mu).$$

На заключительном этапе находим параметры движения точек А и В звена 3 на основании алгоритма анализа звена (см. п. 17.8.5). В соответствии с формулами (17.21) — (17.23), с учетом разницы в обозначениях, получаем:

$$\begin{cases} x_A = \dot{x}_{02} + X_{3A} \cos \varphi_3 - Y_{3A} \sin \varphi_3, \\ y_A = y_{02} + X_{3A} \sin \varphi_3 + Y_{3A} \cos \varphi_3; \end{cases} \quad (17.47)$$

$$\dot{x}_A = - (y_A - y_{02}) \dot{\varphi}_3, \quad \dot{y}_A (x_A - x_{02}) \dot{\varphi}_3;$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_A = - (x_A - x_{02}) \dot{\varphi}_3^2 - (y_A - y_{02}) \ddot{\varphi}_3, \\ \ddot{y}_A = - (y_A - y_{02}) \dot{\varphi}_3^2 + (x_A - x_{02}) \ddot{\varphi}_3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = x_{02} + X_{3B} \cos \varphi_3 - Y_{3AB} \sin \varphi_3, \\ y_B = y_{02} + X_{3B} \sin \varphi_3 + Y_{3B} \cos \varphi_3; \end{cases}$$

$$\dot{x}_B = -(y_B - y_{02}) \dot{\varphi}_3, \quad \dot{y}_B = (x_B - x_{02}) \dot{\varphi}_3;$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_B = -(x_B - x_{02}) \dot{\varphi}_3^2 - (y_B - y_{02}) \ddot{\varphi}_3, \\ \ddot{y}_B = -(y_B - y_{02}) \dot{\varphi}_3^2 + (x_B - x_{02}) \ddot{\varphi}_3. \end{cases}$$

17.11.2. Ползунно-коромысловый механизм

Рассматриваемый механизм (см. рис. 17.26, а также схему № 2 на рис. 16.16) есть механизм первого типа. Он содержит стойку, входное звено 1 (ползун) и диadu вида ВВВ, состоящую из звеньев 2 и 3. Ось Ox неподвижной системы координат Oxy направим параллельно оси $O_1\xi$ поступательной пары (точка O_1 — начало отсчета перемещения s ползуна 1).

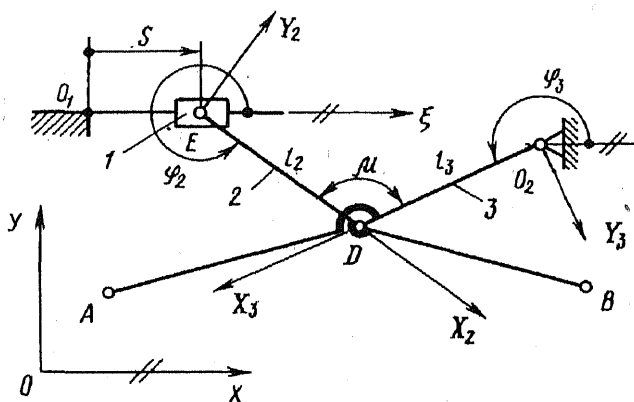


Рис. 17.26

Механизм имеет следующие постоянные параметры: x_{01} , y_{01} , x_{02} , y_{02} , l_2 , l_3 , X_{3A} , Y_{3A} , X_{2B} , Y_{2B} . Поворот вектора ED вокруг

точки O_2 виден происходящим против часовой стрелки; поэтому признак сборки $M = +1$.

Сначала находим координаты точки E по очевидным формулам:

$$x_E = x_{01} + s, \quad y_E = y_{01}. \quad (17.48)$$

Затем воспользуемся унифицированным алгоритмом анализа диады вида ВВВ (см. пп. 17.8.2 и 17.8.3). С учетом разницы в обозначениях запишем алгоритм расчета параметров φ_2 , φ_3 , μ , $\dot{\varphi}_2$, $\dot{\varphi}_3$, $\ddot{\varphi}_2$, $\ddot{\varphi}_3$:

$$q = \sqrt{(x_{02} - x_E)^2 + (y_{02} - y_E)^2}; \quad (17.49)$$

проверка условия:

$$|l_2 - l_3| < q < l_2 + l_3; \quad (17.50)$$

$$\mu = \arccos \frac{l_2^2 + l_3^2 - q^2}{2l_2 l_3}; \quad (17.51)$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi_2 = & \left[(x_{02} - x_E)(l_2 - l_3 \cos \mu) + \right. \\ & \left. + M(y_{02} - y_E)l_3 \sin \mu \right] / q^2, \end{aligned} \quad (17.52)$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi_2 = & \left[(y_{02} - y_E)(l_2 - l_3 \cos \mu) - \right. \\ & \left. - M(x_{02} - x_E)l_3 \sin \mu \right] / q^2. \end{aligned}$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 - M\mu; \quad (17.53)$$

$$\dot{\varphi}_2 = M\dot{s} \cos \varphi_3 / (l_2 \sin \mu); \quad \dot{\varphi}_3 = M\dot{s} \cos \varphi_2 / (l_3 \sin \mu);$$

$$\ddot{\varphi}_2 = M \left(\ddot{s} \cos \varphi_3 + l_3 \dot{\varphi}_3^2 - l_3 \dot{\varphi}_2^2 \cos \mu \right) / (l_2 \sin \mu);$$

$$\ddot{\varphi}_3 = M \left(\ddot{s} \cos \varphi_2 + l_3 \dot{\varphi}_3^2 \cos \mu - l_2 \dot{\varphi}_2^2 \right) / (l_3 \sin \mu).$$

Далее находим параметры движения точек A и B на основании формул (17.21) — (17.23), соответственным образом за-

менив обозначения. Положение, скорость и ускорение точки A определяются по формулам, приведенным в п. 17.11.1. Для точки B получаем:

$$\begin{cases} x_B = x_E + X_{2B} \cos \varphi_2 - Y_{2B} \sin \varphi_2, \\ y_B = y_E + X_{2B} \sin \varphi_2 + Y_{2B} \cos \varphi_2; \end{cases} \quad (17.54)$$

$$\dot{x}_B = \dot{s} - (y_B - y_E) \dot{\varphi}_2, \quad \dot{y}_B = (x_B - x_E) \dot{\varphi}_2;$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_B = \ddot{s} - (x_B - x_E) \dot{\varphi}_2^2 - (y_B - y_E) \ddot{\varphi}_2, \\ \ddot{y}_B = - (y_B - y_E) \dot{\varphi}_2^2 + (x_B - x_E) \ddot{\varphi}_2. \end{cases}$$

17.11.3. Шестизвенный механизм с качающимся цилиндром

Данный механизм (см. рис. 17.27, а также схему № 7 на рис. 16.16) относится к механизмам второго типа. В соответствии с модифицированным принципом Ассура (см. п. 16.4.4) ликвидируем относительную подвижность звеньев 1 и 2, т.е. зафиксируем обобщенную координату s механизма. Тогда, вместо звеньев 1 и 2, мы получим условное звено Y , длина кото-

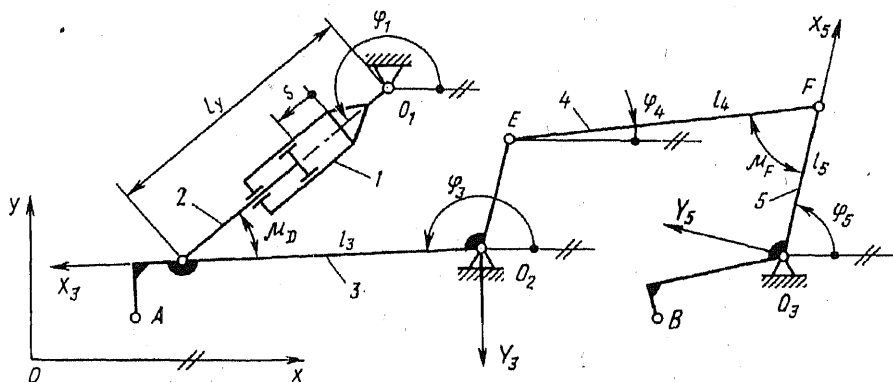


Рис. 17.27

рого $l_y = (l_y)_0 + s$. Ведомая цепь механизма, состоящая из звеньев У, З, 4 и 5, разделяется на две диады вида ВВВ: первая диада содержит звенья У и З, вторая диада — звенья 4 и 5.

Постоянными параметрами механизма являются: $x_{01}, y_{01}, x_{02}, y_{02}, x_{03}, y_{03}, (l_y)_0 = (O_1 D)_{\min}, l_3 = O_2 D, X_{3A}, Y_{3A}, X_{3E}, Y_{3E}, l_4, l_5, X_{5B}, Y_{5B}$.

Признаки сборки первой и второй диад равны: $M_1 = +1, M_2 = -1$ (поворот вектора $O_1 D$ вокруг точки O_2 виден происходящим против часовой стрелки, а вектора EF вокруг точки O_3 — по часовой стрелке).

Требуется для произвольного момента времени $t \in [0, t_N]$ (или для соответствующего значения $s = s(t)$) найти следующие переменные параметры: 1) $\varphi_1, \varphi_3, \mu_D, x_A, y_A, x_E, y_E, \varphi_4, \varphi_5, \mu_F, x_B, y_B, x_F, y_F$; 2) $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_3, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{\varphi}_4, \dot{\varphi}_5, \dot{x}_B, \dot{y}_B$; 3) $\ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_3, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{\varphi}_4, \ddot{\varphi}_5, \ddot{x}_B, \ddot{y}_B$.

Алгоритм расчета параметров $\varphi_1, \varphi_3, \mu_D, x_A, y_A, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_3, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_3, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A$, относящихся к первому четырехзвеннику $O_1 D O_2$, фактически уже был изложен ранее при рассмотрении четырехзвенного механизма с качающимся цилиндром (см. п. 17.11.1), нужно только в соответствующих формулах заменить q на q_1 , μ на μ_D , M на M_1 .

Далее определяются параметры движения точки E звена З на основании алгоритма анализа звена (см. п. 17.8.5):

$$\begin{cases} x_E = x_{02} + X_{3E} \cos \varphi_3 - Y_{3E} \sin \varphi_3, \\ y_E = y_{02} + X_{3E} \sin \varphi_3 + Y_{3E} \cos \varphi_3; \end{cases} \quad (17.55)$$

$$\dot{x}_E = - (y_E - y_{02}) \dot{\varphi}_3, \quad \dot{y}_E = (x_E - x_{02}) \dot{\varphi}_3;$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_E = - (x_E - x_{02}) \dot{\varphi}_3^2 - (y_E - y_{02}) \ddot{\varphi}_3, \\ \ddot{y}_E = - (y_E - y_{02}) \dot{\varphi}_3^2 + (x_E - x_{02}) \ddot{\varphi}_3. \end{cases}$$

Следующий этап решения задачи — это анализ второй ди-
ады. Расчет осуществляется в соответствии с алгоритмом, из-
ложенным в пп. 17.8.2 и 17.8.3:

$$q = \sqrt{(x_{03} - x_E)^2 + (y_{03} - y_E)^2}; \quad (17.56)$$

проверка условия

$$|l_4 - l_5| < q_2 < l_4 + l_5; \quad (17.57)$$

$$\mu_F = \arccos \frac{l_4^2 + l_5^2 - q_2^2}{2l_4 l_5}; \quad (17.58)$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi_4 = & \left[(x_{03} - x_E)(l_4 - l_5 \cos \mu_F) + \right. \\ & \left. + M_2 (y_{03} - y_E) l_5 \sin \mu_F \right] / q_2^2, \end{aligned} \quad (17.59)$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi_4 = & \left[(y_{03} - y_E)(l_4 - l_5 \cos \mu_F) - \right. \\ & \left. - M_2 (x_{03} - x_E) l_5 \sin \mu_F \right] / q_2^2. \end{aligned}$$

$$\varphi_5 = \varphi_4 - M_2 \mu_F; \quad (17.60)$$

$$\dot{\varphi}_4 = M_2 (\dot{x}_E \cos \varphi_5 + \dot{y}_E \sin \varphi_5) / (l_4 \sin \mu_F);$$

$$\dot{\varphi}_5 = M_2 (\dot{x}_E \cos \varphi_4 + \dot{y}_E \sin \varphi_4) / (l_5 \sin \mu_F);$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_4 = & M_2 (\ddot{x}_E \cos \varphi_5 + \ddot{y}_E \sin \varphi_5 + l_5 \dot{\varphi}_5^2 - \\ & - l_4 \dot{\varphi}_4^2 \cos \mu_F) / (l_4 \sin \mu_F); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_5 = & M_2 (\ddot{x}_E \cos \varphi_4 + \ddot{y}_E \sin \varphi_4 + l_5 \dot{\varphi}_5^2 \cos \mu_F - \\ & - l_4 \dot{\varphi}_4^2) / (l_5 \sin \mu_F). \end{aligned}$$

На заключительном этапе решения находим координаты точ-
ки F , а также координаты, скорости и ускорения точки B звена
5. Для этого применяем алгоритм анализа звена (см. п. 17.8.5),
изменив соответствующим образом обозначения:

$$x_F = x_{03} + l_5 \cos \varphi_5, \quad y_F = y_{03} + l_5 \sin \varphi_5;$$

$$\begin{cases} x_B = x_{03} + X_{5B} \cos \varphi_5 - Y_{5B} \sin \varphi_5, \\ y_B = y_{03} + X_{5B} \sin \varphi_5 + Y_{5B} \cos \varphi_5; \end{cases} \quad (17.61)$$

$$\dot{x}_B = -(y_B - y_{03}) \dot{\varphi}_5, \quad \dot{y}_B = (x_B - x_{03}) \dot{\varphi}_5;$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_B = -(x_B - x_{03}) \dot{\varphi}_5^2 - (y_B - y_{03}) \ddot{\varphi}_5, \\ \ddot{y}_B = -(y_B - y_{03}) \dot{\varphi}_5^2 + (x_B - x_{03}) \ddot{\varphi}_5. \end{cases}$$

17.11.4. Шестизвенный механизм второго класса второго типа

В соответствии с модифицированным принципом Ассура (см. п. 16.4.4) в структурной схеме рассматриваемого механизма (см. рис. 17.28, а также схему № 9 на рис. 16.16) можно выделить четырехзвенную группу Ассура, состоящую из звеньев У, 3, 4 и 5, где У — условное звено, получаемое путем объединения звеньев 1 и 2 при каждом фиксированном значении s .

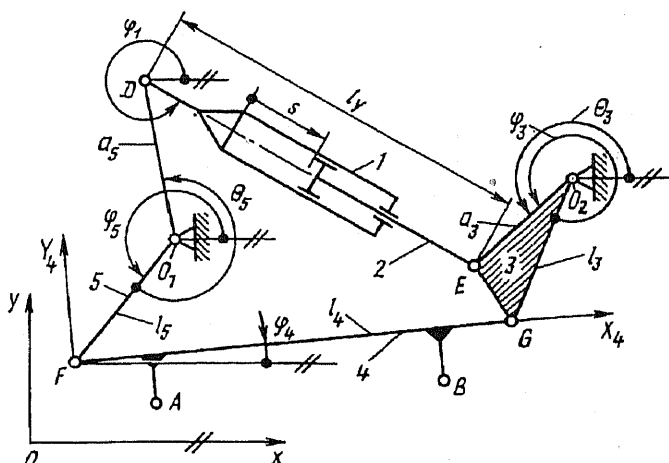


Рис. 17.28

Рассматриваемый механизм имеет следующие постоянные параметры: $x_{01}, y_{01}, x_{02}, y_{02}, (l_y)_0 = (DE)_{\min}, l_3, \Theta_3, a_3, l_4, l_5, \Theta_5, a_5, X_{4A}, Y_{4A}, X_{4B}, Y_{4B}$.

Закон $s = s(t)$ относительного перемещения поршня (звено 2) по отношению к цилиндру (звено 1) определяется формулой (17.41), а длина l_y условного звена У — формулой $l_y = (l_y)_0 + s$.

Требуется для произвольного $t \in [0, t_N]$ или $s \in [0, S]$ найти следующие переменные параметры: 1) $\Phi_1, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, x_A, y_A, x_B, y_B$; 2) $\dot{\Phi}_1, \dot{\Phi}_3, \dot{\Phi}_4, \dot{\Phi}_5, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{x}_B, \dot{y}_B$. В соответствии с введенной в § 17.5 классификацией задач кинематического анализа рычажных механизмов в данном случае речь идет о задаче № 2.

При фиксированных значениях l_y и $\dot{s}$ анализ рассматриваемого шестизвенного механизма сводится к анализу четырехзвенной группы Ассура, алгоритм которого был изложен в пп. 17.9.1 и 17.9.4. Нужно только заменить обозначения, а именно: A, B, C, D, E, F (см. рис. 17.21 и § 17.9) заменяются на O_1, O_2, F, D, G, E (см. рис. 17.28); $a_1, \Theta_1, b_1, a_2, a_3, a_4, \Theta_4, b_4$ заменяются на $l_5, \Theta_5, a_5, l_4, l_y, l_3, \Theta_3, a_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ заменяются на $\Phi_5, \Phi_4, \Phi_1, \Phi_3$ и т.д.

Число возможных вариантов сборки шестизвенного механизма при данном s совпадает с числом H вариантов сборки четырехзвенной группы и может быть равно 0, 2, 4 или 6 (в особых положениях механизма — 1, 3 или 5). Случай $H = 0$ означает, что механизм при данном s не существует.

Рассмотрим теперь задачу анализа № 4 (см. § 17.5): определить функции положения $\phi_i = \phi_i(s)$, $i = 1, 3, 4, 5$, для всех возможных сборок шестизвенного механизма вместе с областями их существования.

Задача № 4 решается в три этапа.

На первом этапе многократно решается рассмотренная выше задача № 2 для ряда дискретных значений s_v перемещения s , равных $s_v = s(t_v)$, где $v = 0, 1, \dots, N$. При этом будут получены следующие значения: $\phi_i^k(s_v)$, где $i = 1, 3, 4, 5$; $k = 0, 1, \dots, H_v$; $v = 0, 1, \dots, N$. Здесь H_v — число вариантов

сборки механизма при $s = s_v$; k — порядковый номер варианта сборки.

На втором этапе производится распределение полученного на первом этапе массива числовых результатов по отдельным сборкам механизма. Отсутствие для механизмов второго класса какого-либо признака, свидетельствующего о принадлежности найденного значения $\phi_i^k(s_v)$ той или иной сборке (аналогичного признаку M для механизмов первого класса — см. п. 17.3.4), делает упомянутое распределение по сборкам довольно сложной проблемой. Такое распределение может производиться или человеком вручную, или в интерактивном либо автоматическом режиме на ЭВМ. В последнем случае применяется процедура *идентификации сборок* [7].

Цель идентификации сборок: преобразовать числовую информацию, упорядоченную по одному принципу, в информацию, упорядоченную по другому принципу. Поясним сказанное на примере массива значений угла ϕ_1 , найденных на

первом этапе. В этом массиве всего имеется $R = \sum_{v=0}^N H_v$ значений

$\phi_1^k(s_v)$ угла ϕ_1 ($k = 0, 1, \dots, H_v$; $v = 0, 1, \dots, N$). Они упорядочены в порядке возрастания значений s_v аргумента s (внешний цикл по параметру v в пределах от 0 до N), а в пределах каждого значения s_v — в порядке возрастания номера k варианта сборки (внутренний цикл по параметру k в пределах от 1 до H_v при условии, что $H_v > 0$). После распределения по сборкам тот же массив значений угла ϕ_1 будет упорядочен по другому принципу: по признаку принадлежности к 1-й, 2-й, ... G -й сборке механизма (где G — общее число сборок на отрезке $[0, S]$), а внутри каждой сборки — в порядке возрастания значений s_v перемещения s , лежащих в пределах области существования данной сборки. При этом общее число значений угла ϕ_1 остается прежним, но теперь оно будет определяться

по формуле: $R = \sum_{r=1}^G N_r$, где r — порядковый номер сборки; N_r

— число дискретных значений s_v , принадлежащих области существования r -й сборки.

На *третьем этапе* определяются границы области существования (по параметру s) каждой r -й сборки механизма ($r = 0, 1, \dots, G$). Некоторые изборок существуют при всех $s \in [0, S]$; другие сборки существуют при $s \in [A, B]$, где $0 < A_r < B_r < S$.

Итак, в результате решения задачи № 4 определяются: 1) число G борок механизма; 2) значения величин s , φ_1 , φ_3 , φ_4 , φ_5 , отвечающие левой и правой границам каждой изборок; 3) таблицы значений углов φ_1 , φ_3 , φ_4 , φ_5 для последовательных значений параметра s — отдельно для каждой сборки.

В том случае, когда требуется выполнить анализ положений шестизвального механизма только в одной определенной его сборке, т.е. решить задачу № 3 (см. § 17.5), необходимо заранее знать хотя бы приближенно положения звеньев механизма в указанной его сборке при каком-либо одном значении параметра s . При наличии такой априорной информации, играющей роль своеобразного отличительного признака искомой сборки, ее функции положения $\varphi_i(s)$, $i = 1, 3, 4, 5$ можно найти, например, путем простого выбора среди наборов функций положения для всех возможныхборок механизма (предполагается, что предварительно была решена задача № 4). Но функции положения звеньев механизма для конкретной его сборки могут быть найдены и непосредственно, т.е. без предварительного решения задачи № 4.

Угловые скорости $\dot{\varphi}_i$ звеньев шестизвального механизма определяются при данных s и $\dot{s}$ после того, как найдены углы φ_i для исследуемой сборки ($i = 1, 3, 4, 5$). Расчет угловых скоростей производится по формулам (17.39).

Для определения координат и проекций скоростей точек A и B звена 4 нужно воспользоваться формулами (17.21) и (17.22), заменив в них обозначения. Находим две точки A :

$$x_A = x_F + X_{4A} \cos \varphi_4 - Y_{4A} \sin \varphi_4,$$

$$y_A = y_F + X_{4A} \sin \varphi_4 + Y_{4A} \cos \varphi_4;$$

$$\dot{x}_A = \dot{x}_F - (y_A - y_F) \dot{\varphi}_4, \quad \dot{y}_A = \dot{y}_F + (x_A - x_F) \dot{\varphi}_4,$$

где

$$x_F = x_{01} + l_5 \cos \varphi_5, \quad y_F = y_{01} + l_5 \sin \varphi_5;$$

$$\dot{x}_F = - (y_F - y_{01}) \dot{\varphi}_5, \quad \dot{y}_F = (x_F - x_{01}) \dot{\varphi}_5.$$

Формулы для точки *B* аналогичны формулам, приведенным выше; нужно только заменить в них *A* на *B*.

17.11.5. Восьмизвенный механизм с качающимся цилиндром

В структуре рассматриваемого механизма первого класса второго типа (см. рис. 17.29, а также схему № 10 на рис. 16.16) можно выделить три двухзвенных группы Ассур: 1) диadu вида ВВВ (звенья *У* и 3); 2) диadu вида ВВП (звенья 4 и 5); 3) диadu вида ВВП (звенья 6 и 7). Здесь *У* — условное звено, получаемое путем объединения звеньев 1 и 2, которые образуют входную пару (см. п. 16.4.4).

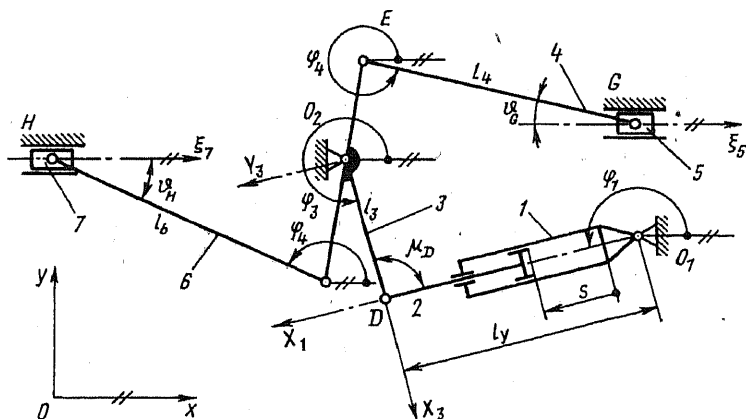


Рис. 17.29

Существующий механизм, применяемый в АКУ (см. схему № 10 на рис. 16.16), имеет некоторые частные особенности по сравнению с механизмом более общего вида, показанном на рис. 17.29, а именно: 1) опора O_2 расположена на общей оси двух поступательных пар, образуемых ползунами 5 и 7 со стойкой; 2) центры шарниров F и D совпадают; 3) $\angle DO_2E = 180^\circ$. В механизме по рис. 17.29 сохранено только одно структурное ограничение: оси ξ_5 и ξ_7 двух указанных поступательных пар взаимно параллельны. Неподвижная система координат Oxy введена так, что $x \parallel \xi_5 \parallel \xi_7$, причем положительные направления осей x , ξ_5 и ξ_7 совпадают.

Вариант сборки восьмизвенного механизма определяется значениями признаков M_1 , M_2 , M_3 вариантов сборки первой, второй и третьей диад, которые имеют следующие значения: $M_1 = -1$, $M_2 = +1$, $M_3 = -1$ (см. п. 17.3.3).

Постоянными параметрами механизма являются: x_{01} , y_{01} , x_{02} , y_{02} , y_G , y_H , $(l_y)_0 = (O_1D)_{\min}$, l_3 , X_{3E} , Y_{3E} , X_{3F} , Y_{3F} , l_4 , l_6 .

При известных значениях s , $\dot{s}$ и $\ddot{s}$ требуется определить следующие переменные параметры механизма: 1) φ_1 , φ_3 , μ_D , x_D , y_D , x_E , y_E , x_F , y_F , φ_4 , ϑ_G , x_G , φ_6 , ϑ_H , x_H ; 2) $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_3$, $\dot{\varphi}_4$, $\dot{\varphi}_6$, $\dot{x}_G$, $\dot{x}_H$; 3) $\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_3$, $\ddot{\varphi}_4$, $\ddot{\varphi}_6$, $\ddot{x}_G$, $\ddot{x}_H$.

Расчет искомых параметров выполним в четыре этапа.

На первом этапе определяются параметры φ_1 , φ_3 , μ_D , $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_3$, $\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_3$, относящиеся к первому четырехзвеннику O_1DO_2 , входящему в состав рассматриваемого восьмизвенного механизма. Алгоритм расчета указанных параметров фактически уже был изложен в п. 17.11.3 при анализе шестизвенного механизма с качающимся цилиндром.

На втором этапе определяются параметры движения точек D , E и F звена 3 на основании унифицированного алгоритма анализа звена (см. п. 17.8.5). Для точек D и E получаем:

$$x_D = x_{02} + l_3 \cos \varphi_3, \quad y_D = y_{02} + l_3 \sin \varphi_3;$$

$$x_E = x_{02} + X_{3E} \cos \varphi_3 - Y_{3E} \sin \varphi_3,$$

$$y_E = y_{02} + X_{3E} \sin \varphi_3 + Y_{3E} \cos \varphi_3;$$

$$\dot{x}_E = -\left(y_E - y_{02}\right) \dot{\varphi}_3, \quad \dot{y}_E \left(x_E - x_{02}\right) \dot{\varphi}_3;$$

$$\ddot{x}_E = -\left(x_E - x_{02}\right) \dot{\varphi}_3^2 - \left(y_E - y_{02}\right) \ddot{\varphi}_3,$$

$$\ddot{y}_E = -\left(y_E - y_{02}\right) \dot{\varphi}_3^2 + \left(x_E - x_{02}\right) \ddot{\varphi}_3.$$

Формулы для точки F аналогичны формулам для точки E : нужно лишь E заменить на F .

На третьем этапе производится анализ диады вида ВВІІ, содержащей звенья 4 и 5, на основании формул, приведенных в п. 17.8.2, а также в табл. 17.4 и 17.5. С учетом замены обозначений получаем следующий алгоритм расчета параметров φ_4 , ϑ_G , x_G , $\dot{\varphi}_4$, $\dot{x}_G$, $\ddot{\varphi}_4$, $\ddot{x}_G$:

$$q_2 = y_E - y_G;$$

проверка условия: $|q_2| < l_4$;

$$\vartheta_G = \arcsin \left(|q_2| / l_4 \right);$$

$$\dot{\varphi}_4 = \frac{1}{2} \left(1 - M_2 \right) \pi - M_2 \vartheta_G \operatorname{sign}(q_2);$$

$$x_G = x_E + M_2 \sqrt{l_4^2 - q_2^2}; \quad \dot{\varphi}_4 = -M_2 \dot{y}_E / \left(l_4 \cos \vartheta_G \right);$$

$$\dot{x}_G = M_2 \left(\dot{x}_E \cos \varphi_4 + \dot{y}_E \sin \varphi_4 \right) / \cos \vartheta_G;$$

$$\ddot{\varphi}_4 = M_2 \left(-\ddot{y}_E + l_4 \dot{\varphi}_4^2 \sin \varphi_4 \right) / \left(l_4 \cos \vartheta_G \right);$$

$$\ddot{x}_G = M_2 \left(\ddot{x}_E \cos \varphi_4 + \ddot{y}_E \sin \varphi_4 - l_4 \dot{\varphi}_4^2 \right) / \cos \vartheta_G.$$

На четвертом этапе выполняется анализ диады вида ВВІІ, содержащей звенья 6 и 7. Расчет параметров φ_6 , ϑ_H , x_H , $\dot{\varphi}_6$, $\dot{x}_H$, $\ddot{\varphi}_6$, $\ddot{x}_H$ производится по формулам, аналогичным тем, которые используются на третьем этапе расчета (нужно только в них заменить индексы 2, 4, E , G на 3, 6, F , H соответственно).

В п. 16.6.2 отмечалось, что в схеме № 10 (см. рис. 16.16), кроме собственно рычажного механизма, т.е. рассматриваемого здесь восьмизвенного механизма (см. рис. 17.29), в состав ме-

ханизма принудительного отделения груза входят еще два гидромеханизма. С их помощью горизонтальные перемещения s_5 и s_7 ползунов 5 и 7 преобразуются соответственно в вертикальные перемещения s_B и s_A точек (шарниров) B и A . Между s_5 и s_B , а также s_7 и s_A , имеет место прямая пропорциональность:

$$s_B = k_1 s_5, \quad s_A = k_2 s_7, \quad (17.62)$$

где k_1 и k_2 — постоянные коэффициенты;

$$s_5 = x_G - (x_G)_0, \quad s_7 = (x_H)_0 - x_H; \quad (17.63)$$

$$s_A = (y_A)_0 - y_A, \quad s_B = (y_B)_0 - y_B; \quad (17.64)$$

$(x_G)_0$, $(x_H)_0$, $(y_A)_0$, $(y_B)_0$ — начальные значения соответствующих координат, т.е. их значения при $t = 0$ или $s = 0$.

Из формул (17.62) — (17.64) следует, что

$$y_A = (y_A)_0 - k_2 (x_H)_0 + k_2 x_H,$$

$$y_B = (y_B)_0 + k_1 (x_G)_0 - k_1 x_G;$$

$$\dot{y}_A = k_2 \dot{x}_H, \quad \dot{y}_B = -k_1 \dot{x}_G;$$

$$\ddot{y}_A = k_2 \ddot{x}_H, \quad \ddot{y}_B = -k_1 \ddot{x}_G.$$

Поскольку x_A и x_B — постоянные величины, то

$$\dot{x}_A = \ddot{x}_A = \dot{x}_B = \ddot{x}_B = 0.$$

Параметры x_A , x_B , $(y_A)_0$, $(y_B)_0$, k_1 , k_2 считаются заданными.

17.11.6. Расчет параметров движения транспортируемого груза

В п. 16.6.2 было сказано, что систему присоединения груза к звеньям рычажного механизма можно представить условно в виде двухзвенной группы Ассур вида ВПВ, одним из звеньев которой является сам груз (см. рис. 16.17). Указанная группа присоединяется одним из внешних шарниров к точке A , а другим — к точке B рычажного механизма (точки A и B были

показаны на всех двенадцати известных схемах механизмов АКУ — см. рис. 16.16, 17.24, 17.26, 17.27 и 17.28).

Рассмотрим следующую задачу: по известным положениям, скоростям и ускорениям точек A и B рычажного механизма определить движение транспортируемого груза, а также его центра масс — точки C .

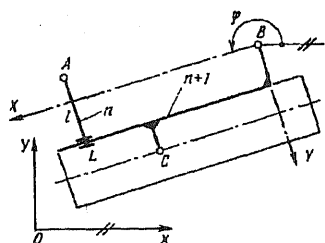


Рис. 17.30

Звенья n -звенного рычажного механизма имеют номера $0, 1, \dots, n-1$. Звеньям же упомянутой выше группы Ассура вида ВПВ присвоим два следующих номера, т.е. n и $n+1$ (рис. 17.30) причем звено $n+1$ — это транспортируемый груз. Со звеном $n+1$ неизменно свяжем подвижную систему координат BXY .

Уточним постановку задачи. Известны следующие постоянные и переменные параметры: $l, Y_L, X_C, Y_C, x_A, y_A, x_B, y_B, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \dot{x}_B, \dot{y}_B, \ddot{x}_A, \ddot{y}_A, \ddot{x}_B, \ddot{y}_B$. Задан также признак M варианта сборки диады вида ВПВ: $M = +1$ (см. п. 17.3.3). Требуется определить: 1) ϕ, X_L, x_C, y_C ; 2) $\dot{\phi}, \dot{X}_L, \dot{x}_C, \dot{y}_C$; 3) $\ddot{\phi}, \ddot{X}_L, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C$.

Сформулированная задача решается на основании алгоритма анализа диады вида ВПВ, изложенного в п.п. 17.8.2 и 17.8.3 (при использовании приведенных там формул нужно изменить обозначения, а именно: $B, C, X_2, Y_2, a_1, \gamma_2$ заменить на L, B, X, Y, l, ϕ соответственно). Получаем следующий алгоритм расчета параметров движения $\phi, X_L, \dot{\phi}, \dot{X}_L, \ddot{\phi}, \ddot{X}_L$ транспортируемого груза:

$$q = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}; \quad (17.65)$$

проверка условия $q > |c_1|$, где

$$c_1 = Ml - Y_L; \quad (17.66)$$

$$X_L = \sqrt{q^2 - c_1^2}; \quad (17.67)$$

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi &= \left[c_1 (y_B - y_A) - X_L (x_B - x_A) \right] / q^2, \\
 \sin \varphi &= \left[-c_1 (x_B - x_A) - X_L (y_B - y_A) \right] / q^2; \\
 \dot{\varphi} &= \left[(\dot{x}_B - \dot{x}_A) \sin \varphi - (\dot{y}_B - \dot{y}_A) \cos \varphi \right] / X_L; \\
 \dot{X}_L &= \left[(x_B - x_A) (\dot{x}_B - \dot{x}_A) + (y_B - y_A) (\dot{y}_B - \dot{y}_A) \right] / X_L; \\
 \ddot{\varphi} &= \left[(\ddot{x}_B - \ddot{x}_A) \sin \varphi - (\ddot{y}_B - \ddot{y}_A) \cos \varphi - c_1 \dot{\varphi}^2 - 2\dot{X}_L \dot{\varphi} \right] / X_L; \\
 \ddot{X}_L &= \left[(\dot{x}_B - \dot{x}_A) \dot{\varphi} - (\dot{y}_B - \dot{y}_A) \right] \sin \varphi - \\
 &\quad - \left[(\dot{y}_B - \dot{y}_A) \dot{\varphi} + (\ddot{x}_B - \ddot{x}_A) \right] \cos \varphi - c_1 \ddot{\varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{17.68}$$

Далее находим параметры движения центра масс C груза на основании алгоритма анализа звена, изложенного в п. 17.8.5:

$$\begin{aligned}
 x_C &= x_B + X_C \cos \varphi - Y_C \sin \varphi, \\
 y_C &= y_B + X_C \sin \varphi + Y_C \cos \varphi; \\
 \dot{x}_C &= \dot{x}_B - (y_C + y_B) \dot{\varphi}, \quad \dot{y}_C = \dot{y}_B + (x_C - x_B) \dot{\varphi}; \\
 \ddot{x}_C &= \ddot{x}_B - (x_C - x_B) \dot{\varphi}^2 - (y_C - y_B) \ddot{\varphi}, \\
 \ddot{y}_C &= \ddot{y}_B - (y_C - y_B) \dot{\varphi}^2 + (x_C - x_B) \ddot{\varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{17.69}$$

§ 17.12. РАСЧЕТ КРИТЕРИЯ ПЕРЕДАЧИ ДЛЯ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ АКУ

17.12.1. Особенности расчета критерия передачи для рычажных механизмов АКУ

Введенный в § 17.4 критерий передачи k , определяемый формулой (17.8), может быть использован для плоских рычажных механизмов, применяемых в АКУ в качестве механизмов принудительного отделения груза. Однако в связи с расчетом

критерия к необходимо рассмотреть некоторые специфические особенности исследуемых механизмов.

С целью выявления указанных особенностей рассмотрим следующие вопросы: 1) выбор режима функционирования механизма; 2) выбор выходного звена; 3) выбор линии действия силы сопротивления Q_c ; 4) выбор положения механизма, при котором следует ожидать получения минимального значения критерия k .

В п. 16.6.1 отмечалось, что имеются два режима функционирования механизма принудительного отделения груза: 1) режим удержания груза в транспортном положении с помощью замково-стопорного устройства; 2) режим катапультирования. При первом из этих режимов в опорах рычажного механизма принудительного отделения реакции сравнительно малы, так как основная часть статической нагрузки, связанной с удержанием груза в транспортном положении, приходится на звенья и опоры замково-стопорного устройства. Поэтому критерий передачи k следует определять для режима катапультирования, когда открыты замки стопорного устройства и оно не оказывает влияния на качество передачи движения и сил в рычажном механизме принудительного отделения груза.

Рассмотрим теперь вопрос о выборе выходного звена рычажного механизма принудительного отделения. Таким звеном будем считать груз, который кинематически связан с рычажным механизмом на этапе катапультирования, т.е. от момента начала движения звеньев механизма и груза до момента отделения груза от механизма. Схема кинематической связи груза с механизмом была описана ранее в п. 16.6.2. Заметим, что груз совершает плоскопараллельное движение (см. табл. 16.2).

В п. 17.4.2 отмечалось, что при плоскопараллельном движении выходного звена механизма необходимо выбрать линию действия силы сопротивления Q_c , модуль которой фигурирует в числителе формулы (17.8) для критерия k . Линию действия силы Q_c будем выбирать с учетом реальной картины сил, действующих на звенья рычажного механизма на этапе катапультирования.

При решении данного вопроса введем следующие допущения: 1) массой и силами тяжести подвижных звеньев механизма пренебрегаем по сравнению с массой и силой тяжести груза,

так как масса груза многократно превышает суммарную массу подвижных звеньев механизма; 2) силы трения не учитываем. Таким образом, можно считать, что на звенья рычажного механизма действуют только две активные силы: сила тяжести P груза, приложенная в его центре тяжести C ; движущая сила $F_{дв}$, действующая со стороны цилиндра на поршень силового привода и направленная по оси цилиндра.

Для расчета модуля силы $F_{дв}$ и реакций в кинематических парах по методу кинетостатики нужно в соответствии с принципом Даламбера приложить к звеньям механизма их силы инерции. Неизвестные при этом найдутся из уравнений кинетостатики, имеющих форму уравнений равновесия и составляемых для каждого из подвижных звеньев механизма.

Поскольку в данном случае учитывается только масса груза, то в рассмотрение вводятся лишь силы инерции груза. Они приводятся к главному вектору сил инерции $F^и = m a_C$, приложенному в точке C , и главному моменту сил инерции $M_C^и = -J_C \varepsilon$ относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости действия механизма. Здесь приняты обозначения: m — масса груза, J_C — момент инерции груза относительно упомянутой оси, a_C — ускорение центра масс груза, ε — угловое ускорение груза.

Кинематический и кинетостатический анализ рычажных механизмов различных схем, применяемых в АКУ, показал, что при расчете неизвестных сил (модуля движущей силы $F_{дв}$ и реакций в кинематических парах) можно, во-первых, пренебречь главным моментом $M_C^и$ сил инерции груза ввиду его относительной малости, и во-вторых, принять, что вектор $F^и$ направлен вертикально вверх (так как горизонтальная составляющая ускорения a_C пренебрежительно мала по сравнению с его вертикальной составляющей, направленной вниз). Введение этих допущений почти не искажает значений неизвестных сил. Таким образом, можно считать, что силы инерции груза приводятся только к одному вектору $F^и = m a_C j$, где a_C — модуль вектора a_C ; j — орт оси y , направленной вертикально вверх.

Поскольку оказалось, что силы P и F^n приложены в одной и той же точке C и направлены вертикально (P — вниз, F^n — вверх), то заменим их равнодействующей $F_c = P + F^n = m(-g + a_c)j$.

Сопоставим теперь две системы сил: 1) полученную выше систему сил $F_{дв}$ и F_c (включающую активные силы и силы инерции); 2) условную (унифицированную) систему активных сил $Q_{ур}$ и Q_c , введенную в связи с расчетом критерия передачи k (см. п. 17.4.2). Движущая сила $F_{дв}$ и уравнивающая сила $Q_{ур}$ имеют одну и ту же линию действия — по оси цилиндра. С целью достижения наилучшего соответствия второй системы сил первой системе примем, что линия действия условной силы сопротивления Q_c совпадает с линией действия силы F_c , т.е. считаем, что сила Q_c приложена в центре тяжести C груза и направлена вертикально.

Сформулированные выше уточнения позволяют применить описанную в п. 17.4.3 методику расчета критерия передачи k при произвольном значении обобщенной координаты s механизма и тем самым получить критериальную функцию $k = k(s)$, $0 \leq s \leq S$, где значение $s = 0$ соответствует моменту начала опускания груза, а значение $s = S$ — моменту отделения груза от механизма.

Анализ критериальных функций $k = k(s)$ для рычажных механизмов различных схем, применяемых в АКУ, показал, что во всех случаях наименьшее значение этой функции достигается в точке $s = 0$. Поэтому расчет критерия k имеет смысл производить только при $s = 0$. Что касается проверки условия (17.9), при выполнении которого качество передачи движения и сил механизмом считается благоприятным, то это условие упрощается к такому виду:

$$k(0) \geq k_d. \quad (17.70)$$

Итак, при расчете критерия k и проверке качества передачи движения и сил в рычажном механизме АКУ нужно выполнить следующее:

- 1) определить положения подвижных звеньев механизма при $s = 0$;
- 2) приложить к центру тяжести C транспортируемого груза силу сопротивления Q_c (произвольную по модулю), направив ее вертикально;
- 3) приложить к поршню силового привода уравновешивающую силу $Q_{ур}$, направив ее по оси цилиндра;
- 4) составить уравнения равновесия каждого из подвижных звеньев механизма, учитывая активные силы Q_c и $Q_{ур}$, а также реакции в кинематических парах;
- 5) решить полученную линейную систему уравнений равновесия относительно неизвестных — модуля силы $Q_{ур}$ и реакций в кинематических парах (модуль силы Q_c считается заданным);
- 6) найти модули R_{ik} главных векторов реакций R_{ik} в кинематических парах, а также величину R , равную наибольшему из этих модулей;
- 7) вычислить критерий k по формуле (17.8);
- 8) проверить, выполняется ли условие (17.70).

При статическом анализе сил, действующих на звенья рычажного механизма может быть применен погруппный способ (подобно тому, как это принято при кинематическом анализе механизма (§ 17.6)). В соответствии с погруппным способом силовой анализ производится последовательно для структурных групп, входящих в состав механизма, так как каждая группа Ассура есть статически определяемая система. Заметим, что порядок рассмотрения структурных групп при кинематическом анализе и силовом анализе различен: в первом случае группы Ассура рассматривают в порядке их наложения при образовании структурной схемы механизма, во втором случае анализ начинают с той группы Ассура, к звеньям которой приложены только известные активные силы, а число неизвестных реакций не превышает определенного предела.

Что касается рычажных механизмов АКУ, то порядок рассмотрения структурных групп при их силовом анализе, выполняемом в связи с расчетом критерия передачи, является следующим: сначала рассматривается диада вида ВПВ, одним из звеньев которой является транспортируемый груз; последней рассматривается группа Ассура, которая присоединяется своими внешними парами к входному звену и стойке (для механизмов первого типа) или содержит условное звено (для механизмов второго типа). Завершается силовой анализ механизма опреде-

лением уравновешивающей силы $Q_{ур}$, а также реакций во входной паре.

Ниже излагается методика определения реакций в кинематических парах для диад различных видов, встречающихся в рычажных механизмах АКУ. Кроме того, приводятся алгоритмы расчета критерия передачи k для нескольких известных схем указанных механизмов. При расчете критерия k используются результаты решения задачи о положениях звеньев диад (§ 17.8) и соответствующих механизмов АКУ (§ 17.11).

17.12.2. Силовой анализ диады вида ВВВ

Пусть известны геометрические параметры диады вида ВВВ (рис. 17.31): a_1 , a_2 , X_{1D} , Y_{1D} , X_{2E} , Y_{2E} , x_A , y_A , x_B , y_B , x_C , y_C , x_D , y_D , x_E , y_E , γ_1 , γ_2 , μ . Задан также признак M варианта сборки диады. К точкам D и E приложены известные силы F_D и F_E (это могут быть или активные силы или реакции связей).

Требуется определить реакции R_{i1} , R_{i2} и R_{k2} в шарнирах A , B и C (здесь: i и k — номера звеньев механизма, к которым присоединяется диада своими внешними парами A и C ; реакция R_{i2} на рис. 17.31 не показана).

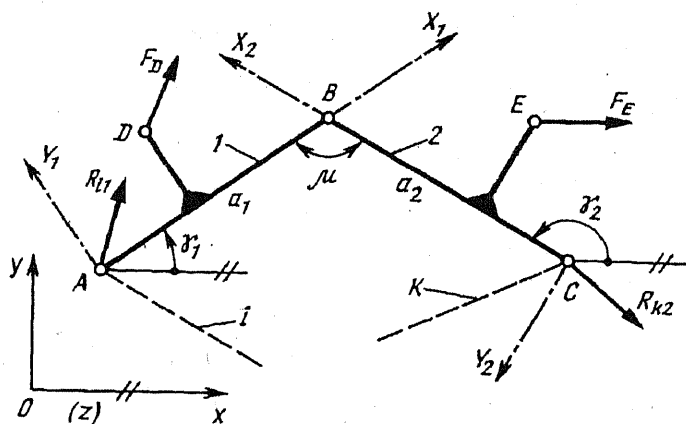


Рис. 17.31

Неизвестные реакции будем определять из уравнений равновесия, составленных для звеньев 1 и 2 диады:

$$F_D + R_{11} + R_{21} = 0, \quad (a)$$

$$M_A(F_D) + M_A(R_{21}) = 0, \quad (б)$$

$$F_E + R_{k2} + R_{12} = 0, \quad (в)$$

$$M_C(F_E) + M_C(R_{12}) = 0. \quad (г)$$

Введем обозначения

$$m_1 = M_A(F_D), \quad m_2 = M_C(F_E). \quad (д)$$

По формулам, известным из курса теоретической механики, получаем

$$m_1 = (\vec{AD} \times \mathbf{F}_D)_z = (x_D - x_A)F_D^y - (y_D - y_A)F_D^x, \quad (17.71)$$

$$m_2 = (\vec{CE} \times \mathbf{F}_E)_z = (x_E - x_C)F_E^y - (y_E - y_C)F_E^x, \quad (17.72)$$

$$\begin{aligned} M_A(R_{21}) &= -(\vec{AB} \times \mathbf{R}_{12})_z = -(x_B - x_A)R_{12}^y + (y_B - y_A)R_{12}^x = \\ &= a_1(R_{12}^x \sin \gamma_1 - R_{12}^y \cos \gamma_1), \end{aligned} \quad (e)$$

$$\begin{aligned} M_C(R_{12}) &= (\vec{CB} \times \mathbf{R}_{12})_z = (x_B - x_C)R_{12}^y - (y_B - y_C)R_{12}^x = \\ &= -a_2(R_{12}^x \sin \gamma_2 - R_{12}^y \cos \gamma_2), \end{aligned} \quad (ж)$$

где z — ось, направленная перпендикулярно координатной плоскости Oxy (рис. 17.31); $F_D^x, F_D^y, \dots$ — проекции сил на оси x и y .

На основании формул (17.71), (17.72), (e) и (ж) уравнения (б) и (г) принимают такой вид:

$$\begin{cases} a_1 (R_{12}^x \sin \gamma_1 - R_{12}^y \cos \gamma_1) = -m_1; \\ a_2 (R_{12}^x \sin \gamma_2 - R_{12}^y \cos \gamma_2) = m_2. \end{cases} \quad (3)$$

Из системы уравнений (3) находим

$$R_{12}^x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad R_{12}^y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (17.73)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1 a_2 \sin(\gamma_2 - \gamma_1) = -M a_1 a_2 \sin \mu, \\ \Delta_1 &= m_1 a_2 \cos \gamma_2 + m_2 a_1 \cos \gamma_1, \\ \Delta_2 &= m_1 a_2 \sin \gamma_2 + m_2 a_1 \sin \gamma_1. \end{aligned} \quad (17.74)$$

Далее из уравнений (а) и (в) получаем

$$R_{i1} = F_D + R_{12}, \quad R_{k2} = -F_E - R_{12}. \quad (и)$$

Отсюда находим проекции реакций R_{i1} и R_{k2} на оси x и y :

$$R_{i1}^x = -F_D^x + R_{12}^x, \quad R_{i1}^y = -F_D^y + R_{12}^y, \quad (17.75)$$

$$R_{k2}^x = -F_E^x - R_{12}^x, \quad R_{k2}^y = -F_E^y - R_{12}^y. \quad (17.76)$$

Теперь определяем модули трех искомых реакций:

$$R_{ab} = \sqrt{(R_{ab}^x)^2 + (R_{ab}^y)^2} \quad (ab = 12, i 1, k 2). \quad (17.77)$$

Итак, расчет реакций в шарнирах A , B , C диады выполняется по формулам (17.71), (17.77).

17.12.3. Силовой анализ диады вида ВВП

Пусть звено 2 (ползун) рассматриваемой диады образует поступательную пару со стойкой 0, а оси x и ξ взаимно параллельны (рис. 17.32). Считаются известными геометрические параметры φ_1 и ϑ , а также признак M варианта сборки

диады. К ползуну 2 приложена заданная сила F , направленная по оси ξ .

Требуется найти реакции R_{11} в шарнире A , R_{12} в шарнире B и R_{02} в поступательной паре, образуемой ползуном 2 и стойкой O (здесь i — номер звена механизма, к которому присоединяется звено 1 диады шарниром A ; реакция R_{12} на рис. 17.32 не показана). Отметим,

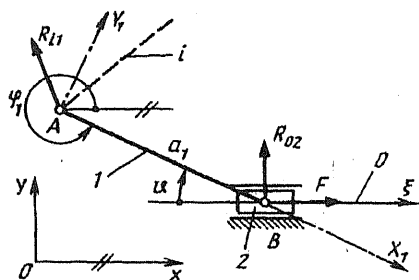


Рис. 17.32

что в данном случае силы взаимодействия между соприкасающимися поверхностями ползуна и стойки приводятся к равнодействующей R_{02} , которая направлена перпендикулярно оси ξ движения ползуна и проходит через точку B .

На звено 1 действуют только две силы R_{11} и R_{21} . Поэтому они направлены по линии AB , т.е. по оси X_1 . Отсюда получаем:

$$R_{11} = -R_{21} = R_{12} = R_{12}^X X_1^0, \quad (a)$$

где X_1^0 — орт оси X_1 . Проектируя векторное равенство (a) на оси x и y , получаем

$$R_{11}^x = R_{12}^x = R_{12}^X \cos \varphi_1, \quad R_{11}^y = R_{12}^y = R_{12}^X \sin \varphi_1. \quad (б)$$

Запишем теперь условие равновесия ползуна 2 :

$$F + R_{12} + R_{02} = 0. \quad (в)$$

При проектировании векторного уравнения (в) на оси x и y получаем два скалярных уравнения

$$F^x + R_{12}^x = 0, \quad R_{12}^y + R_{02}^y = 0. \quad (г)$$

из которых находим

$$R_{12}^x = -F^x, \quad R_{02}^y = -R_{12}^y. \quad (д)$$

На основании формул (б) и (д) получаем

$$R_{i1}^x = R_{12}^x = -F^x, \quad R_{i1}^y = R_{12}^y = -F^x \operatorname{tg} \varphi_1; \quad (17.78)$$

$$R_{02}^x = 0, \quad R_{02}^y = F^x \operatorname{tg} \varphi_1. \quad (17.79)$$

Находим теперь модули реакций:

$$R_{i1} = R_{12} = \left| \frac{F^x}{\cos \varphi_1} \right| = \frac{|F^x|}{\cos \vartheta}; \quad (17.80)$$

$$R_{02} = |F^x \operatorname{tg} \varphi_1| = |F^x| \operatorname{tg} \vartheta. \quad (17.81)$$

17.12.4. Силовой анализ диады вида ВПВ

Как отмечалось в п. 16.6.2, систему присоединения груза к звеньям механизма принудительного отделения в структурном отношении можно представить в виде диады ВПВ, одним из звеньев которой является сам груз. Пусть известны геометрические параметры рассматриваемой диады (рис. 17.33): φ , X_L , x_B , y_B , x_C , y_C . К точке C звена 2 диады (т.е. к центру тяжести груза) приложена заданная сила Q_c , направленная вертикально вниз.

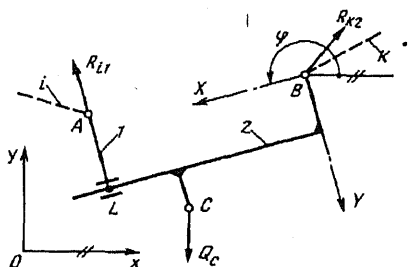


Рис. 17.33

Требуется определить реакции R_{i1} в шарнире A , R_{k2} в шарнире B и R_{12} в поступатель-

ной паре, образуемой звеньями 1 и 2 диады (здесь i и k — номера звеньев механизма, к которым присоединяется диада своими внешними парами A и B ; реакция R_{12} на рис. 17.33 не показана). Отметим, что в данном случае силы взаимодействия между соприкасающимися поверхностями звеньев 1 и 2, образующих поступательную пару, приводятся в равнодействующей R_{12} , которая направлена перпендикулярно оси поступательной пары (т.е. перпендикулярно оси X) и проходит через точку L .

Так как звено 1 действуют только через две силы — реакции R_{i1} и R_{21} , то они направлены по линии AL , т.е. параллельно оси Y . Отсюда получаем:

$$R_{i1} = -R_{21} = R_{12} = R_{12}^Y Y^0, \quad (a)$$

где Y^0 — орт оси Y .

Проектируя векторное равенство (a) на оси x и y , получаем

$$R_{i1}^x = R_{12}^x = R_{12}^Y \sin \varphi, \quad R_{i1}^y = R_{12}^y = R_{12}^Y \cos \varphi. \quad (17.82)$$

Запишем теперь условия равновесия звена 2:

$$\begin{cases} Q_c + R_{12} + R_{k2} = 0; \\ M_B(Q_c) + M_B(R_{12}) = 0. \end{cases} \quad (б)$$

Принимая во внимание, что $M_B(Q_c) = -(x_c - x_B)Q_c$ и $M_B(R_{12}) = X_L R_{12}^Y$, из второго уравнения системы (б) находим:

$$R_{12}^Y = \frac{x_c - x_B}{X_L} Q_c. \quad (17.83)$$

Из первого уравнения системы (б) получаем

$$R_{k2}^x = -R_{12}^x, \quad R_{k2}^y = Q_c - R_{12}^y. \quad (17.84)$$

Найдем модули реакций:

$$R_{i1} = R_{12} = |R_{12}^Y|, \quad R_{k2} = \sqrt{(R_{k2}^x)^2 + (R_{k2}^y)^2}. \quad (17.85)$$

17.12.5. Силовой анализ диады вида ВВВ со «звеном» переменной длины

Такая диада встречается у рычажных механизмов второго типа (см. пп. 16.4.4, 17.6.3 и 17.8.4). Рассмотрим случай, когда диада присоединяется своими внешними шарнирами O_1 и O_2 к стойке механизма (рис. 17.34). В соответствии с принятой в п. 16.4.4 терминологией звено $O_1 D$, имеющее переменную длину

l_y , обозначим через Y (на рис. 17.34 звено Y показано двойной линией). Второму звену O_2D диады присвоим номер 3.

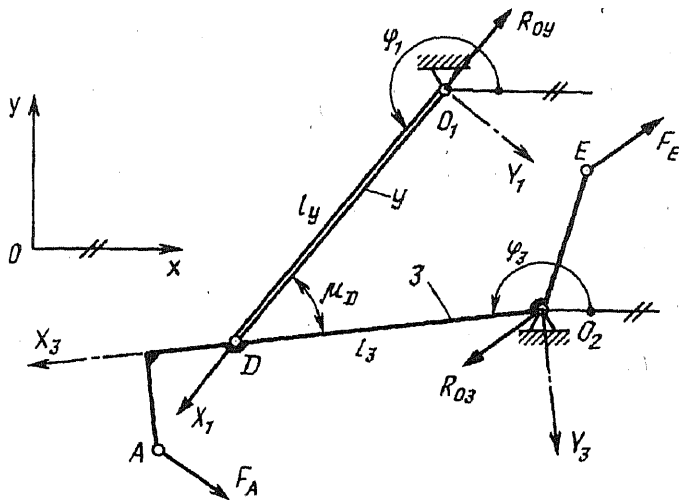


Рис. 17.34

Пусть к точкам A и E звена 3 приложены заданные силы F_A и F_E (это могут быть или активные силы, или ранее найденные реакции со стороны смежных звеньев механизма). Известны геометрические параметры диады: $O_1D = l_y$, $O_2D = l_z$, x_{O_1} , y_{O_1} , x_{O_2} , y_{O_2} , x_A , y_A , x_D , y_D , x_E , y_E , Φ_1 , Φ_3 , μ_D . Задан также признак M_1 варианта сборки диады.

Требуется определить реакции R_{0y} , R_{y3} и R_{03} в шарнирах O_1 , D и O_2 диады (реакция R_{y3} на рис. 17.34 не показана).

Так как на условное звено У действуют только две силы — реакции R_{0y} и R_{3y} , то эти силы направлены по линии O_1D , т.е. по оси X_1 . Отсюда следует, что

$$\mathbf{R}_{0y} = -\mathbf{R}_{3y} = \mathbf{R}_{y3} = R_{y3}^X \mathbf{X}_1^0, \quad (\text{a})$$

где X_1^0 — орт оси X_1 .

Проектируя векторное равенство (а) на оси x и y , получаем

$$R_{0y}^x = R_{y3}^x = R_{y3}^{X_1} \cos \varphi_1, \quad R_{0y}^y = R_{y3}^y = R_{y3}^{X_1} \sin \varphi_1. \quad (17.86)$$

Запишем теперь условия равновесия звена 3:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_E + \mathbf{R}_{y3} + \mathbf{R}_{03} = 0; \\ M_{O_2}(\mathbf{F}_A) + M_{O_2}(\mathbf{F}_E) + M_{O_2}(\mathbf{R}_{y3}) = 0. \end{cases} \quad (б)$$

Введем обозначения:

$$M_{O_2}(\mathbf{F}_A) = m_1, \quad M_{O_2}(\mathbf{F}_E) = m_2. \quad (в)$$

Выразим моменты сил, фигурирующих во втором уравнении системы (б):

$$\begin{cases} m_1 = (x_A - x_{O_2}) F_A^y - (y_A - y_{O_2}) F_A^x, \\ m_2 = (x_E - x_{O_2}) F_E^y - (y_E - y_{O_2}) F_E^x; \end{cases} \quad (17.87)$$

$$\begin{aligned} M_{O_2}(\mathbf{R}_{y3}) &= (x_D - x_{O_2}) R_{y3}^y - (y_D - y_{O_2}) R_{y3}^x = \\ &= l_3 \cos \varphi_3 R_{y3}^{X_1} \sin \varphi_1 - l_3 \sin \varphi_3 R_{y3}^{X_1} \cos \varphi_1 = \\ &= R_{y3}^{X_1} l_3 \sin (\varphi_1 - \varphi_3) = M_1 R_{y3}^{X_1} l_3 \sin \mu_D. \end{aligned} \quad (г)$$

На основании формул (в) и (г) из второго уравнения системы (б) получаем

$$R_{y3}^{X_1} = -M_1 \frac{m_1 + m_2}{l_3 \sin \mu_D}. \quad (17.88)$$

Теперь из первого уравнения системы (б) находим:

$$R_{03}^x = -F_A^x - F_E^x - R_{y3}^x; \quad R_{03}^y = -F_A^y - F_E^y - R_{y3}^y. \quad (17.89)$$

Определяем модули трех искомых реакций:

$$R_{0y} = R_{y3} = |R_{y3}^{X_1}|, \quad R_{03} = \sqrt{(R_{03}^x)^2 + (R_{03}^y)^2}. \quad (17.90)$$

Итак, расчет реакций в шарнирах O_1 , D и O_2 диады выполняется по формулам (17.87), (17.88), (17.86), (17.89) и (17.90).

17.12.6. Определение уравнивающей силы и реакции во входной паре механизма

Здесь мы рассмотрим случай, характерный для рычажных механизмов установок ЛА, когда входная пара является поступательной и ее образуют цилиндр и поршень. Уравнивающая сила $Q_{ур}$, введенная в связи с расчетом критерия передачи k , направлена вдоль оси цилиндра.

Рассмотрим отдельно рычажные механизмы первого и второго типа.

В механизмах первого типа цилиндр неподвижен, т.е. является стойкой. Цилиндру (стойке) и поршню (ползуну) присвоим номера 0 и 1 (рис. 17.35, а). Будем считать, что поршень 1 передает движение звену 2 механизма, связанному с поршнем шарниром E , центр которого лежит на оси X_1 цилиндра. Пусть R_{21} — реакция в шарнире E .

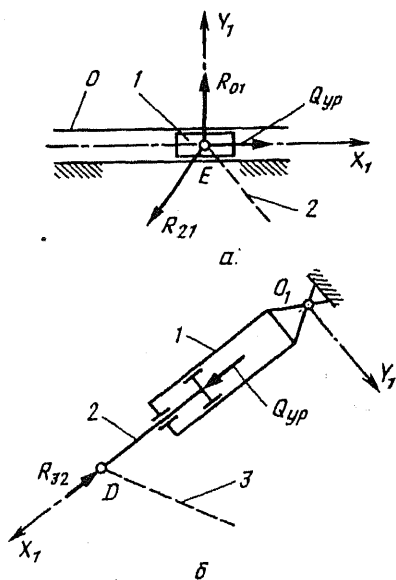


Рис. 17.35

Можно показать, что в данном случае имеют место лишь нормальные реакции в паре «цилиндр — поршень», которые приводятся к равнодействующей — реакции R_{01} , направленной перпендикулярно оси X_1 и проходящей через точку E .

Таким образом, на входное звено 1 механизма действуют силы $Q_{ур}$, R_{01} и R_{21} , образующие сходящуюся систему сил. Из условий равновесия звена 1 находим

$$Q_{yp}^{X_1} = -R_{21}^{X_1} = R_{12}^{X_1}, \quad R_{01}^Y = -R_{21}^Y = R_{12}^Y. \quad (17.91)$$

Модули искомых сил равны:

$$Q_{yp} = |Q_{yp}^{X_1}|, \quad R_{01} = |R_{01}^Y|. \quad (17.92)$$

В механизмах второго типа цилиндр и поршень подвижны. Рассмотрим случай, когда цилиндр совершает качательное движение вокруг шарнира O_1 (рис. 17.35, б). Цилиндру и поршню присвоим номера 1 и 2. Будем считать, что к поршню 2 присоединяется звено 3 механизма при помощи шарнира D , центр которого лежит на оси X_1 цилиндра.

В п. 17.12.5 было показано, что реакция R_{32} направлена по оси X_1 . Таким образом, силы Q_{yp} и R_{32} , действующие на звено 2, направлены обе по оси X_1 цилиндра. Отсюда следует, что в паре «цилиндр — поршень» реакции отсутствуют (напомним, что не учитываются силы тяжести и силы трения).

Итак, в данном случае установлено, что

$$Q_{yp}^{X_1} = -R_{32}^{X_1} = R_{23}^{X_1}, \quad Q_{yp} = R_{23}, \quad R_{12} = 0. \quad (17.93)$$

17.12.7. Расчет критерия передачи для ползуно-коромыслового механизма

Рассмотрим схему № 2 механизма принудительного отделения груза (см. рис. 16.16 и 16.18). В соответствии с описанной в § 17.12 методикой расчета критерия передачи к приложим к выходному звену 5 и входному звену 1 механизма унифицированную систему активных сил — силу сопротивления Q_{yp} и уравновешивающую силу Q_c (рис. 17.36). Считая силу Q_c заданной, найдем модуль Q_{yp} силы Q_{yp} , а также модули реакций R_{01} , R_{12} , R_{23} , R_{03} , R_{25} , R_{34} , R_{45} в кинематических парах механизма (на рис. 17.36 реакции не показаны). Указанные величины позволят определить максимальную по модулю реакцию R и затем найти критерий k по формуле (17.8). Все геометрические параметры механизма предполагаются известными (см. пп. 17.11.2 и 17.11.6).

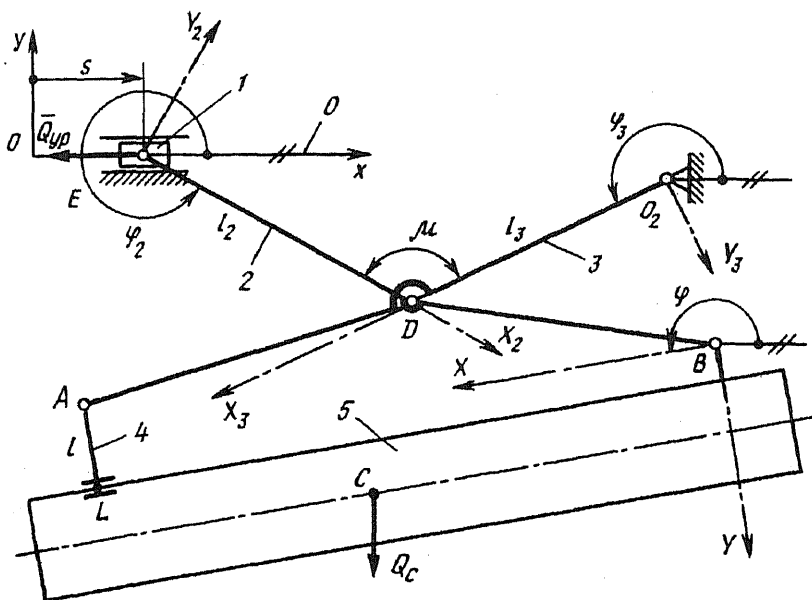


Рис. 17.36

Для решения задачи применим погруппный способ силового анализа механизма, в соответствии с которым рассматриваем сначала диаду вида ВПВ (звенья 4 и 5), затем диаду вида ВВВ (звенья 2 и 3) и, наконец, входное звено 1.

Реакции R_{25} , R_{34} и R_{45} определяем на основании алгоритма для диады вида ВПВ, изложенного в п. 17.12.4 (нужно только в формулах (17.82) — (17.85) индексы 1, 2, i , k заменить на 4, 5, 3, 2 соответственно). Получаем:

$$R_{45}^Y = \frac{x_C - x_B}{X_L} Q_c, \quad R_{34}^x = R_{45}^x = -R_{45}^Y \sin \varphi,$$

$$R_{34}^Y = R_{45}^Y = R_{45}^Y \cos \varphi, \quad R_{25}^x = -R_{45}^x, \quad R_{45}^Y = Q_c - R_{45}^Y,$$

$$R_{34} = R_{45} = |R_{45}^Y|, \quad R_{25} = \sqrt{(R_{25}^x)^2 + (R_{25}^Y)^2}. \quad (17.94)$$

Далее находим реакции R_{01} , R_{12} и R_{23} , применив алгоритм для диады вида ВВВ, изложенной в п. 17.12.2. На основании

формул (17.71) — (17.77), с учетом изменения обозначений, получаем:

$$\begin{aligned}m_1 &= - (x_B - x_E) R_{25}^y + (y_B - y_E) R_{25}^x, \\m_2 &= - (x_A - x_{O_2}) R_{34}^y + (y_A - y_{O_2}) R_{34}^x, \\ \Delta &= - l_2 l_3 \sin \mu,\end{aligned}$$

$$\Delta_1 = m_1 l_3 \cos \varphi_3 + m_2 l_2 \cos \varphi_2,$$

$$\Delta_2 = m_1 l_3 \sin \varphi_3 + m_2 l_2 \sin \varphi_2,$$

$$R_{23}^x = \Delta_1 / \Delta, \quad R_{23}^y = \Delta_2 / \Delta,$$

$$R_{12}^x = R_{25}^x + R_{23}^x, \quad R_{12}^y = R_{25}^y + R_{23}^y,$$

$$R_{03}^x = R_{34}^x - R_{23}^x, \quad R_{03}^y = R_{34}^y - R_{23}^y,$$

$$R_{ab} = \sqrt{(R_{ab}^x)^2 + (R_{ab}^y)^2} \quad (ab = 23, 12, 03). \quad (17.95)$$

В заключение определяем уравнивающую силу Q_{yp} и реакцию R_{01} , применив формулы (17.91) и (17.92):

$$Q_{yp} = R_{12}^x, \quad R_{01}^y = R_{12}^y, \quad Q_{yp}^y = R_{01}^x = 0.$$

$$Q_{yp} = |Q_{yp}^x|, \quad R_{01} = |R_{01}^y|. \quad (17.96)$$

17.12.8. Расчет критерия передачи для шестизвенного механизма с качающимся цилиндром

Здесь мы рассмотрим схему № 7 механизма принудительного отделения груза (см. рис. 16.16 и 17.27). К выходному звену 7 приложим силу сопротивления Q_c , а к поршню 2 — уравнивающую силу Q_{yp} (рис. 17.37). Подлежат определению реакции R_{01} , R_{23} , R_{03} , R_{34} , R_{36} , R_{45} , R_{05} , R_{57} , R_{67} (на рис. 17.37 они не показаны), а также модуль Q_{yp} силы Q_{yp}

Геометрические параметры механизма считаются известными (см. пп. 17.11.3 и 17.11.6).

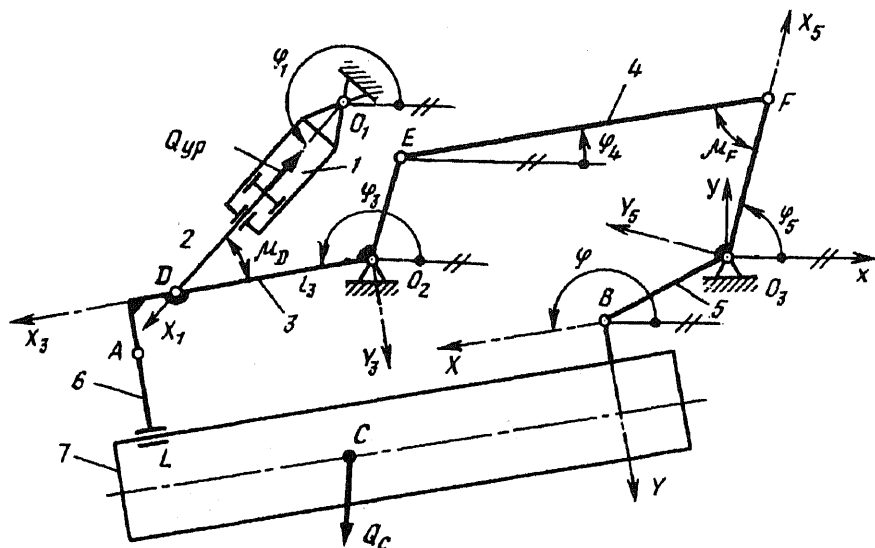


Рис. 17.37

Примем следующий порядок определения неизвестных: 1) R_{36} , R_{57} , R_{67} — путем силового анализа диады вида ВПВ, состоящей из звеньев 6 и 7; 2) R_{34} , R_{05} , R_{45} (анализируется диада вида ВВВ, состоящая из звеньев 4 и 5); 3) R_{01} , R_{23} , R_{03} (анализируется диада вида ВВВ со «звеном» переменной длины, состоящей из звеньев 1 и 3); 4) Q_{yp} .

Для определения реакций R_{36} , R_{57} и R_{67} применим формулы (17.82) — (17.85), заменив индексы 1, 2, i , k на 6, 7, 3, 5:

$$R_{67}^Y = \frac{x_C - x_B}{X_L} Q_c, \quad R_{36}^x = R_{67}^x = -R_{67}^Y \sin \varphi,$$

$$R_{36}^y = R_{67}^y = R_{67}^Y \cos \varphi, \quad R_{57}^x = -R_{67}^x, \quad R_{57}^y = Q_c - R_{67}^y,$$

$$R_{36} = R_{67} = |R_{67}^Y|, \quad R_{57} = \sqrt{(R_{57}^x)^2 + (R_{57}^y)^2}. \quad (17.97)$$

Реакции R_{34} , R_{05} , R_{45} найдем на основании формул (17.71) — (17.77), изменив в них соответствующим образом обозначения. В результате получаем:

$$\begin{aligned}
 m_2 &= - \left(x_B - x_{O_3} \right) R_{57}^y + \left(y_B - y_{O_3} \right) R_{57}^x, \\
 R_{34}^x &= R_{45}^x = \frac{m_2 \cos \varphi_4}{l_5 \sin \mu_F}, & R_{34}^y &= R_{45}^y = \frac{m_2 \sin \varphi_4}{l_5 \sin \mu_F}, \\
 R_{05}^x &= R_{57}^x - R_{45}^x, & R_{05}^y &= R_{57}^y - R_{45}^y, \\
 R_{34} &= R_{45} = \frac{|m_2|}{l_5 \sin \mu_F}, & R_{05} &= \sqrt{\left(R_{05}^x \right)^2 + \left(R_{05}^y \right)^2}. \quad (17.98)
 \end{aligned}$$

Для определения реакций R_{01} , R_{23} , R_{03} воспользуемся алгоритмом, изложенным в п. 17.12.5. При этом в формулах (17.86) — (17.90) нужно заменить R_{0y} на R_{01} , R_{y3} на R_{23} , F_A на $-R_{36}$, F_E на $-R_{34}$, а также принять $M_1 = +1$. Тогда получим:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= - \left(x_A - x_{O_2} \right) R_{36}^y + \left(y_A - y_{O_2} \right) R_{36}^x, \\
 m_2 &= - \left(x_E - x_{O_2} \right) R_{34}^y + \left(y_E - y_{O_2} \right) R_{34}^x, \\
 R_{23}^X &= - \left(m_1 + m_2 \right) / \left(l_3 \sin \mu_D \right), \\
 R_{01}^x &= R_{23}^x = R_{23}^X \cos \varphi_1, & R_{01}^y &= R_{23}^y = R_{23}^X \sin \varphi_1, \\
 R_{03}^x &= R_{36}^x + R_{34}^x - R_{23}^x, & R_{03}^y &= R_{36}^y + R_{34}^y - R_{23}^y, \\
 R_{01} &= R_{23} = \left| R_{23}^X \right|, & R_{03} &= \sqrt{\left(R_{03}^x \right)^2 + \left(R_{03}^y \right)^2}. \quad (17.99)
 \end{aligned}$$

Силу Q_{yp} находим по формулам (17.68):

$$Q_{yp}^X = R_{23}^X, \quad Q_{yp} = R_{23}^y. \quad (17.100)$$

17.12.9. Расчет критерия передачи для восьмизвенного механизма с качающимся цилиндром

В данном разделе рассматривается схема № 10 механизма принудительного отделения груза (см. рис. 16.16). Как и в предыдущих случаях, приложим к звеньям 9 и 1 механизма активные силы Q_c и Q_{yp} (рис. 17.38). Нужно определить реакции R_{01} , R_{23} , R_{03} , R_{34} , R_{45} , R_{05} , R_{36} , R_{67} , R_{07} , R_{89} , R_A , R_B , а также модуль силы Q_{yp} . Здесь: R_A — реакция, действующая в шарнире А на звено 8; R_B — реакция, действующая в шарнире В на звено 9. Все геометрические параметры механизма предполагаются известными (см. пп. 17.11.5 и 17.11.6).

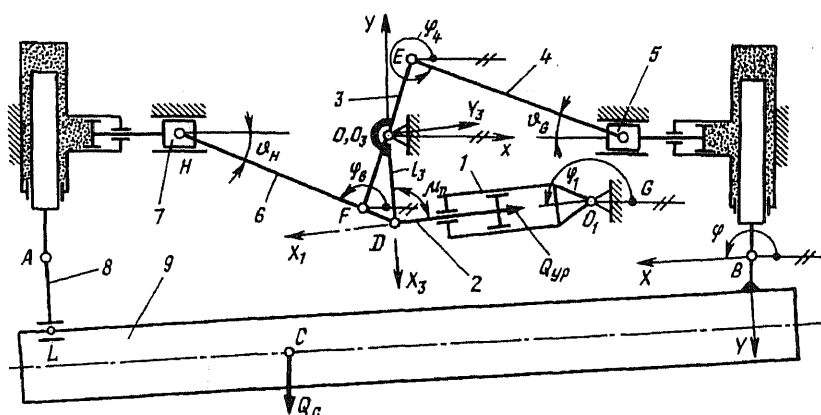


Рис. 17.38

Силовой анализ механизма начинаем с определения реакций R_A , R_B , R_{89} , используя формулы (17.82) — (17.85) для диады вида ВПВ:

$$R_{89}^Y = \frac{x_C - x_B}{X_L} Q_c,$$

$$R_A^x = R_{89}^x = -R_{89}^Y \sin \varphi, \quad R_A^y = R_{89}^y = R_{89}^Y \cos \varphi,$$

$$R_B^x = -R_{89}^x, \quad R_B^y = Q_c - R_{89}^y,$$

$$R_A = R_{89} = \left| R_{89}^Y \right|, \quad R_B = \sqrt{\left(R_B^x \right)^2 + \left(R_B^y \right)^2}. \quad (17.101)$$

Теперь найдем горизонтальные усилия R_G и R_H , действующие на ползуны 5 и 7 рычажного механизма (или на жестко связанные с ползунами поршни П1.1 и П2.1 правого и левого гидромеханизмов — см. рис. 16.16, схема № 10). Из гидростатики известно, что силы, действующие на поршни гидравлического пресса, относятся друг к другу как квадраты диаметров поршней. Поэтому

$$R_G = R_B k_1, \quad R_H = R_A k_2, \quad (17.102)$$

где k_1 и k_2 — заданные коэффициенты (см. формулы (16.11) в п. 16.6.2).

Отметим, что вектор R_G направлен параллельно оси x вправо, а вектор R_H — влево, так что

$$R_G^x = R_G, \quad R_H^x = -R_H, \quad R_G^y = R_H^y = 0. \quad (17.103)$$

Перейдем к определению реакций R_{34} , R_{45} и R_{05} , возникающих в кинематических парах диады вида ВВП, в которую входят звенья 4 и 5. Применим алгоритм, изложенный в п. 17.12.3. Если в формулах (17.78) — (17.81) заменить обозначения 1, 2, i , F , φ_1 , ϑ на 4, 5, 3, R_G , φ_4 , ϑ_G соответственно, то получим:

$$R_{34}^x = R_{45}^x = -R_G, \quad R_{34}^y = R_{45}^y = -R_G \operatorname{tg} \varphi_4;$$

$$R_{05}^x = 0, \quad R_{05}^y = R_G \operatorname{tg} \varphi_4;$$

$$R_{34} = R_{45} = R_G / \vartheta_G, \quad R_{05} = R_G \operatorname{tg} \vartheta_G. \quad (17.104)$$

Теперь найдем реакции R_{36} , R_{67} , R_{07} , возникающие в кинематических парах диады вида ВВП, в которую входят звенья 6 и 7. Заменяя в формулах (17.78) — (17.81) обозначения 1, 2, i , F , φ_1 , ϑ на 6, 7, 3, R_H , φ_6 , ϑ_H , получаем:

$$R_{36}^x = R_{67}^x = R_H, \quad R_{36}^y = R_{67}^y = R_H \operatorname{tg} \varphi_6;$$

$$R_{07}^x = 0, \quad R_{07}^y = -R_H \operatorname{tg} \varphi_6;$$

$$R_{36} = R_{67} = R_H / \vartheta_H, \quad R_{07} = R_H \operatorname{tg} \vartheta_H. \quad (17.105)$$

Далее рассматриваем диаду вида ВВВ со «звеном» переменной длины, в которую входят звенья У и З (условное звено У получается в результате объединения звеньев 1 и 2 в одно звено — см. п. 16.4.4). Здесь применим алгоритм, изложенный в п. 17.12.5, заменив обозначения А на F, R_{у3} на R₂₃, R_{0у} на R₀₁, F_А на -R₃₆, F_Е на -R₃₄ и приняв M₁ = -1. Получаем следующие формулы для расчета искомых реакций R₀₁, R₂₃, R₀₃:

$$m_1 = - \left(x_F - x_{O_2} \right) R_{36}^y + \left(y_F - y_{O_2} \right) R_{36}^x,$$

$$m_2 = - \left(x_E - x_{O_2} \right) R_{34}^y + \left(y_E - y_{O_2} \right) R_{34}^x,$$

$$R_{23}^X = \left(m_1 + m_2 \right) / \left(l_3 \sin \mu_D \right),$$

$$R_{01}^x = R_{23}^x = R_{23}^X \cos \varphi_1, \quad R_{01}^y = R_{23}^y = R_{23}^X \sin \varphi_1,$$

$$R_{03}^x = R_{36}^x + R_{34}^x - R_{23}^x, \quad R_{03}^y = R_{36}^y + R_{34}^y - R_{23}^y,$$

$$R_{01} = R_{23} = \left| R_{23}^X \right|, \quad R_{03} = \sqrt{\left(R_{03}^x \right)^2 + \left(R_{03}^y \right)^2}. \quad (17.106)$$

В конце силового анализа механизма определяем Q_{уп} по формулам (17.100).

Напомним, что силовой анализ механизмов установок ЛА, изложенный в п.п. 17.12.7—17.12.9, выполнен с целью определения максимальной по модулю реакции R в кинематических парах и последующего расчета критерия передачи к по формуле (17.8).

§ 17.13. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА МЕХАНИЗМОВ АКУ

17.13.1. Механизм типа «ножницы»

Схема исследуемого механизма приведена на рис. 17.36 (ранее этот механизм был показан также на рисунках 16.16 (схема № 2), 16.18 и 17.26). Механизм имеет следующие значения постоянных параметров:

$$x_{O_2} = 990, y_{O_2} = -20, l_2 = 523,04, l_3 = 484, X_{3A} = 1027,99,$$

$$Y_{3A} = -99,60, X_{2B} = 1027,78, Y_{2B} = 112,59, l = 54, Y_L = 60,$$

$$X_C = 799, Y_C = 253,2 \text{ (размеры даны в мм).}$$

Закон движения ползуна I задан в табличной форме (см. значения t_i и $s_T(t_i)$, $i = 1, \dots, 9$, в табл. 17.6).

Таблица 17.6

i	$t_i, \text{ с}$	$s_T(t_i), \text{ мм}$	$s(t_i), \text{ мм}$	$\delta_i, \text{ мм}$	$\dot{s}_i, \text{ м/с}$
1	0	0	0	0	0
2	0,02	2,7	2,6	-0,1	0,245
3	0,04	8,4	9,4	+1,0	0,428
4	0,06	19	19,7	+0,7	0,614
5	0,08	34	34,4	+0,4	0,868
6	0,10	56	55,4	-0,6	1,257
7	0,12	87	86,0	-1,0	1,846
8	0,14	130	131,0	+1,0	2,700
9	0,1498	160	160,0	0	3,236

Представим таблично заданную функцию $s = s_T(t)$ в аналитическом виде, а именно: в виде полинома четвертой степени. Хорошее приближение даст следующий полином:

$$s = s(t) = 7446,5t^2 - 53214,4t^3 + 341136t^4 \text{ мм,}$$

где $0 \leq t \leq t_N = 0,1498 \text{ с; } N = 9$.

О качестве приближения полиномиальной функции $s = s(t)$ к таблично заданной функции $s = s_T(t)$ можно судить по данным, приведенным в табл. 17.6. В таблице приняты обозначения: $\delta_i = s(t_i) - s_T(t_i)$; $\dot{s}_i = ds(t_i)/dt$ — скорость ползуна при $t = t_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$; $N = 9$).

Алгоритмы кинематического анализа, изложенные в пп. 17.11.2 и 17.11.6, позволяют определить все переменные геометрические и кинематические параметры исследуемого механизма для последовательных значений $t = t_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

На основании численных результатов, полученных при реализации на ЭВМ упомянутых алгоритмов, при необходимости могут быть найдены дополнительно следующие величины: 1) скорости и ускорения точек A , B и C (по их проекциям на оси x и y); 2) $(\Delta x_C)_i = x_C(t_i) - x_C(t_1)$, $(\Delta y_C)_i = y_C(t_i) - y_C(t_1)$ — изменения координат x и y центра тяжести C груза по отношению к первоначальному положению точки C ; 3) $(\Delta X_L)_i = X_L(t_i) - X_L(t_1)$ — относительное перемещение груза в поступательной паре, образуемой грузом со звеном 4; 4) $(\Delta \varphi)_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_1)$ — угол поворота оси груза по отношению к первоначальному положению этой оси (здесь $i = 1, 2, \dots, N$).

В табл. 17.7 приведены выборочные результаты кинематического анализа механизма типа «ножницы». Отметим, что $\dot{\varphi}$ — угловая скорость груза; μ_D — угол передачи в шарнире D (см. рис. 17.36).

Выполним теперь расчет критерия передачи k для рассматриваемого механизма по алгоритму, изложенному в п. 17.12.7. При вычислении реакций в кинематических парах и уравнивающей силы $Q_{ур}$ примем $Q_c = 1$ (в этом случае все указанные неизвестные силы будут представлены в безразмерной фор-

ме — в долях от силы сопротивления Q_c). В табл. 17.8 приведены найденные значения а) реакций в кинематических парах, б) уравнивающей силы $Q_{ур}$, в) максимальной по модулю среди реакций (она обозначена через R), г) критерия передачи k , д) условного угла давления $\vartheta = \arccos k$ (см. п. 17.4.4) — для девяти заданных дискретных положений механизма. Для сравнения с ϑ и k в табл. 17.8 приведены также значения угла давления $\vartheta_D = |90^\circ - \mu_D|$ в шарнире D и косинуса этого угла.

Таблица 17.7

i	μ_D , град	Δx_C , мм	Δy_C , мм	$\Delta \varphi$, град	ΔX_L , мм	$\dot{y}_C$, м/с	$\dot{\varphi}$, град/с
1	159,0	0	0	0	0	0	0
2	157,4	1,57	-14,38	0,05	0,15	-1,30	5,0
3	153,8	5,24	-47,70	0,18	-0,28	-1,96	7,5
4	149,0	10,08	-91,05	0,35	-2,48	-2,37	9,1
5	143,3	15,96	-142,72	0,55	-7,57	-2,82	10,9
6	136,3	23,16	-204,70	0,79	-17,30	-3,41	13,5
7	127,7	32,16	-279,91	1,09	-34,67	-4,13	17,1
8	117,1	43,45	-370,51	1,48	-64,22	-4,93	22,1
9	111,0	49,97	-420,76	1,71	-84,99	-5,32	25,2

Из табл. 17.8 видно, что минимальное (наименее благоприятное) значение критерия передачи k получается при $s = s_1 = 0$, т.е. в исходном положении механизма. Полученное низкое значение $k(0) = 0,173$ критерия k , и соответственно — большое значение $\vartheta(0) = 80,1^\circ$ условного угла давления ϑ , свидетельствует о неблагоприятных условиях передачи движения и сил в меха-

Таблица 17.8

i	R_{34}	R_{25}	R_{23}	R_{12}	R_{03}	R_{01}	Q_{yp}	R	κ	ϑ , град	ϑ_D , град	$\cos \vartheta_D$
1	0,747	0,253	5,755	5,788	5,722	0,882	5,721	5,788	0,173	80,1	69,0	0,358
2	0,746	0,254	5,357	5,392	5,322	0,875	5,320	5,392	0,185	79,3	67,4	0,384
3	0,746	0,254	4,616	4,654	4,576	0,862	4,574	4,654	0,215	77,6	63,8	0,442
4	0,747	0,253	3,911	3,953	3,863	0,851	3,860	3,953	0,253	75,3	59,0	0,515
5	0,750	0,250	3,305	3,353	3,248	0,845	3,244	3,353	0,298	72,6	53,3	0,598
6	0,756	0,245	2,785	2,838	2,714	0,845	2,709	2,838	0,352	69,4	46,3	0,691
7	0,767	0,234	2,337	2,396	2,244	0,854	2,239	2,396	0,417	65,3	37,7	0,791
8	0,788	0,214	1,962	2,025	1,831	0,876	1,826	2,025	0,494	60,4	27,1	0,890
9	0,803	0,199	1,808	1,872	1,648	0,894	1,644	1,872	0,534	57,7	21,0	0,934

низме в момент начала движения груза. При последующем увеличении обобщенной координаты z механизма условия передачи движения и сил постепенно улучшаются: k возрастает, а ϑ уменьшается.

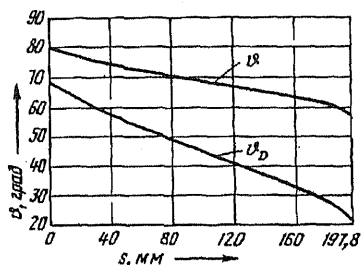


Рис. 17.39

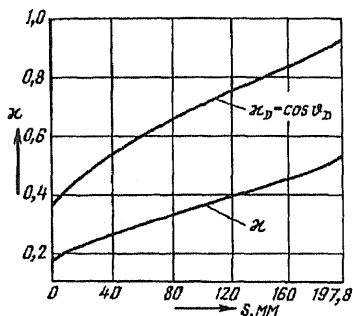


Рис. 17.40

Сопоставим теперь значения ϑ и ϑ_D , а также k и $\cos \vartheta_D$. На рис. 17.39 и 17.40 представлены графики зависимости величин ϑ , ϑ_D , k и $\cos \vartheta_D$ от перемещения s поршня по отношению к цилиндру. Из этих графиков, а также из табл. 17.8, видно, что значения критерия передачи k существенно меньше значений $\cos \vartheta_D$: отношение $\cos \vartheta_D / k$ составляет от 2.07 при $s = 0$ до 1.75 при $s = S$. Отсюда следует, что угол давления ϑ_D (или угол передачи μ_D) в шарнире D , в отличие от критерия k , не является вполне объективным геометрическим критерием качества передачи движения и сил в механизме типа ножиц.

17.13.2. Шестизвенный механизм с качающимся цилиндром

Схема механизма приведена на рис. 17.37 (этот механизм был изображен ранее также на рис. 16.16 (схема № 7) и 17.27). Механизм имеет следующие значения постоянных параметров: $x_{O_1} = -1639$; $y_{O_1} = 169$; $x_{O_2} = -1474$; $y_{O_2} = 0$,

$(l_y)_0 = (O_1D)_{\min} = 428,70; l_3 = 570,71; X_{3E} = -56,18; Y_{3E} = -127,96;$
 $X_{3A} = 621,27; Y_{3A} = 0, l_4 = 1474, l_5 = 133,53, X_{5B} = -232,15,$
 $Y_{5B} = 504,52, l = 0, Y_L = 0, X_C = 1110, Y_C = 247,2.$

Закон движения ползуна 2, заданный первоначально в табличной форме, аппроксимируется следующей зависимостью:

$$s(t) = 9434t^2 \text{ мм},$$

где $0 \leq t \leq t_N = 0,1448 \text{ с}; N = 9.$

В табл. 17.9 приведены значения $t = t_i, s_i = s(t_i), \dot{s}_i = \dot{s}(t_i)$ для девяти дискретных значений времени $t = t_i.$

Таблица 17.9

i	$t_i, \text{ с}$	$s_i, \text{ мм}$	$\dot{s}_i, \text{ м/с}$
1	0	0	0
2	0,02	3,77	0,377
3	0,04	15,09	0,755
4	0,06	33,96	1,132
5	0,08	60,38	1,509
6	0,10	94,34	1,887
7	0,12	135,85	2,264
8	0,14	184,91	2,242
9	0,1448	197,80	2,732

На основании алгоритма, изложенного в пп. 17.11.3 и 17.11.6, определяются переменные геометрические и кинематические параметры исследуемого механизма для последовательных значений $t = t_i (i = 1, 2, \dots, N).$ В табл. 17.10 приведены выборочные результаты анализа данного механизма.

Таблица 17.10

i	μ_D , град	μ_F , град	Δx_C , мм	Δy_C , мм	$\Delta \varphi$, град	ΔX_L , мм	$\dot{y}_C$, м/с	$\dot{\varphi}$, град/с
1	22,0	62,38	0	0	0	0	0	0
2	22,23	63,44	-0,37	-10,73	0,022	-0,02	-1,07	2,20
3	22,83	66,57	-0,40	-42,38	0,088	-0,12	-2,08	4,47
4	22,58	71,62	3,14	-93,50	0,201	-0,27	-3,01	6,86
5	24,22	78,47	14,83	-162,22	0,364	-0,59	-3,84	9,40
6	24,44	87,12	40,65	-246,37	0,578	-1,23	-4,55	12,09
7	24,01	97,73	88,32	-343,16	0,849	-2,42	-5,09	14,99
8	22,63	110,77	168,64	-447,86	1,180	-4,40	-5,31	18,27
9	22,13	114,36	194,46	-473,27	1,270	-4,98	-5,28	19,19

При расчете критерия передачи к используем алгоритм, изложенный в п. 17.12.8 (приняв $Q_c = 1$). Результаты расчета критерия k , а также промежуточных величин, определяемых в процессе такого расчета, приведены в табл. 17.11. В этой таблице приведены также значения условного угла давления $\vartheta = \arccos k$, углов давления $\vartheta_D = |90^\circ - \mu_D|$ и $\vartheta_F = |90^\circ - \mu_F|$, а также косинусов углов ϑ_D и ϑ_F . По данным табл. 17.11 на рис. 17.41 и 17.42 построены графики зависимости величин ϑ , ϑ_D и ϑ_F , а также k , $\cos \vartheta_D$ и $\cos \vartheta_F$, от относительного перемещения поршня по отношению к цилиндру.

Из табл. 17.11 и графиков видно, что значения функций $\vartheta(s)$ и $\vartheta_D(s)$ сравнительно мало отличаются друг от друга при всех $s \in [0, 197,8 \text{ мм}]$, но особенно они близки при $s \in [0, 120 \text{ мм}]$.

Таблица 17.11

i	R_{36}	R_{57}	R_{65}	R_{03}	R_{01}	R	κ	ϑ , град	ϑ_D , град	ϑ_F , град	$\cos \vartheta_D$	$\cos \vartheta_F$
1	0,721	0,279	1,339	1,410	2,859	2,859	0,350	69,5	68,0	27,6	0,375	0,886
2	0,721	0,279	1,328	1,385	2,833	2,833	0,353	69,3	67,8	26,6	0,378	0,894
3	0,721	0,279	1,297	1,322	2,761	2,761	0,362	68,8	67,2	23,4	0,388	0,918
4	0,720	0,280	1,248	1,251	2,661	2,661	0,376	67,9	66,4	18,4	0,400	0,949
5	0,720	0,280	1,184	1,201	2,545	2,545	0,393	66,9	65,8	11,5	0,410	0,980
6	0,720	0,280	1,105	1,180	2,413	2,413	0,414	65,5	65,6	2,9	0,414	0,999
7	0,719	0,281	1,004	1,171	2,248	2,248	0,445	63,6	66,0	7,7	0,407	0,991
8	0,719	0,281	0,866	1,118	2,009	2,009	0,498	60,1	67,4	20,8	0,385	0,935
9	0,719	0,281	0,824	1,088	1,932	1,932	0,518	58,8	67,9	24,4	0,377	0,911

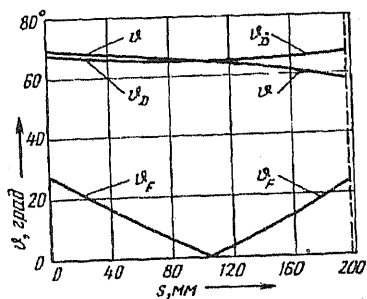


Рис.17.41

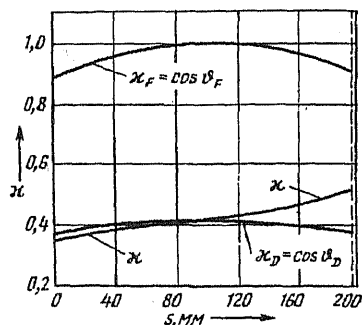


Рис.17.42

Отсюда следует, что угол давления ϑ_D (или угол передачи μ_D) в шарнире D достаточно объективно отражает качество передачи движения и сил в рассматриваемом шестизвенном механизме.

17.13.3. Восьмизвенный механизм с качающимся цилиндром

Схема механизма приведена на рис. 17.38 (этот механизм был изображен ранее также на рис. 16.16 (схема № 10 и 17.29). Механизм имеет следующие значения постоянных параметров: $x_{O_1} = 274$; $y_{O_1} = -57$; $y_G = y_H = 0$, $(l_y)_0 = (O_1 D)_{\min} = 226,43$; $l_3 = 74$; $X_{3E} = -69$; $Y_{3E} = 0$; $X_{3F} = 74$; $Y_{3F} = 0$, $l_4 = 453,45$, $l_6 = 453,13$, $X_A = -670$, $(y_A)_0 = -200$, $x_B = 670$, $(y_B)_0 = -200$, $l = 0$, $Y_L = 0$, $X_C = 1000$, $Y_C = 107$.

Заданы значения коэффициентов k_1 и k_2 , фигурирующих в формулах (17.62) и (17.102): $k_1 = 1,28047$, $k_2 = 1,41723$.

Закон движения ползуна 2, заданный в табличной форме, аппроксимируется следующим полиномом:

$$s(t) = -921240t^3 + 90085,2t^2 \text{ мм},$$

где $0 \leq t \leq t_N = 0,032$ с; $N = 9$. В табл. 17.12 приведены значения $t = t_i$, $s_i = s(t_i)$ и $\dot{s}_i = \dot{s}(t_i)$ для девяти дискретных значений времени $t = t_i$ ($i = 1, 2, \dots, 9$).

Таблица 17.12

i	$t_i, \text{с}$	$s_i, \text{мм}$	$\dot{s}_i, \text{м/с}$
1	0	0	0
2	0,004	1,38	0,676
3	0,008	5,29	1,264
4	0,012	11,38	1,764
5	0,016	19,29	2,175
6	0,020	28,66	2,498
7	0,024	39,15	2,732
8	0,028	50,40	2,878
9	0,032	62,06	2,935

В соответствии с алгоритмом, приведенным в пп. 17.11.5 и 17.11.6, выполнен кинематический анализ механизма, результаты которого отражены в табл. 17.13.

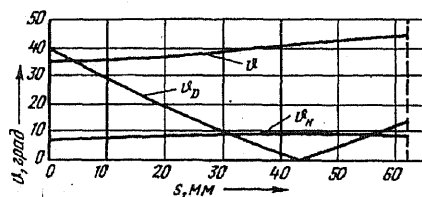


Рис.17.43

Расчет критерия передачи k производится в данном случае на основании алгоритма, изложенного в п. 17.12.9. Результаты расчета реакций в кинематических парах механизма (при условии, что $Q_c = 1$),

критерия k , условного угла давления $\vartheta = \arccos k$, угла давления $\vartheta_D = |90^\circ - \mu_D|$, а также косинусов углов давления ϑ_D , ϑ_G и ϑ_H , приведены в табл. 17.14. По данным табл. 17.14 на рис. 17.43

и 17.44 построены графики зависимости величин ϑ , ϑ_D и ϑ_H , а также κ и $\cos \vartheta_D$, от перемещения s поршня 2.

Анализ данных табл. 17.13 и 17.14, а также графиков, приведенных на рис. 17.43 и 17.44, позволяет сделать следующие выводы:

1) рассматриваемый механизм обеспечивает благоприятные условия передачи движения и сил, так как значения критерия передачи κ сравнительно высоки при всех $s \in [0,62 \text{ мм}]$;

2) углы давления ϑ_G и ϑ_H в шарнирах G и H механизма не являются объективными критериями качества передачи сил, поскольку их значения сильно отличаются от значений угла ϑ при всех возможных s ; угол давления ϑ_D достаточно близок к ϑ лишь на небольшом отрезке изменения s — от 0 до 9 мм.

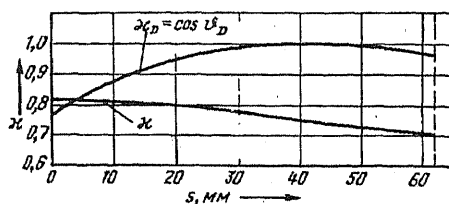


Рис.17.44

Таблица 17.13

i	μ_D , град	ϑ_G , град	ϑ_H , град	Δx_C , мм	Δy_C , мм	$\Delta \varphi$, град	ΔX_L , мм	$\dot{y}_C$, м/с	$\dot{\varphi}$, град/с
1	130,1	6,7	7,2	0	0	0	0	0	0
2	128,4	6,8	7,3	0,02	-1,68	0,01	0	-0,82	5,5
3	123,9	7,2	7,7	0,08	-6,45	0,04	0	-1,54	10,4
4	117,6	7,6	8,2	0,18	-13,91	0,09	0	-2,17	14,7
5	110,1	8,1	8,7	0,30	-23,73	0,16	0,01	-2,72	18,6
6	101,9	8,4	9,1	0,46	-35,62	0,24	0,01	-3,21	22,1
7	93,4	8,7	9,3	0,65	-49,31	0,34	0,02	-3,62	25,2
8	84,7	8,7	9,4	0,86	-64,49	0,44	0,04	-3,95	27,8
9	75,9	8,6	9,2	1,09	-80,77	0,56	0,06	-4,17	29,6

Таблица 17.14

i	R_{34}	R_{36}	R_{07}	R_{03}	R_{01}	R	ϑ , град	$\vartheta_{D'}$, град	$\cos \vartheta_D$	$\cos \vartheta_G$	$\cos \vartheta_H$
1	0,327	1,066	0,133	0,496	1,220	1,220	35,0	40,1	0,765	0,993	0,992
2	0,327	1,066	0,136	0,497	1,219	1,219	34,9	38,4	0,784	0,993	0,992
3	0,328	1,067	0,143	0,503	1,221	1,221	35,0	34,0	0,830	0,992	0,991
4	0,328	1,068	0,152	0,519	1,231	1,231	35,7	27,6	0,886	0,991	0,990
5	0,328	1,070	0,161	0,547	1,252	1,252	37,0	20,1	0,939	0,990	0,989
6	0,329	1,071	0,169	0,584	1,285	1,285	38,9	11,9	0,979	0,989	0,988
7	0,329	1,071	0,174	0,627	1,326	1,326	41,1	3,4	0,998	0,989	0,987
8	0,330	1,071	0,175	0,672	1,373	1,373	43,2	5,3	0,996	0,988	0,987
9	0,7330	1,070	0,172	0,716	1,420	1,420	45,2	14,1	0,970	0,989	0,987

Глава 18. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ АКУ

§ 18.1. ОСНОВНЫЕ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ СИНТЕЗА ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

18.1.1. Общие положения

Механизмы принудительного отделения груза в авиационных катапультирующих установках (АКУ) чаще всего проектируются в виде одноподвижных плоских рычажных механизмов (см. § 16.6). Поэтому в данной главе основное внимание уделено синтезу именно таких механизмов. При этом рассматриваются как общие положения теории кинематического синтеза указанных механизмов, так и специфические вопросы синтеза механизмов АКУ.

Целью кинематического синтеза рычажного механизма является определение постоянных параметров его кинематической схемы, исходя из условий задачи синтеза. Кинематическому синтезу предшествует структурный синтез механизма, под которым подразумевается выбор его структурной схемы (см. п. 16.5.2).

Условия синтеза могут быть самыми разнообразными по содержанию, но аналитически они представляют собой некоторые условия связей, накладываемых на параметры механизма, и имеют форму уравнений или неравенств. В ряде случаев они формулируются в виде требования минимизации некоторой функции параметров механизма.

Среди условий синтеза любого рычажного механизма можно выделить основные условия и дополнительные условия.

18.1.2. Основные условия синтеза

Основные условия выражают следующее требование: синтезируемый механизм должен с данной степенью точности воспроизводить заданное движение исполнительного органа (выходного звена). Движение выходного звена может быть задано в зависимости от обобщенной координаты механизма (т.е. от перемещения во входной кинематической паре) или от времени.

Таким образом, основные условия синтеза касаются только законов движения на входе и на выходе механизма. Рассмотрим различные возможные случаи задания этих движений.

На входе механизма задается относительное движение двух звеньев, образующих входную кинематическую пару. Последняя может быть вращательной (В) или поступательной (П).

В механизмах АКУ входная пара всегда является поступательной. Поэтому далее рассмотрим только такой случай.

Обозначим через s относительное линейное перемещение двух звеньев, образующих входную пару вида П. Величина s является обобщенной координатой механизма.

При синтезе рычажных механизмов встречаются два способа задания движения на входе механизма:

1) обобщенная координата s может принимать любые значения на заданном отрезке $[0, S]$, однако не вводится какой-либо зависимости s от времени t ;

2) задается закон изменения обобщенной координаты в зависимости от времени

$$s = s(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (18.1)$$

где $s(t)$ — непрерывная функция.

Функция $s = s(t)$, $0 \leq t \leq T$, является, как правило, монотонной. Будем далее считать, что $s(t)$ — монотонно возрастающая функция и $s(0) = 0$. Обозначим через S значение функции $s(t)$ при $t = T$, т.е. $S = s(t)$.

Отметим, что функция $s(t)$ может быть задана также и в дискретной форме, т.е. в виде числовой таблицы $\{t_i, s_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, где $t_1 = 0$, $s_1 = 0$, $t_N = T$, $s_N = S$. В некоторых случаях при $t = t_i$ задается также значение первой производной

$$\dot{s}_i = \left(\frac{ds}{dt} \right) \Big|_{t=t_i}, \text{ а иногда и второй производной } \ddot{s}_i = \left(\frac{d^2s}{dt^2} \right) \Big|_{t=t_i}.$$

По характеру движения двух звеньев, образующих входную пару, различают два случая: 1) одно из указанных звеньев является стойкой (при этом второе звено называется входным (см. § 16.1); 2) оба эти звена являются подвижными. Механизмы, отвечающие первому случаю, называются *механизмами первого типа*, а второму случаю — *механизмами второго типа* (см. п. 16.2.5).

В механизмах первого типа величина s есть абсолютное перемещение входного звена (по отношению к стойке). В механизмах второго типа s — это относительное перемещение двух подвижных звеньев, образующих входную пару. В АКУ используются механизмы как первого, так и второго типа.

Рассмотрим теперь вопрос о задании движения выходного звена механизма.

Выходное звено плоского рычажного механизма, к которому жестко крепится исполнительный орган, может совершать одно из трех возможных движений: 1) прямолинейное поступательное движение, 2) вращение вокруг неподвижной оси, 3) плоскопараллельное движение. В первом случае выходное звено образует поступательную пару со стойкой (т.е. является ползуном). Во втором случае выходное звено образует вращательную пару со стойкой. В третьем случае выходное звено не образует кинематических пар со стойкой механизма.

Если выходное звено образует кинематическую пару со стойкой, то его положение определяется одной координатой — линейной или угловой. Пусть, например, выходное звено связано со стойкой вращательной парой. Тогда его положение определяется угловой координатой ψ , и при синтезе механизма его движение может быть задано одним из двух способов:

1) в виде зависимости

$$\psi = \psi(s), \quad 0 \leq s \leq S, \quad (18.2)$$

2) в виде зависимости

$$\psi = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (18.3)$$

где $\psi(s)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции. Отметим, что начало отсчета угла ψ всегда можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось условие: $\psi(0) = 0$.

Зависимость ψ от s (или t) может быть задана также и в дискретной форме, т.е. в виде числовой таблицы $\{s_i, \psi_i\}$ (или $\{t_i, \psi_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, где $s_1 = 0$, $s_N = S$ ($t_1 = 0$, $t_N = T$)). В некоторых случаях при $s = s_i$ (или $t = t_i$) задается также значе-

ние первой производной $\psi'_i = \frac{d\psi}{ds} \Big|_{s=s_i}$ (или $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} \Big|_{t=t_i}$), а

иногда и второй производной $\psi''_i = \frac{d^2\psi}{ds^2} \Big|_{s=s_i}$ (или $\ddot{\psi}_i = \frac{d^2\psi}{dt^2} \Big|_{t=t_i}$).

В том случае, когда выходное звено совершает плоскопараллельное движение, его положение относительно стойки определяется тремя координатами: двумя декартовыми координатами x_A и y_A некоторой точки A этого звена и углом ψ поворота звена вокруг точки A (предполагается, что неподвижная система координат OXY неизменно связана со стойкой).

В данном случае при синтезе механизма возможны две ситуации: 1) задаются законы изменения всех трех координат x , y , ψ выходного звена как функции от входного перемещения s или времени t ; 2) задается лишь движение некоторой точки M выходного звена, т.е. законы изменения координат x_M и y_M точки M как функции от s или t .

В соответствии с терминологией, принятой в теории механизмов, различают три вида синтеза рычажных механизмов: 1) синтез *передаточных* механизмов (или генераторов функций); 2) синтез *направляющих* механизмов (или генераторов траекторий); 3) синтез *перемещающих* механизмов.

Первый вид синтеза соответствует случаю, когда выходное звено образует кинематическую пару со стойкой, т.е. совершает или прямолинейное поступательное движение или вращательное движение вокруг неподвижной оси. Второй вид синтеза соответствует случаю, когда выходное звено совершает плоскопараллельное движение, но задано движение только одной его точки (последнюю называют чертящей точкой). Третий вид синтеза имеет место в случае, когда выходное звено совершает плоскопараллельное движение и заданы законы изменения всех трех его координат x_A , y_A , ψ в функции от s или t .

В соответствии с указанной терминологией задачи синтеза механизмов АКУ относятся к синтезу перемещающих механизмов.

18.1.3. Дополнительные условия синтеза

К *дополнительным* условиям синтеза относятся всевозможные конструктивные, компоновочные, кинематические, динамические и иные *ограничения*, фигурирующие в постановке задачи синтеза данного механизма. Важно подчеркнуть, что при кинематическом синтезе вводятся в рассмотрение только такие ограничения, которые могут быть учтены на уровне кинематической схемы механизма. Указанные ограничения выражаются обычно в форме неравенств.

Дополнительные условия синтеза подразделяются в свою очередь на *обязательные* и *желательные* условия.

Обязательные условия синтеза включают в себя следующие две группы условий:

- 1) искомые параметры механизма должны иметь вещественные, а если это — длины звеньев, то и положительные значения;
- 2) должны быть обеспечены условия существования механизма в виде замкнутой кинематической цепи на заданном интервале движения во входной кинематической паре, т.е. при всех $s \in [0, S]$.

Содержание желательных условий синтеза может быть достаточно разнообразным. Но существуют две группы желательных условий, которые встречаются в большинстве задач синтеза рычажных механизмов:

- 1) значения постоянных параметров кинематической схемы должны быть ограничены заданными пределами;
- 2) должны быть обеспечены благоприятные условия передачи движения и сил от входного (ведущего) звена к ведомым звеньям.

На этапе кинематического синтеза рычажного механизма условия передачи движения и сил оцениваются при помощи таких геометрических критериев, как угол давления, угол передачи или критерии качества передачи движения (см. § 17.4).

§ 18.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ АКУ

18.2.1. Структурные схемы синтезируемых механизмов

Структурные схемы плоских рычажных механизмов, применяемых в авиационных катапультных установках, были описа-

ны в § 16.6. Каждый из этих механизмов включает в себя следующие элементы конструкции установки:

1) корпус, 2) силовой привод, 3) механизм принудительного отделения груза, 4) транспортируемый груз (вместе с системой его присоединения к механизму принудительного отделения).

Как и ранее (см. п. 16.6.2), будем считать, что любой из рассматриваемых плоских рычажных механизмов имеет $n + 2$ звеньев, причем n из них принадлежит трем первым из четырех названных выше элементов конструкции АКУ, а два звена относятся к четвертому элементу.

Звеньям рычажного механизма присвоим последовательные номера $0, 1, \dots, n + 1$. Порядок нумерации звеньев может быть произвольным, за исключением только части звеньев, а именно — стойки; двух звеньев, образующих входную пару; двух звеньев присоединенной диады. Напомним, что присоединенной диадой в § 16.6 названа двухзвенная структурная группа вида ВПВ, к которой может быть приведена система присоединения груза (включая и сам груз) к механизму принудительного отделения.

Корпус установки выступает в качестве стойки рычажного механизма. Стойке присвоим номер 0 .

Силовой привод с точки зрения структуры содержит два звена — цилиндр и поршень, образующих друг с другом поступательную пару. Эта пара является входной парой механизма. Среди рассматриваемых рычажных механизмов встречаются механизмы как первого, так и второго типа (см. § 16.2). В механизмах первого типа (см. схемы N1 и 7 — 12 на рис. 16.16) цилиндр и поршень являются подвижными звеньями; им присвоим номера 1 и 2 соответственно.

Двум звеньям присоединенной диады присвоим номера n и $n + 1$, причем номер $n + 1$ имеет груз, а номер n — второе звено диады. Отметим, что на структурных схемах рычажных механизмов, изображенных на рис. 16.16, присоединенная диада не показана. Предполагается, что эта диада присоединяется своими внешними шарнирами А и В (см. рис. 16.17) к соответствующим звеньям рычажного механизма. Между тем, на рис. 16.18, 17.36, 17.37 и 17.38 изображены некоторые из схем рычажных механизмов АКУ вместе с присоединенной диадой, т.е. с транспортируемым грузом.

18.2.2. Основные условия синтеза

Конкретизируем теперь основные условия, фигурирующие в постановке задачи синтеза плоских рычажных механизмов АКУ.

Задана зависимость $s = s(t)$ относительного перемещения s двух звеньев, образующих входную пару, от времени t при $t \in [0, T]$.

На практике обычно указанная зависимость задается в графической форме (см. рис. 17.25). От графической формы нетрудно перейти к дискретной (табличной) форме или к аналитической форме (18.1) (в последнем случае график аппроксимируется, например, полиномиальной функцией). Будем считать, что независимо от формы задания функции $s = s(t)$, нам известны значения $\{t_i, s_i, \dot{s}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, где $t_1 = 0$, $s_1 = 0$, $t_N = T$, $s_N = S$, $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $s_1 < s_2 < \dots < s_n$.

Перейдем теперь к основным условиям, характеризующим движение выходного звена $n + 1$ рычажного механизма АКУ (см. рис. 17.30). Эти условия выражаются в виде следующих уравнений или неравенств:

$$y_B(0) = C_1; \quad (18.4)$$

$$X_L(0) = C_2; \quad (18.5)$$

$$\varphi(0) = \pi; \quad (18.6)$$

$$\varphi(T) = C_3; \quad (18.7)$$

$$C_4 \leq \Delta y_C(T) \leq C_5; \quad (18.8)$$

$$C_6 \leq \Delta X_L(t_i) \leq C_7 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (18.9)$$

$$C_8 \leq \dot{y}_C(T) \leq C_9; \quad (18.10)$$

$$C_{10} \leq \dot{\varphi}(T) \leq C_{11}; \quad (18.11)$$

$$\varphi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (18.12)$$

$\varphi(t)$ — монотонно возрастающая функция.

В формулах (18.4) — (18.12) приняты следующие обозначения:

$y_B(0)$ — координата y шарнира B при $t=0$; $X_L(0)$ — координата X точки L при $t=0$; $\varphi(0)$ и $\varphi(T)$ — угловая координата звена $n+1$ при $t=0$ и $t=T$; $\Delta y_C(T)$ — изменение координаты y центра тяжести C груза $n+1$ за время от момента $t=0$ до момента $t=T$, определяемое по формуле:

$$\Delta y_C(T) = y_C(T) - y_C(0), \quad (18.13)$$

$\Delta X_L(t_i)$ — изменение координаты X точки L за время от момента $t=0$ до момента $t=t_i$, т.е. относительное смещение в поступательной паре звена $n+1$ по отношению к звену n , определяемое по формуле

$$\Delta X_L(t_i) = X_L(t_i) - X_L(0), \quad (18.14)$$

$\dot{y}_C(T)$ — проекция скорости точки C на ось y в момент $t=T$; $\dot{\varphi}(T)$ — угловая скорость груза при $t=T$; $\varphi(T)$ — зависимость угловой координаты φ звена $n+1$ (груза) от времени t ; $C_1, C_2, \dots, C_{11}$ — заданные константы (каждая из которых имеет соответствующую размерность).

Кроме указанных выше основных условий синтеза, проектируемый механизм должен удовлетворять ряду дополнительных условий — обязательных и желательных, содержание которых в общей постановке было раскрыто ранее в п. 18.1.3 и будет конкретизировано в дальнейшем.

В результате синтеза механизма должны быть найдены постоянные параметры его кинематической схемы (за исключением лишь тех параметров, которые заранее назначаются проектировщиком по конструктивным соображениям).

§ 18.3. АНАЛИТИКО-ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ АКУ

18.3.1. Условия синтеза в форме уравнений и неравенств

Как отмечалось ранее в п. 18.2.2, все условия, фигурирующие в задаче синтеза рычажного механизма АКУ, делятся по

своему содержанию на основные, обязательные и желательные. Между тем в математическом отношении они имеют форму уравнений или неравенств.

Среди основных условий синтеза (18.4) — (18.12) первые четыре есть уравнения, а остальные — неравенства. Обязательные условия синтеза выражаются неравенствами. Что касается желательных условий синтеза, то, как правило, они тоже выражаются неравенствами, однако возможна постановка задачи, в которой некоторые из этих условий имеют форму уравнений.

Условия синтеза в форме уравнений запишем в таком общем виде:

$$f_r(z) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad (18.15)$$

где $z \equiv \{z_1, z_2, \dots, z_p\}$, — вектор искомых параметров механизма; p — число искомых параметров; m — число уравнений.

Условия синтеза в форме неравенств разделим на две группы.

Первую группу образуют неравенства, отображающие обязательные условия синтеза. Пусть они имеют вид:

$$g_j(z) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, v. \quad (18.16)$$

Во вторую группу входят неравенства, отображающие основные и желательные условия синтеза. Эти неравенства запишем в таком общем виде:

$$h_j(z) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, w. \quad (18.17)$$

18.3.2. Вычисляемые и варьируемые параметры механизма

Для решения сформулированной в § 18.2 задачи синтеза рычажных механизмов АКУ применим аналитико-оптимизационный метод, в соответствии с которым одна часть искомых параметров механизма определяется аналитически по формулам, а другая часть — путем оптимизационного поиска, т.е. численным способом. Весьма большой объем вычислений, который требуется для решения, предполагает использование быстродействующей вычислительной техники.

Искомые параметры механизма должны удовлетворять уравнениям (18.15) и неравенствам (18.16) и (18.17). Искомые параметры разделим на две группы: 1) вычисляемые параметры, 2) варьируемые параметры. Вычисляемые параметры определяются непосредственно по формулам, полученным в результате решения уравнений (18.15). Варьируемые параметры определяются путем оптимизационного поиска, организуемого так, чтобы удовлетворить неравенствам (18.16) и (18.17).

Из п. 18.3.1 следует, что число вычисляемых параметров равно m , а число варьируемых параметров, которое будем обозначать через n , равно $n = p - m$.

Введем следующие обозначения:

$q \equiv \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, — вектор вычисляемых параметров;

$x \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, — вектор варьируемых параметров.

Будем считать, что

$$\begin{aligned} q_r &= z_r, & (r = 1, 2, \dots, m); \\ x_k &= z_{k+m}, & (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (18.18)$$

В результате решения системы m уравнений (18.15) относительно неизвестных $q_1, \dots, q_m$ получим соответствующие выражения для вычисляемых параметров:

$$q_r = q_r(x), \quad r = 1, 2, \dots, m. \quad (18.19)$$

Если теперь в формулах для функций $g_j(z)$ и $h_j(z)$ заменить вычисляемые параметры $z_r = q_r$ ($r = 1, 2, \dots, m$) их выражениями $q_r(x)$, то вместо $g_j(z)$ и $h_j(z)$ получим соответственно функции $G_j(x)$ и $H_j(x)$. В результате этого неравенства (18.16) и (18.17) примут такой вид:

$$G_j(x) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, v; \quad (18.20)$$

$$H_j(x) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, w. \quad (18.24)$$

18.3.3. Целевая функция

Поиск значений n варьируемых параметров x , удовлетворяющих неравенствам (18.20) и (18.21), будем осуществлять на основе метода оптимизации. В соответствии с этим методом поиск значений x , удовлетворяющих указанным неравенствам, заменяется поиском минимума некоторой функции $P = P(x)$ варьируемых параметров x , называемой *целевой функцией*. Такая замена будет математически корректной только при правильном выборе целевой функции $P(x)$.

Вид функции $P(x)$ зависит от левых частей $G_j(x)$ и $H_j(x)$ неравенств (18.20) и (18.21). Прежде чем сформировать функцию $P(x)$, введем в рассмотрение две критериальные функции $P_1 = P_1(x)$ и $P_2 = P_2(x)$, имея в виду, что первая из них характеризует качество выполнения неравенств (18.20), а вторая — качество выполнения неравенств (18.21).

Принимая во внимание специфическую роль, которую играет каждая из двух введенных групп условий синтеза в форме неравенств, критериальные функции P_1 и P_2 будем формировать по-разному.

Критериальную функцию $P_1 = P_1(x)$ введем следующим образом:

$$P_1 = \begin{cases} 0 & \text{— при выполнении неравенств (18.20);} \\ v - j + \frac{2}{\pi} \arctg \left| C_j(x) \right| - G_1 > 0, & (18.22) \\ G_2 > 0, \dots, G_{j-1} > 0, \text{ но } G_j \leq 0 \ (j \leq v). \end{cases}$$

Из формулы (18.22) видно, что

1) функция $P_1 = P_1(x)$ существует при любых значениях варьируемых параметров x ;

2) при выполнении всех неравенств вида (18.20), т.е. всех обязательных условий синтеза, $P_1 = 0$;

3) при выполнении хотя бы одного из неравенств (18.20) $P_1 > 0$;

4) в случае, когда $P_1 > 0$, величина критерия P_1 определенным образом ранжирована, так как зависит от двух факторов: во-первых, от номера j того из неравенств (18.20), которое не выполняется первым, и во-вторых, от значения G_j (заметим, что $G_j \leq 0$).

В последнем случае значение P_1 всегда принадлежит промежутку $[v-j, v-j+1]$, так что по величине критерия P_1 можно сразу же установить номер j (чем меньше j , тем P_1 больше). В пределах же указанного промежутка критерий P_1 зависит от значения $|G_j|$, характеризующего степень невыполнения неравенства с номером j (чем больше $|G_j|$, т.е. чем меньше G_j , тем P_1 больше).

Область значений варьируемых параметров x , в пределах которой выполняются обязательные условия синтеза и потому $P_1(x) \equiv 0$, будем обозначать через Ω .

Критериальную функцию $P_2 = P_2(x)$ введем следующим образом:

$$P_2 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^w \rho_j \left(|H_j| - H_j \right)^2, \quad (18.23)$$

где ρ_j — весовые коэффициенты, назначаемые проектировщиком ($\rho_j > 0$).

Функция $P_2 = P_2(x)$ определена только в области существования проектируемого механизма в виде замкнутой кинематической цепи, т.е. при $x \in \Omega$.

Из формулы (18.23) видно, что при выполнении всех неравенств (18.21) критерий $P_2 = 0$. При невыполнении хотя бы одного из этих неравенств критерий $P_2 > 0$. Так, если не выполняется только одно из неравенств (18.21), имеющее номер j , то $P_2 = \rho_j H_j^2$. Отсюда следует, что критерий P_2 тем больше, чем выше степень невыполнения указанного неравенства, характеризующаяся величиной $|H_j|$.

Весовые коэффициенты ρ_j позволяют установить определенную систему приоритетов при рассмотрении условий (18.21). Относительная значимость того или иного из условий (18.21) зависит от величины соответствующего весового коэффициента. Если, например, j_1 -е условие имеет большую значимость, чем j_2 -е условие, то нужно принять: $\rho_{j_1} > \rho_{j_2}$.

Обозначим через Ω_* область значений варьируемых параметров x , в пределах которой выполняются все неравенства (18.21) и потому $P_2(x) \equiv 0$. Очевидно, что область Ω_* составляет некоторую часть области Ω .

Перейдем теперь к построению целевой функции $P = P(x)$. Эту функцию примем в таком виде:

$$P = \begin{cases} P_1 + C & \text{при } P_1 > 0; \\ P_2 & \text{— при } P_1 = 0, \end{cases} \quad (18.24)$$

где C — произвольное большое положительное число. Число C должно значительно превышать ожидаемое максимально возможное значение критерия P_2 , т.е.

$$C \gg (P_2)_{\max}. \quad (18.25)$$

Выполнение условия (18.25) гарантирует существенное скачкообразное уменьшение значения целевой функции $P = P(x)$ при переходе значений варьируемых параметров x из области, в которой $P_1 > 0$ (т.е. в которой имеет место разрыв кинематической цепи механизма хотя бы при одном значении его обобщенной координаты s), в область значений $x \in \Omega$, в которой $P_1 = 0$.

Характер зависимости значений P целевой функции от x иллюстрирует рис. 18.1

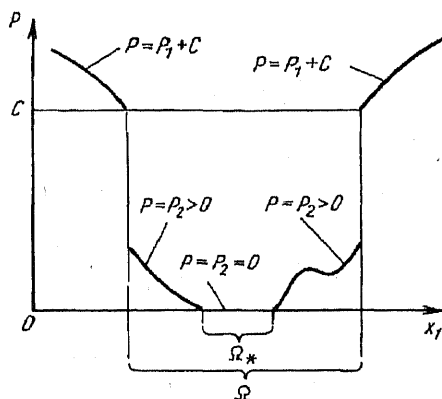


Рис. 18.1

(ради простоты изображения на рисунке принято: $n = 1$, хотя в действительности обычно $n > 1$). Из формул (18.22) — (18.25), а также и из рис. 18.1, видно, что

1) при значениях x , не принадлежащих области Ω , имеем: $P = P_1 + C > C$, причем при приближении x к границам области Ω критерий P_1 , а значит, и целевая функция P , уменьшается, достигая значения C на границе области Ω ;

2) при значениях x , принадлежащих области Ω , но лежащих за пределами области Ω_* , имеем $P > P_2 > 0$ и $P \ll C$, причем по мере приближения x к границам области Ω_* критерий P_2 , а значит и целевая функция P , уменьшается, достигая значения 0 на границе области Ω_* ;

3) при значениях x , принадлежащих области Ω_* , имеем $P = P_2 = 0$, т.е. целевая функция P достигает своего минимально возможного значения, равного нулю.

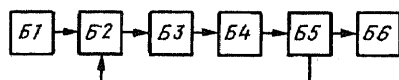
Из сказанного можно сделать вывод о том, что целевая функция $P = P(x)$, построенная в соответствии с формулой (18.24), адекватно отображает условия задачи синтеза, имеющие форму неравенств (18.20) и (18.21). Поиск значений варьируемых параметров x , при которых выполняются указанные условия, сведен теперь к поиску глобального (наименьшего из всех возможных) минимума целевой функции $P = P(x)$, равного в данном случае нулю.

18.3.4. Общая структура алгоритма

Алгоритм аналитико-оптимизационного синтеза рычажных механизмов АКУ может быть представлен в виде структурной схемы, показанной на рис. 18.2. Алгоритм включает в себя следующие блоки:

Б1 — ввод исходных данных, и в частности, первоначальных значений $x^{[0]}$ варьируемых параметров x механизма;

Б2 — аналитический синтез, т.е. расчет вычисляемых параметров



$q = \{q_1, \dots, q_m\}$ механизма при известных значениях варьируемых

параметров $x = \{x_1, \dots, x_n\}$;

Рис. 18. 2

Б3 — анализ механизма при известных значениях его постоянных параметров;

Б4 — расчет значения P целевой функции $P(x)$ при известных значениях варьируемых параметров x ;

Б5 — «оптимизатор»; его назначение — организация вычислительной процедуры поиска минимума целевой функции $P(x)$ и формирование новых значений варьируемых параметров x ;

Б6 — вывод результатов расчета.

Основными являются блоки Б2, Б3, Б4 и Б5, счет в которых циклически повторяется. В первый раз переход к блоку Б2 происходит из Б1, в последующие — из Б5. Если в блоке Б5 использован один из направленных методов поиска, то новые значения переменных x должны, как правило, привести к уменьшению значения P целевой функции. Выход в блок Б6 происходит по одному из следующих признаков: а) получен благоприятный механизм (чему соответствует значение $P=0$); б) значения P целевой функции в течение ряда итераций остаются больше нуля, но не наблюдается сколь-нибудь заметное их уменьшение.

Расчет вычисляемых параметров $q_1, \dots, q_m$ механизма в блоке Б2 осуществляется по формулам вида (18.19).

К моменту начала анализа механизма в блоке Б3 известны значения всех его постоянных параметров как вычисляемых q , так и варьируемых x . Анализ механизма выполняется для ряда заданных дискретных моментов времени $t = t_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), которым соответствуют заданные значения относительного перемещения $s = s_i$ и относительной скорости $\dot{s} = \dot{s}_i$ поршня по отношению к цилиндру (см. п. 18.2.2).

Целью анализа механизма при каждом $t = t_i$ является, во-первых, проверка условий существования механизма в виде замкнутой кинематической цепи (т.е. обязательных условий синтеза вида (18.20)) и, во-вторых, расчет величин, которые фигурируют в основных и желательных условиях синтеза, выражающихся неравенствами вида (18.21). Заметим, что указанные величины могут быть определены только в том случае, когда механизм существует.

Алгоритмы анализа рычажных механизмов АКУ описаны в главе 17.

Если в процессе анализа обнаруживается нарушение хотя бы одного из условий вида (18.20) существования механизма, то происходит переход из блока Б3 в блок Б4, в котором определяется значение критерия P_1 по нижней строке формулы (18.22), а затем значение целевой функции P по верхней строке формулы (18.24).

В случае, когда все неравенства вида (18.20) выполняются, в результате анализа механизма в блоке Б3 определяются: 1) величины $y_C(t_i)$, $\varphi(t_i)$, $X_L(t_i)$, $\dot{y}_C(t_i)$, $\dot{\varphi}(t_i)$, где $i = 1, 2, \dots, N$ (часть из этих величин фигурирует в основных условиях синтеза (18.8) — (18.12)); 2) величины, которые фигурируют в желательных условиях синтеза, выражающихся неравенствами (например, критерии передачи).

После расчета указанных выше величин происходит переход к блоку Б4, в котором определяются: 1) критерий P_1 — по верхней строке формулы (18.22); 2) величины $\Delta y_C(T)$ и $\Delta X_L(t_i)$ — по формулам (18.13) и (18.14); 3) величины H_j ($j = 1, 2, \dots, w$), фигурирующие в левых частях неравенств вида (18.21); 4) критерий P_2 — по формуле (18.23); 5) значение P — целевой функции — по нижней строке формулы (18.24).

В блоке Б5 алгоритма используется тот или иной метод оптимизации, т.е. численный метод поиска минимума целевой функции $P = P(x)$, являющейся функцией n переменных $x_1, \dots, x_n$. Выбранный метод оптимизации должен обеспечить нахождение глобального минимума целевой функции (равного в данном случае нулю) за экономически оправданное время работы компьютера.

18.3.5. Особенности целевой функции

Введем понятия: *проба* целевой функции — однократный подсчет значения P целевой функции при фиксированных значениях переменных x ; *объем пробы* — объем вычислений при реализации одной пробы на компьютере; *цена поиска* — число проб, затраченных на поиск рациональных значений переменных x , при которой значение целевой функции становится достаточно малым (т.е. равным нулю — применительно к рассматриваемым здесь задачам).

Для рационального выбора метода оптимизации необходимо проанализировать объект оптимизации — целевую функцию $P = P(x)$, определяемую формулой (18.24); — с вычислительной точки зрения. Из п. 18.3.3 следует, что целевые функции в рассматриваемых задачах имеют следующие особенности:

1) пробы целевой функции являются единственным способом информации о ее поведении, так как непосредственное аналитическое выражение функции $P(x)$ как функции переменных x отсутствует, а известен лишь алгоритм вычисления значения P при фиксированном x ;

2) область существования функции $P(x)$ образует все вещественные значения переменных x ;

3) функция $P(x)$ является однозначной и принимает конечные и неотрицательные значения при любых значениях переменных x ;

4) функция $P(x)$ непрерывна при $x \in \Omega$. Однако на границе области Ω имеет место разрыв непрерывности (конечный) функции $P(x)$, поскольку, согласно формуле (18.24), при пересечении границы вовнутрь области Ω значение P уменьшается скачком;

5) функция $P(x)$ имеет в области Ω , как правило, несколько локальных минимумов, т.е. является многоэкстремальной; глобальный минимум функции $P(x)$, равный нулю, достигается не в какой-либо одной точке n -мерного пространства варьируемых параметров x , а в некоторой области Ω_* параметров x (см. п. 18.3.3 и рис. 18.1);

6) функция $P(x)$ нелинейна и имеет, как правило, овражный характер (эффект оврага показан на рис. 18.3, где для случая $n = 2$ изображены линии уровня функции $P = P(x_1, x_2)$;

7) число n переменных чаще всего порядка 3 — 6, но может быть и более;

8) объем пробы может быть довольно велик, особенно при синтезе многосвязных механизмов, а также механизмов сложной структуры (например, плоских рычажных механизмов второго класса).

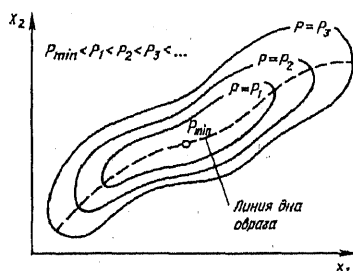


Рис. 18.3

Из пунктов 2 и 3 следует, что поиск минимума функции $P(x)$ можно начинать с произвольной точки $x = x^{[0]}$, например, со значений параметров $x_1, x_2, \dots, x_n$ механизма, при которых имеет место разрыв кинематической цепи (хотя, конечно, для сокращения объема вычислений при поиске минимума целевой функции лучше начинать его с более благоприятных значений $x^{[0]}$).

18.3.6. О выборе метода оптимизации

При выборе метода оптимизации следует его оценивать с точки зрения а) достигаемого эффекта оптимизации и б) продолжительности решения задачи на современных компьютерах.

Эффект оптимизации может быть измерен величиной наименьшего из всех найденных при поиске значений P целевой функции.

Время решения на компьютере задачи оптимизационного синтеза рычажного механизма может быть подсчитано по формуле $T = k t_{\Pi}$, где k — цена поиска, t_{Π} — машинное время, необходимое для выполнения одной пробы. Цена поиска k зависит от принятого метода поиска и от числа n варьируемых параметров, в время t_{Π} — от объема пробы и быстродействия компьютера.

В задачах синтеза рычажных механизмов объем пробы обычно значителен, поскольку при ее реализации производится расчет вычисляемых параметров и многократный анализ механизма для ряда последовательных значений его обобщенной координаты s или времени t .

Причем при синтезе многозвенных механизмов или механизмов сложной структуры объем пробы существенно возрастает. Уменьшения объема пробы можно достигнуть, главным образом, рациональным программированием блока анализа БЗ (см. п. 18.3.4).

Зная t_{Π} (что легко найти при контрольном счете на имеющемся компьютере) и назначив T , нетрудно подсчитать k по приведенной выше формуле. Найденное значение k может служить некоторым ориентиром при выборе метода оптимизации.

При выборе метода поиска минимума целевых функций $P(x)$, встречающихся в задачах синтеза рычажных механизмов

АКУ, следует учитывать как неблагоприятные (с вычислительной точки зрения), так и благоприятные особенности этих функций. К первым относятся: нелинейность, многоэкстремальность, овражный характер функции $P(x)$, необходимость получения ее глобального минимума (равного нулю), значительный объем одной пробы. Благоприятной особенностью целевой функции $P(x)$ является наличие области Ω_* параметров x , в пределах которой $P(x) \equiv 0$, что существенно облегчает поиск глобального минимума, поскольку он имеет место в любой точке области Ω_* .

Экспериментальная проверка ряда известных методов поиска показала, что при сравнительно малых значениях числа n варьируемых параметров вполне пригодны надежные, хотя и не столь быстрые методы сканирования и статистических испытаний. При больших значениях n хорошие результаты дают такие случайные или детерминированные методы направленного поиска, которые учитывают наличие оврагов на гиперповерхности целевой функции. В частности, можно рекомендовать методы сопряженных градиентов и метод деформируемого многогранника. Быструю сходимость к минимуму при удовлетворительном отслеживании оврага обеспечивает поиск по методу, описанному в книге [8].

Поиск часто приводит не к глобальному, а к одному из локальных минимумов целевой функции, причем к тому, который ближе расположен к начальной точке $x^{[0]}$. Но начальная точка при отсутствии априорной информации может быть выбрана неудачно. Поэтому целесообразен поиск из нескольких начальных точек, получаемых, например, с помощью датчика случайных чисел. В этом случае можно ожидать, что найдется такая начальная точка, поиск из которой приведет в область Ω_* , т.е. к глобальному минимуму целевой функции.

18.3.7. Некоторые вычислительные аспекты

Качество решения задачи аналитико-оптимизационного синтеза рычажного механизма зависит не только от качества разработанного алгоритма и соответствующей программы, но и от уровня использования заложенных в ней возможностей. Полноценный учет возможностей, заложенных в программе, позво-

ляет влиять на достигаемый эффект оптимизации и на время решения задачи. Это влияние обеспечивается в основном за счет рационального выбора исходных данных при решении конкретной задачи синтеза.

Перечислим те параметры, входящие в состав исходных данных, от рационального выбора которых зависит качество решения задачи: 1) задаваемые параметры, фигурирующие в основных и желательных условиях синтеза $C_1, C_2, \dots, C_{11}$ и др.); 2) число m вычисляемых и число n варьируемых параметров механизма; 3) конкретный выбор варьируемых параметров; 4) первоначальные значения $x_1^{[0]}, \dots, x_n^{[0]}$ варьируемых параметров; 5) весовые коэффициенты $\rho_1, \dots, \rho_w$, фигурирующие в формуле (18.23) для критерия P_2 ; 6) служебные параметры, используемые в «оптимизаторе» (т.е. в блоке Б5 алгоритма) и регулирующие ход поиска; 7) значения числовых признаков, определяющих выбор метода поиска из имеющегося набора методов.

Эффект оптимизации в значительной мере зависит от удачного выбора начальной точки $x = x^{[0]}$ (хотя поиск в принципе можно начинать с произвольных значений переменных x). В частности, рекомендуется выбирать начальные значения варьируемых параметров таким образом, чтобы выполнялись те из обязательных и желательных условий синтеза, которые не зависят от вычисляемых параметров. Например, значения варьируемых параметров следует брать в пределах конструктивных ограничений. Значительный эффект дает также выбор варьируемых параметров в пределах областей существования соответствующих механизмов с благоприятными значениями угла передачи или угла давления.

Возможен и другой путь, при котором начальная точка $x^{[0]}$ выбирается произвольно, но задача синтеза решается в несколько этапов по одной и той же программе с постепенным усложнением условий синтеза на каждом этапе. На первом этапе из условий задачи синтеза исключаются наиболее трудновыполнимые условия (кроме тех условий в форме уравнений, которые используются для расчета вычисляемых параметров механизма). Число варьируемых параметров механизма на первом этапе может быть уменьшено. Полученный в результате реше-

ния упрощенной задачи механизм берется в качестве исходного для второго этапа и т.д. На втором, третьем и последующих этапах постепенно восстанавливаются все исключенные ранее условия синтеза.

Повышение эффекта оптимизации можно достигнуть также за счет рационального выбора весовых коэффициентов в формуле (18.23). Такой выбор делается как с учетом физической стороны задачи, так и по результатам численного эксперимента на компьютере.

Ускорение сходимости поиска достигается также за счет рационального выбора значений ряда параметров, регулирующих ход оптимизации в блоке Б5.

§ 18.4. СИНТЕЗ МЕХАНИЗМА ТИПА «НОЖНИЦЫ» (СХЕМА N2)

18.4.1. Вычисляемые и варьируемые параметры механизма

Механизм типа ножниц, применяемый в АКУ, изображен на рис. 17.36 (вместе с транспортируемым грузом). Схема механизма была приведена ранее также и на рис. 16.16 (схема N 2), 16.18 и 17.26.

Рассматриваемый механизм состоит из четырехзвенного ползунно-коромыслового механизма (звенья 0, 1, 2 и 3) и присоединенной диады, включающей звенья 4 и 5 (причем, звено 5 — это транспортируемый груз). Постоянные параметры l , Y_L , X_C , Y_C , относящиеся к присоединенной диаде (см. п. 17.11.6), считаем заданными.

Четырехзвенный механизм имеет 8 постоянных параметров (см. п. 17.11.2): x_{02} , y_{02} , l_2 , l_3 , X_{3A} , Y_{3A} , X_{2B} , Y_{2B} . Поскольку начало неподвижной системы координат Oxy совмещено с точкой O_1 , то $x_{01} = y_{01} = 0$.

Для синтеза четырехзвенного механизма применим аналитико-оптимизационный метод, изложенный в § 18.3. Все восемь постоянных параметров механизма будем считать неизвестными и разделим их на две группы: 1) вычисляемые — X_{3A} , Y_{3A} , X_{2B} , Y_{2B} , l_2 ; 2) варьируемые — x_{02} , y_{02} , l_3 . Отсюда видно, что $m = 5$, $n = 3$, $p = m + n = 8$.

Вычисляемым и варьируемым параметрам присвоим вторые, унифицированные, обозначения (см. п. 18.3.2):

$$q_1 = X_{3A}, \quad q_2 = Y_{3A}, \quad q_3 = X_{2B}, \quad q_4 = Y_{2B}, \quad q_5 = l_2; \quad (18.26)$$

$$x_1 = x_{02}, \quad x_2 = y_{02}, \quad x_3 = l_3. \quad (18.27)$$

18.4.2. Алгоритм расчета вычисляемых параметров

Пусть на некотором шаге поиска трем варьируемым параметрам x_1, x_2, x_3 присвоены определенные значения. Пять вычисляемых параметров механизма будем определять из пяти условий синтеза в форме уравнений. К последним относятся уравнения (18.4) — (18.7), а также дополнительное уравнение

$$\mu(0) = \pi - \mu_d. \quad (18.28)$$

Уравнение (18.28) введено вместо условия (17.7), имеющего форму неравенства. Такая замена правомерна, поскольку наименее благоприятное значение угла передачи $\mu = \mu(s)$ для механизма типа ножниц достигается при $s = 0$.

Вычисляемые параметры определяем в такой последовательности: сначала находим l_2 из уравнения (18.28), а затем находим $X_{3A}, Y_{3A}, X_{2B}, Y_{2B}$ из системы четырех уравнений (18.4) — (18.7).

Выразив $\mu(0)$ на основании формул (17.48), (17.49) и (17.51) при $s = 0$, из уравнения (18.28) получаем

$$l_2 = -l_3 \cos \mu_d + \sqrt{x_{02}^2 + y_{02}^2 - l_3^2 \sin^2 \mu_d}. \quad (18.29)$$

Параметр l_2 , найденный по формуле (18.29), будет вещественным и положительным при выполнении следующего условия:

$$x_{02}^2 + y_{02}^2 > l_3^2. \quad (18.30)$$

После определения l_2 следует вычислить углы $\varphi_2(0)$, $\varphi_3(0)$, $\varphi_2(S)$ и $\varphi_3(S)$ по формулам анализа ползунно-коромыслового механизма (см. п. 17.11.2), а именно по формулам

(17.48), (17.49), (17.51), (17.52) и (17.53) при $M = +1$ для значений $s = 0$ и $s = S$.

В соответствии с формулами преобразования координат (см. рис. 17.36) получаем:

$$\begin{aligned} X_L &= - (x_B - x_A) \cos \varphi - (y_B - y_A) \sin \varphi, \\ Y_L - l &= (x_B - x_A) \sin \varphi - (y_B - y_A) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (18.31)$$

С учетом формул (18.31) система уравнений (18.4) — (18.7) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} y_B(0) &= C_1, \quad x_B(0) - x_A(0) = C_2, \\ y_B(0) - y_A(0) &= Y_L - l, \\ [x_B(S) - x_A(S)] \sin C_3 - [y_B(S) - y_A(S)] \cos C_3 &= Y_L - l. \end{aligned} \quad (18.32)$$

После постановки в уравнения (18.32) выражений для x_A , y_A , x_B , y_B , составленных в соответствии с формулами (17.47) и (17.54) при $s = 0$ и $s = S$, преобразуем эти уравнения к такому виду:

$$\begin{aligned} X_{2B} \sin \varphi_2(0) + Y_{2B} \cos \varphi_2(0) &= C_1, \\ X_{2B} \cos \varphi_2(0) - Y_{2B} \sin \varphi_2(0) - X_{3A} \cos \varphi_3(0) + \\ &+ Y_{3A} \sin \varphi_3(0) = C_2 + x_{02}, \\ X_{3A} \sin \varphi_3(0) + Y_{3A} \cos \varphi_3(0) &= C_1 + l - Y_L - y_{02}, \\ X_{3A} \sin [\varphi_3(S) - C_3] + Y_{3A} \cos [\varphi_3(S) - C_3] - \\ - X_{2B} \sin [\varphi_2(S) - C_3] - Y_{2B} \cos [\varphi_2(S) - C_3] &= \\ = Y_L - l + (x_{02} - S) \sin C_3 - y_{02} \cos C_3. \end{aligned} \quad (18.33)$$

Таким образом, получена линейная система уравнений. Известные $q_1 = X_{3A}$, $q_2 = Y_{3A}$, $q_3 = X_{2B}$, $q_4 = Y_{2B}$ находим по формулам Крамера:

$$q_r = \Delta_r / \Delta \quad (r = 1, 2, 3, 4), \quad (18.34)$$

где Δ , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 и Δ_4 — определители четвертого порядка.

Определитель Δ системы имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (18.35)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = \sin \varphi_2(0), \quad a_{14} = \cos \varphi_2(0), \\ a_{21} &= -\cos \varphi_3(0), \quad a_{22} = \sin \varphi_3(0), \quad a_{23} = a_{14}, \\ a_{24} &= -a_{13}, \quad a_{31} = a_{22}, \quad a_{32} = -a_{21}, \quad a_{33} = 0, \quad a_{34} = 0, \\ a_{41} &= \sin[\varphi_3(S) - C_3], \quad a_{42} = \cos[\varphi_3(S) - C_3], \\ a_{43} &= -\sin[\varphi_2(S) - C_3], \quad a_{44} = -\cos[\varphi_2(S) - C_3]. \end{aligned} \quad (18.36)$$

Определители Δ_r получаются из определителя Δ заменой r -го столбца ($r = 1, 2, 3, 4$) на столбец свободных членов $(b_1, b_2, b_3, b_4)^T$, где

$$\begin{aligned} b_1 &= C_1, \quad b_2 = C_2 + x_{02}, \quad b_3 = C_1 + l - Y_L - y_{02}, \\ b_4 &= Y_L - l + (x_{02} - S) \sin C_3 - y_{02} \cos C_3. \end{aligned} \quad (18.37)$$

Расчет пяти вычисляемых параметров по формулам (18.29) и (18.34) производится в блоке Б2 алгоритма (см. п. 18.3.4).

18.4.3. Условия синтеза в форме неравенств

К таким условиям относятся, во-первых, неравенства (18.8) — (18.12), выражающие основные условия синтеза, и во-вторых, неравенства, характеризующие обязательные и желательные условия синтеза (см. п. 18.1.3).

Обязательные условия синтеза выражаются неравенствами (18.30), (17.50) и (17.66). С учетом формул (17.49) и (17.65) неравенства (17.50) и (17.66) можно записать в таком виде:

$$(l_2 - l_3)^2 < (x_{02} - s)^2 + y_{02}^2 < (l_2 + l_3)^2; \quad (18.38)$$

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 > (Y_L - l)^2. \quad (18.39)$$

Неравенства (18.38) и (18.39) должны выполняться при всех $s \in [0, S]$.

К желательным условиям синтеза в данном случае относятся конструктивные ограничения, которые выражаются следующими неравенствами:

$$A_r \leq Z_r \leq B_r \quad (r = 1, 2, \dots, p), \quad (18.40)$$

где z_r — искомые параметры механизма (они включают в себя вычисляемые и варьируемые параметры — см. п. 18.3.2 и формулы (18.18)); A_r и B_r — нижний и верхний допустимые пределы изменения параметра z_r (задаваемые величины); $p = m + n = 8$.

18.4.4. Формирование целевой функции

Расчету значения целевой функции на каждом шаге оптимизационного поиска предшествует анализ механизма, который производится в блоке БЗ алгоритма (см. рис. 18.2). О назначении блока анализа БЗ, а также о его содержании, говорилось в п. 18.3.4. Анализ механизма типа ножниц выполняется по алгоритму, описанному в пп. 17.11.2 и 17.11.6.

Методика построения целевой функции $P = P(x)$ была изложена в п. 18.3.3. Целевая функция рассчитывается по формуле (18.24), а входящие в нее критерии P_1 и P_2 — по формулам (18.22) и (18.23). В свою очередь, для расчета критериев

P_1 и P_2 нужно составить выражения для левых частей $G_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, v$) и $H_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, w$) неравенств (18.20) и (18.21).

Функции $G_j(x)$ формируем, основываясь на неравенствах (18.30), (18.38) и (18.39):

$$\begin{aligned} G_1(x) &= x_{02}^2 + y_{02}^2 - l_3^2, \\ G_2(x) &= (x_{02} - s)^2 + y_{02}^2 - (l_2 - l_3)^2, \\ G_3(x) &= (l_2 + l_3)^2 - (x_{02} - s)^2 - y_{02}^2, \\ G_4(x) &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - (Y_L - l)^2. \end{aligned} \quad (18.41)$$

Отсюда видно, что $v = 4$. Величины x_A , y_A , x_B и y_B необходимые для расчета $G_4(x)$, определяются в блоке БЗ анализа механизма.

При формировании функций $H_j(x)$ используются неравенства (18.8) — (18.12) и (18.40). Функции $H_j(x)$ введем так:

$$\begin{aligned} H_1 &= \delta_1 / (C_5 - C_4), & H_2 &= \min_{i=1,2,\dots,N} \delta_2^{(i)} / (C_7 - C_6), \\ H_3 &= \delta_3 / (C_9 - C_8), & H_4 &= \delta_4 / (C_{11} - C_{10}), \\ H_5 &= \delta_5 / C_3, & H_6 &= \min_{r=1,2,\dots,p} \delta_6^{(r)}, \end{aligned} \quad (18.42)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \min \{ [\Delta y_C(T) - C_4], [C_5 - \Delta y_C(T)] \}, \\ \delta_2^{(i)} &= \min \{ [\Delta X_L(t_i) - C_6], [C_7 - \Delta X_L(t_i)] \}, \\ \delta_3 &= \min \{ [\dot{y}_C(T) - C_8], [C_9 - \dot{y}_C(T)] \}, \\ \delta_4 &= \min \{ [\dot{\phi}(T) - C_{10}], [C_{11} - \dot{\phi}(T)] \}, \end{aligned} \quad (18.43)$$

$$\delta_5 = \min_{i=1,2,\dots,N-1} (\varphi_{i+1} - \varphi_i),$$

$$\delta_6^{(r)} = \min \left(\frac{z_r - A_r}{B_r - A_r}, \frac{B_r - z_r}{B_r - A_r} \right).$$

Из формул (18.42) видно, что $w = 6$, т.е. число неравенств вида $H_j(x) \geq 0$ значительно сокращено по сравнению с числом исходных неравенств. Например, вместо $2p = 16$ неравенств (18.40) теперь нужно проверять только одно неравенство: $H_6 \geq 0$. Все введенные функции $H_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) есть безразмерные величины. Значения геометрических и кинематических параметров y_C , X_L , φ , μ , $\dot{y}_C$ и $\dot{\varphi}$ при $t = t_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), которые необходимы для расчета величин H_j , определяются в блоке БЗ анализа механизма.

18.4.5. О выборе исходных данных

При синтезе механизма типа ножниц в состав исходных данных входят:

- 1) информация о заданном законе движения $s = s(t)$, $0 \leq t \leq T$; в случае табличного представления функции $s(t)$ задаются значения следующих величин: N ; t_i , s_i , $\dot{s}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$);
- 2) l , Y_L , X_C , Y_C ;
- 3) $C_1, C_2, \dots, C_{11}$; μ_d ;
- 4) $m = 5$, $n = 3$, $p = 8$, $v = 4$, $w = 6$;
- 5) A_r, B_r ($r = 1, 2, \dots, p$);
- 6) $l_3^{[0]}$, $x_{02}^{[0]}$, $y_{02}^{[0]}$ — начальные значения варьируемых параметров;
- 7) ρ_j ($j = 1, 2, \dots, w$);
- 8) различные служебные параметры, используемые в блоке Б5 алгоритма.

Информация о заданном законе движения $s(t)$ приведена в п. 17.13.1.

При выборе начальных значений трех варьируемых параметров нужно учитывать конструктивные ограничения на эти

параметры, а также на вычисляемый параметр l_2 . Эти ограничения выражаются следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} A_6 \leq x_{02} \leq B_6, \quad A_7 \leq y_{02} \leq B_7, \quad A_8 \leq l_3 \leq B_8, \\ A_5^2 + 2A_5 l_3 \cos \mu_d + l_3^2 \leq x_{02}^2 + y_{02}^2 \leq B_5^2 + \\ + 2B_5 l_3 \cos \mu_d + l_3^2. \end{aligned} \quad (18.44)$$

При выполнении последнего из условий (18.44) параметр l_2 , найденный по формуле (18.29), будет принадлежать отрезку $[A_5, B_5]$.

Рациональные значения весовых коэффициентов ρ_j устанавливаются с помощью машинного эксперимента, т.е. путем многократного решения одной и той же задачи синтеза при различных значениях ρ_j . При первом счете можно принять $\rho_j = 1$ для всех $j = 1, 2, \dots, 6$ (если при этом будет получено благоприятное решение задачи, то упомянутого машинного эксперимента проводить не нужно).

§ 18.5. СИНТЕЗ ШЕСТИЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА С КАЧАЮЩИМСЯ ЦИЛИНДРОМ (СХЕМА N7)

18.5.1. Вычисляемые и варьируемые параметры механизма

Рассматриваемый рычажный механизм изображен на рис. 17.37 (его схема была приведена ранее также на рисунках 16.16 (схема N7) и 17.27). Механизм состоит из шестизвенного механизма с качающимся цилиндром (звенья 0, 1, ..., 5) и присоединенной диады (звенья 6 и 7). Как и в § 18.4, постоянные параметры $l = AL, Y_L, X_C, Y_C$ присоединенной диады считаются заданными.

Шестизвенный механизм с качающимся цилиндром имеет 14 постоянных параметров, список которых приведен в п. 17.11.3 (начало неподвижной системы координат Oxy совмещено

с опорой O_3 ; поэтому постоянные параметры $x_{03} = 0$ и $y_{03} = 0$ исключены из указанного списка).

Постоянные параметры $x_{01}, y_{01}, y_{02}, (l_y)_0 = (O_1 D)_{\min}$ шестизвенного механизма будем считать заданными. При синтезе шестизвенного механизма подлежат определению значения 10 других постоянных параметров. Последние разделим на две группы: 1) вычисляемые — $X_{3A}, Y_{3A}, X_{5B}, Y_{5B}, x_{02}, l_3$; 2) варьируемые — l_4, l_5, X_{3E}, Y_{3E} . Отсюда видно, что $m = 6, n = 4, p = m + n = 10$.

Для вычисляемых и варьируемых параметров механизма будем использовать также вторые обозначения:

$$\begin{aligned} q_1 &= X_{3A}, \quad q_2 = Y_{3A}, \quad q_3 = X_{5B}, \quad q_4 = Y_{5B}, \\ q_5 &= x_{02}, \quad q_6 = l_3; \end{aligned} \quad (18.45)$$

$$x_1 = l_4, \quad x_2 = l_5, \quad x_3 = X_{3E}, \quad x_4 = Y_{3E}. \quad (18.46)$$

18.5.2. Алгоритм расчета вычисляемых параметров

В соответствии с общей структурой алгоритма аналитико-оптимизационного синтеза рычажных механизмов АКУ (см. п. 18.3.4 и рис. 18.2), расчет вычисляемых параметров q механизма выполняется в блоке Б2 при известных значениях варьируемых параметров x . Вычисляемые параметры $q_1, \dots, q_6$ рассматриваемого шестизвенного механизма будем определять из шести условий синтеза, имеющих форму равенств. Такими условиями являются, во-первых, четыре уравнения (18.4) — (18.7), относящиеся к основным условиям синтеза, и во-вторых, два дополнительных уравнения:

$$\mu_D(0) = (\mu_K)_D; \quad \mu_D(S) = (\mu_K)_D, \quad (18.47)$$

где $(\mu_K)_D$ — заданный минимально допустимый угол передачи в шарнире D механизма.

Уравнения (18.47) введены взамен условия

$$(\mu_K)_D \leq \mu_D(S) \leq \pi - (\mu_K)_D \quad \text{при всех } s \in [0, S],$$

поскольку наименее благоприятное значение угла передачи $\mu_D = \mu_D(S)$ достигается при $s = 0$ или $s = S$.

Расчет вычисляемых параметров выполняем в такой последовательности:

- 1) находим x_{02} и l_3 на основании двух уравнений (18.47);
- 2) определяем угловые координаты φ_3 и φ_5 звеньев 3 и 5 механизма (см. рис. 17.37) при $s = 0$ и $s = S$, используя формулы анализа, приведенные в п. 17.11.3;
- 3) находим X_{3A} , Y_{3A} , X_{5B} , Y_{5B} на основании четырех уравнений (18.4) — (18.7).

В соответствии с формулами (17.42) и (17.44) уравнения (18.47) принимают такой вид:

$$\begin{aligned} \left[(l_y)_0 \right]^2 + l_3^2 - (x_{02} - x_{01})^2 - (y_{02} - y_{01})^2 = \\ = 2 \left(l_y \right)_0 l_3 \cos(\mu_d)_D, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[(l_y)_{0+S} \right]^2 + l_3^2 - (x_{02} - x_{01})^2 - (y_{02} - y_{01})^2 = \\ = 2 \left[(l_y)_{0+S} \right] l_3 \cos(\mu_d)_D. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$l_3 = \left[2 (l_y)_{0+S} \right] / \left[2 \cos(\mu_d)_D \right], \quad (18.48)$$

$$x_{02} = x_{01} + \sqrt{l_3^2 - \left[(l_y)_0 \right]^2 - (l_y)_0 S - (y_{02} - y_{01})^2}. \quad (18.49)$$

Из формул (18.48) и (18.49) видно, что вычисляемые параметры l_3 и x_{02} не зависят от варьируемых параметров механизма и поэтому их следует определять по этим формулам до начала оптимизационного поиска.

Расчет углов $\varphi_3(0)$, $\varphi_5(0)$, $\varphi_3(S)$ и $\varphi_5(S)$ производим по алгоритму анализа, изложенному в пп. 17.11.1 и 17.11.3, используя формулы (17.42), (17.44) — (17.46), (17.55), (17.56), (17.58) — (17.60) для значений $s = 0$ и $s = S$.

В п. 18.4.2 было показано, что уравнения (18.4) — (18.7) могут быть записаны в виде системы (18.32). После подстанов-

ки в уравнения (18.32) выражений для x_A , y_A , x_B и y_B , составленных в соответствии с формулами (17.47) и (17.61), преобразуем эти уравнения к такому виду:

$$\begin{aligned} X_{5B} a_{13} + Y_{5B} a_{14} &= b_1, \\ X_{3A} a_{21} + Y_{3A} a_{22} + X_{5B} a_{23} + Y_{5B} a_{24} &= b_2, \\ X_{3A} a_{31} + Y_{3A} a_{32} &= b_3, \\ X_{3A} a_{41} + Y_{3A} a_{42} + X_{5B} a_{43} + Y_{5B} a_{44} &= b_4, \end{aligned} \quad (18.50)$$

где

$$\begin{aligned} a_{13} &= -a_{24} = \sin \varphi_5(0), \quad a_{14} = a_{23} = \cos \varphi_5(0), \\ a_{43} &= -\sin[\varphi_5(S) - C_3], \quad a_{44} = -\cos[\varphi_5(S) - C_3], \\ b_4 &= Y_L - l + x_{02} \sin C_3 - y_{02} \cos C_3; \end{aligned} \quad (18.51)$$

a_{21} , a_{22} , a_{31} , a_{32} , a_{41} , a_{42} , b_1 , b_2 , b_3 — см. формулы (18.36) и (18.37).

Примем $a_{11} = a_{12} = a_{33} = a_{34} = 0$.

Неизвестные $q_1 = X_{3A}$, $q_2 = Y_{3A}$, $q_3 = X_{5B}$, $q_4 = Y_{5B}$ находим из линейной системы уравнений (18.50) по формулам (18.34), в которых определитель Δ вычисляется по формуле (18.35), а определители Δ_r ($r = 1, 2, 3, 4$) — так, как описано в п. 18.4.2.

18.5.3. Условия синтеза в форме неравенств

К таким условиям относятся, во-первых, неравенства (18.8) — (18.12), выражающие основные условия синтеза, и во-вторых, неравенства, характеризующие обязательные и желательные условия синтеза (см. п. 18.1.3).

Обязательные условия синтеза выражаются неравенствами (17.43) и (17.57). Введенные выше условия (18.47) гарантируют выполнение неравенств (17.43). Поэтому нужно учитывать только неравенства (17.57), которые можно записать в таком виде:

$$(l_4 - l_5)^2 < x_E^2 + y_E^2 < (l_4 + l_5)^2, \quad (18.52)$$

где x_E и y_E — величины, определяемые в блоке анализа механизма в результате последовательного применения формул (17.42), (17.44) — (17.46) и (17.55). Неравенства (18.52) должны выполняться при всех $s \in [0, S]$.

К желательным условиям синтеза в данном случае относятся, во-первых, конструктивные ограничения (18.40) на варьируемые и вычисляемые параметры механизма (число их равно $p = 10$), и во-вторых, ограничения на угол передачи μ_F :

$$(\mu_d)_F \leq \mu_F(s) \leq \pi - (\mu_d)_F \quad \text{при всех } s \in [0, S], \quad (18.53)$$

где $(\mu_d)_F$ — заданный минимально допустимый угол передачи в шарнире F механизма.

18.5.4. Формирование целевой функции

При известных значениях варьируемых параметров x целевая функция $P = P(x)$ определяется по формуле (18.24). Для расчета P нужно предварительно найти критерии P_1 и P_2 по формулам (18.22) и (18.23). Прежде чем применить эти формулы, нужно составить выражения для левых частей $G_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, v$) и $H_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, w$), неравенств (18.20) и (18.21).

Функции $G_j(x)$ составляем на базе неравенств (18.52):

$$\begin{aligned} G_1(x) &= x_E^2 + y_E^2 - (l_4 - l_5)^2, \\ G_2(x) &= (l_4 + l_5)^2 - x_E^2 - y_E^2. \end{aligned} \quad (18.54)$$

Отсюда видно, что $v = 2$.

При формировании функций $H_j(x)$ используются неравенства (18.8) — (18.12), (18.40) и (18.53). Число w вводимых функций $H_j(x)$ равно в данном случае семи, причем шесть первых функций определяется формулами (18.42). Функцию

$H_7(x)$, соответствующую неравенству (18.53), примем в следующем виде:

$$H_7 = \left[\mu_F^* / (\mu_K)_F \right] - 1, \quad (18.55)$$

где

$$\mu_F^* = \min_{i=1,2,\dots,N} \left\{ \left[\mu_F(s_i), \pi - \mu_F(s_i) \right] \right\}.$$

18.5.5. О выборе исходных данных

При синтезе рассматриваемого шестизвенного механизма в состав исходных данных входят примерно те же величины, что и при синтезе механизма типа ножниц (см. п. 18.4.5), а именно:

- 1) информация о заданном законе движения $s = s(t)$, $0 \leq t \leq T$;
- 2) l , Y_L , X_C , Y_C , x_{01} , y_{01} , y_{02} , $(l_y)_0$;
- 3) $C_1, C_2, \dots, C_{11}$; $(\mu_K)_D$; $(\mu_K)_F$;
- 4) $m = 6$, $n = 4$, $p = 10$, $v = 2$, $w = 7$;
- 5) A_r , B_r ($r = 1, 2, \dots, p$);
- 6) l_4 , l_5 , $X_{3E}^{[0]}$, $Y_{3E}^{[0]}$ — начальные значения варьируемых параметров;
- 7) ρ_j ($j = 1, 2, \dots, w$);
- 8) служебные параметры, используемые в блоке Б5 алгоритма.

Заданный закон движения $s = s(t)$ был описан ранее в п. 17.13.2.

Задаваемые параметры S , $(\mu_K)_D$, $(l_y)_0$, y_{01} и y_{02} должны иметь такие значения, при которых обеспечивается неотрицательность подкоренного выражения в формуле (18.49), а также выполняются конструктивные ограничения вида (18.40), относящиеся к вычисляемым параметрам l_3 и x_{02} .

Начальные значения четырех варьируемых параметров нужно выбирать с учетом конструктивных ограничений вида (18.40) на эти параметры.

§ 18.6. СИНТЕЗ ВОСЬМИЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА С КАЧАЮЩИМСЯ ЦИЛИНДРОМ (СХЕМА N 10)

18.6.1. Уточнение постановки задачи

Рассматриваемый восьмизвенный механизм, применяемый в АКУ, изображен на рис. 17.38 (его схема была приведена ранее также на рис. 16.16 (схема N 10) и 17.29). В состав механизма входят: восьмизвенный рычажный механизм с качающимся цилиндром (звенья 0, 1, ..., 7), два гидромеханизма Г1 и Г2, транспортируемый груз 9 и звено 8, образующее вместе с грузом 9 присоединенную диadu.

При синтезе механизма схемы N 10 часть узлов, звеньев и габаритных размеров сохраняем такими же, как у известного механизма той же структурной схемы (результаты анализа известного механизма были приведены в п. 17.13.3). В частности, будем использовать те же самые пиротехнический силовой привод (звенья 1 и 2), гидромеханизмы Г1 и Г2 и присоединенную диadu (звенья 8 и 9). Кроме того, оставим без изменения взаимное расположение корпусов гидромеханизмов Г1 и Г2. Вследствие этого не изменятся траектории движения центров шарниров А, В, G и Н, а именно: точки G и Н движутся по одной прямой, а траектории точек А и В перпендикулярны этой прямой.

Вдоль указанной прямой направим ось x неподвижной системы координат Oxy , так что $y_G = y_H = 0$. Начало координат O возьмем так, чтобы было $x_A = -x_B$. Заметим, что у существующего механизма опора O_2 совпадает с точкой O (см. рис. 17.38), а у синтезируемого механизма эти точки могут не совпадать.

Ниже используются обозначения $(x_G)_0$, $(x_H)_0$, $(y_A)_0$, $(y_B)_0$, s_G , s_H , s_A и s_B введенные в п. 17.11.5, а также соотношения (17.62) — (17.64). Из этих соотношений находим:

$$x_G = A_1 - \frac{y_B}{\kappa_1}; \quad x_H = A_2 - \frac{y_A}{\kappa_2}, \quad (18.56)$$

где

$$A_1 = (x_G)_0 + \frac{1}{\kappa_1} (y_B)_0; \quad A_2 = (x_H)_0 - \frac{1}{\kappa_2} (y_A)_0; \quad (18.57)$$

κ_1 и κ_2 — постоянные коэффициенты (см. пп. 16.6.2 и 17.11.5).

Величины A_1 и A_2 имеют определенные значения для гидромеханизмов Г1 и Г2.

Из сказанного выше можно сделать вывод о том, что известны и считаются заданными следующие геометрические параметры механизма (см. рис. 17.38): 1) x_B , $x_A = -x_B$, $y_G = 0$, $y_H = 0$; 2) $l = AL$, Y_L , X_C , Y_C — постоянные параметры присоединенной диады; 3) $(l_y)_0 = (O_1 D)_{\min}$; 4) A_1 , A_2 .

При синтезе подлежат определению 11 постоянных параметров восьмизвенного рычажного механизма: x_{01} , y_{01} , x_{02} , y_{02} , l_3 , a_3 , Θ_3 , b_3 , λ_3 , l_4 , l_6 .

Параметры $a_3 = O_2 E$ и $\Theta_3 = \angle DO_2 E$ определяют положение точки E на звене 3, а параметры $b_3 = O_2 F$ и $\lambda_3 = \angle DO_2 F$ — положение точки F на звене 3. Отметим, что параметры a_3 , Θ_3 , b_3 , λ_3 связаны очевидными соотношениями с координатами точек E и F в подвижной системе координат $O_2 X_3 Y_3$:

$$X_{3E} = a_3 \cos \Theta_3, \quad Y_{3E} = a_3 \sin \Theta_3; \quad (18.58)$$

$$X_{3F} = b_3 \cos \lambda_3, \quad Y_{3F} = b_3 \sin \lambda_3. \quad (18.59)$$

Что касается вариантов сборки первой, второй и третьей диад восьмизвенного механизма, то их сохраним такими же, как у существующего механизма, т.е. приемам: $M_1 = -1$, $M_2 = +1$, $M_3 = -1$ (см. п. 17.11.5).

При синтезе рассматриваемого механизма внесем некоторые коррективы в общую постановку задачи, сформулированную в § § 18.1 и 18.2.

Из девяти основных условий синтеза (18.4) — (18.12) оставим без изменения семь условий — (18.4), (18.6), (18.7), (18.9) — (18.12). Условие (18.5) является излишним, поскольку оно дублируется заданием координат x_B и x_A , так как

$X_L(0) = x_B - x_A$. Условие (18.8) для $\Delta y_C(T)$ в виде неравенства заменим на равенство

$$\Delta y_C(T) = C_4. \quad (18.60)$$

Обязательные условия синтеза в принципиальном плане остаются прежними (см. п. 18.1.3).

Что касается желательных условий синтеза, то конструктивные ограничения выражаются, как и ранее, неравенствами вида (18.40), а условия, касающиеся угла передачи μ_D и углов давления ϑ_G и ϑ_H , примем в следующем виде:

$$\mu_D(0) = \pi - \mu_d, \quad \mu_D(S) = \mu_d; \quad (18.61)$$

$$(\vartheta_G)_{\max} \leq \vartheta_d \quad \text{и} \quad (\vartheta_G)_{\max} \rightarrow \min; \quad (18.62)$$

$$(\vartheta_H)_{\max} \leq \vartheta_d \quad \text{и} \quad (\vartheta_H)_{\max} \rightarrow \min, \quad (18.63)$$

где μ_d — минимально допустимое значение угла передачи в шарнире D ; ϑ_d — максимально допустимое значение угла давления в шарнирах G и H ;

$$(\vartheta_G)_{\max} = \max_{i=1, \dots, N} \vartheta_G(s_i), \quad (\vartheta_H)_{\max} = \max_{i=1, \dots, N} \vartheta_H(s_i). \quad (18.64)$$

Равенство (18.61) обеспечивают выполнение условия

$$\mu_d \leq \mu_D(s) \leq \pi - \mu_d \quad \text{при всех } s \in [0, S],$$

так как наименее благоприятные значения угла передачи μ_d достигаются на границах отрезка $[0, S]$.

Из условий (18.62) видно, что максимальное значение угла давления ϑ_G должно быть минимально возможным, не превышая при этом допустимого значения ϑ_d . Аналогичный смысл имеют и условия (18.63), но применительно к углу давления ϑ_H .

Среди указанных выше условий синтеза шесть условий выражаются в виде уравнений; к ним относятся (18.44), (18.6), (18.7), (18.60) и два уравнения (18.61). Поэтому из 11 искомых

параметров восьмизвенного механизма шесть параметров являются вычисляемыми, а пять — варьируемыми, т.е. $m = 6$, $n = 5$, $p = 11$.

В качестве вычисляемых параметров примем x_{01} , l_3 , a_3 , b_3 , l_4 , l_6 , а в качестве варьируемых параметров — y_{01} , x_{02} , y_{02} , Θ_3 , λ_3 .

Для вычисляемых и варьируемых параметров введем также вторую (унифицированную) систему обозначений:

$$q_1 = x_{01}, q_2 = l_3, q_3 = a_3, q_4 = b_3, q_5 = l_4, q_6 = l_6;$$

$$x_1 = y_{01}, x_2 = x_{02}, x_3 = y_{02}, x_4 = \Theta_3, x_5 = \lambda_3. \quad (18.65)$$

18.6.2. Расчет вычисляемых параметров

Пусть на некотором шаге оптимизационного поиска пяти варьируемым параметрам $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ присвоены определенные значения. Шесть вычисляемых параметров $q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$ будем определять в такой последовательности (см. рис. 17.38):

1) из четырех уравнений (18.4), (18.6), (18.7) и (18.60) находим $(y_B)_0$, $(y_A)_0$, $y_B(S)$, $y_A(S)$;

2) находим $(x_G)_0$, $(x_H)_0$, $x_G(S)$, $x_H(S)$ на основании формул (18.57) и (18.56);

3) определяем параметры x_{01} и l_3 четырехзвенного механизма O_1DO_2 с качающимся цилиндром, используя уравнения (18.61);

4) находим значения угла φ_3 при $s = 0$ и $s = S$ по формулам анализа механизма O_1DO_2 (см. п. 18.11.1);

5) определяем параметры a_3 и l_4 кривошипно-ползунного механизма O_2EG по известным значениям параметров x_{02} , y_{02} , y_G , Θ_3 , а также найденных ранее величин $(x_G)_0$, $x_G(S)$, $\varphi_3(0)$ и $\varphi_3(S)$;

6) определяем параметры b_3 и l_6 кривошипно-ползунного механизма O_2FH по известным значениям параметров x_{02} ,

y_{02} , y_H , λ_3 , а также найденных ранее величин $(x_H)_0$, $x_H(S)$, $\varphi_3(0)$ и $\varphi_3(S)$.

Из уравнения (18.4) получаем:

$$(y_B)_0 = C_1. \quad (18.66)$$

На основании формул (17.65), (17.67) и (17.68) находим $(y_A)_0$ из уравнения (18.6):

$$(y_A)_0 = C_1 + l - Y_L. \quad (18.67)$$

Определим теперь координату y_C по формуле (17.69) при $t = 0$ и $t = T$. Для этого подставим в указанную формулу известные значения угла φ_3 при $t = 0$ и $t = T$, равные π и C_3 в соответствии с равенствами (18.5) и (18.7). Получаем:

$$y_C(0) = C_1 - Y_C, \quad (18.68)$$

$$y_C(T) = y_B(T) + X_C \sin C_3 + Y_C \cos C_3.$$

С учетом формул (18.13) и (18.68) преобразуем левую часть уравнения (18.60), после чего из него находим

$$y_B(T) = C_1 + C_4 - X_C \sin C_3 - Y_C (1 + \cos C_3). \quad (18.69)$$

Обратимся теперь к уравнению (18.7). На основании формул (17.65), (17.67) и (17.68) из этого уравнения получаем:

$$y_A(T) = y_B(T) - (l - Y_L + 2x_B \sin C_3) / \cos C_3. \quad (18.70)$$

В дальнейшем вместо $y_A(T)$ и $y_B(T)$ будем использовать эквивалентную запись $y_A(S)$ и $y_B(S)$.

На основании формул (18.57) и (18.56) находим:

$$\begin{aligned} (x_G)_0 &= A_1 - \frac{1}{\kappa_1} (y_B)_0, & (x_H)_0 &= A_2 + \frac{1}{\kappa_2} (y_A)_0, \\ x_G(S) &= A_1 - \frac{1}{\kappa_1} y_B(S), & x_H(S) &= A_2 + \frac{1}{\kappa_2} y_A(S). \end{aligned} \quad (18.71)$$

Уравнения (18.61) преобразуем на основании формул (17.42) и (17.44). Затем из полученных уравнений определяем параметры l_3 и x_{01} :

$$l_3 = S / \left(2 \cos \mu_d \right), \quad (18.72)$$

$$x_{01} = x_{02} + \sqrt{\left[(l_y)_0 \right]^2 + (l_y)_0 S + l_3^2 - \left(y_{02} - y_{01} \right)^2}.$$

Теперь находим значения угла φ_3 при $s = 0$ и $s = S$ по формулам анализа четырехзвенного механизма $O_1 DO_2$, а именно — по формулам (17.42), (17.44) — (17.46).

Переходим к синтезу кривошипно-ползунного механизма $O_2 EG$ по двум заданным положениям кривошипа $O_2 E$ и двум соответствующим положениям точки G ползуна 5. Заданные положения кривошипа определяются углами $\varphi_3(0) + \Theta_3$ и $\varphi_3(S) + \Theta_3$, а заданные положения точки G — координатами $(x_G)_0$ и $x_G(S)$. Подлежат определению параметры механизма a_3 и l_4 .

Неизвестные находим из системы двух уравнений

$$\left[x_E(S) - x_G(S) \right]^2 + \left[y_E(S) - y_G \right]^2 = l_4^2 \quad (s = 0; S),$$

которые можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned} & \left[x_{02} + a_3 \cos \left(\varphi_3(s) + \Theta_3 \right) - x_G(s) \right]^2 + \\ & + \left[y_{02} + a_3 \sin \left(\varphi_3(s) + \Theta_3 \right) \right]^2 = l_4^2 \quad (s = 0; S). \end{aligned} \quad (18.73)$$

Из уравнений (18.73) получаем

$$\begin{aligned} a_3 = \frac{1}{2} & \left[x_G(S) - x_G(0) \right] \left[x_G(S) + x_G(0) - 2x_{02} \right] \times \\ & \times \left\{ \left[x_G(S) - x_{02} \right] \cos \left(\varphi_3(S) + \Theta_3 \right) - \right. \\ & \left. - \left[x_G(0) - x_{02} \right] \cos \left(\varphi_3(0) + \Theta_3 \right) - \right. \\ & \left. - y_{02} \sin \left(\varphi_3(S) + \Theta_3 \right) + y_{02} \sin \left(\varphi_3(0) + \Theta_3 \right) \right\}^{-1}; \end{aligned} \quad (18.74)$$

$$l_4 = \left\{ \left[x_{02} + a_3 \cos(\varphi_3(0) + \Theta_3) - x_G(0) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[y_{02} + a_3 \sin(\varphi_3(0) + \Theta_3) \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

В заключение производим синтез кривошипно-ползунного механизма O_2FH по двум заданным положениям кривошипа O_2F и двум соответствующим положениям точки H ползуна 7. Заданные положения кривошипа определяются углами $\varphi_3(0) + \lambda_3$ и $\varphi_3(S) + \lambda_3$, а заданные положения точки H — координатами $(x_H)_0$ и $x_H(S)$. Искомыми являются параметры механизма b_3 и l_6 .

По аналогии с формулами (18.74), полученными для механизма O_2EG в данном случае определяем

$$b_1 = \frac{1}{2} \left[x_H(S) - x_H(0) \right] \left[x_H(S) + x_H(0) - 2x_{02} \right] \times \\ \times \left\{ \left[x_H(S) - x_{02} \right] \cos(\varphi_3(S) + \lambda_3) - \right. \\ \left. - \left[x_H(0) - x_{02} \right] \cos(\varphi_3(0) + \lambda_3) - \right. \\ \left. - y_{02} \sin(\varphi_3(S) + \lambda_3) + y_{02} \sin(\varphi_3(0) + \lambda_3) \right\}^{-1}; \quad (18.75)$$

$$l_6 = \left\{ \left[x_{02} + b_3 \cos(\varphi_3(0) + \lambda_3) - x_H(0) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[y_{02} + b_3 \sin(\varphi_3(0) + \lambda_3) \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Расчет шести вычисляемых параметров восьмизвенного механизма по формулам (18.72), (18.74) и (18.75) производится в блоке Б2 алгоритма (см. п. 18.3.4).

18.6.3. Условия синтеза в форме неравенств

К таким условиям относятся, во-первых, неравенства (18.9) — (18.12), выражающие основные условия синтеза, и во-вторых, неравенства, характеризующие обязательные и желательные условия синтеза.

Обязательные условия синтеза вида (18.20) выражаются тремя неравенствами:

$$G_1 = \left[(l_y)_0 \right]^2 + (l_y)_0 S + S^2 \left(2 \cos \mu_d \right)^{-2} - \\ - \left(y_{02} - y_{01} \right)^2 > 0, \quad (18.76)$$

$$G_2 = l_4^2 - \left[y_{02} + a_3 \sin \left(\varphi_3 + \Theta_3 \right) \right]^2 > 0, \quad (18.77)$$

$$G_3 = l_6^2 - \left[y_{02} + b_3 \sin \left(\varphi_3 + \lambda_3 \right) \right]^2 > 0. \quad (18.78)$$

Отсюда видно, что $v = 3$.

При выполнении неравенства (18.76) вычисляемый параметр x_{01} будет вещественным. Неравенства (18.77) и (18.78), отображающие условия существования кривошипно-ползунных механизмов O_2EG и O_2FH (см. п. 17.11.5), должны выполняться при всех дискретных значениях $\varphi_3 = \varphi_3(s_i)$, где $i = 1, 2, \dots, N$.

Основные и желательные условия синтеза вида (18.21) выражаются пятью неравенствами $H_j(x) \geq 0$, $j = 2, 3, 4, 5, 6$, левые части которых определяются по формулам (18.42). Отметим, что первые четыре из пяти указанных неравенств получены из условий (18.9) — (18.12), а пятое неравенство — из условий (18.40), в которых $p = 11$, а величины z_r устанавливаются в соответствии с формулами (18.18), (18.65) и (18.66).

18.6.4. Построение целевой функции

При синтезе механизмов двух ранее рассмотренных схем (см. § 18.4 и § 18.5) в постановке задачи присутствовали только условия в форме уравнений или неравенств, а целевая функция $P = P(x)$ в случае выполнения этих условий достигала своего наименьшего значения, равного нулю, в некоторой области Ω_* значений варьируемых параметров x . При синтезе механизма рассматриваемой схемы (см. рис. 17.38) введены условия нового вида, а именно — условия (18.62) и (18.63), в соответствии с которыми максимальные значения углов давле-

ния ϑ_G и ϑ_H должны быть минимально возможными, не превышая при этом допустимого значения ϑ_d .

Указанные минимаксные условия требуют внесения изменений в структуру целевой функции $P = P(x)$ по сравнению с формулой (18.24). Целевую функцию примем теперь в следующем виде:

$$P = \begin{cases} P_1 + C & \text{— при } P_1 > 0, \\ P_2 + P_3 & \text{— при } P_1 = 0, \end{cases} \quad (18.79)$$

где обозначения P_1 , P_2 , C имеют тот же смысл, что и ранее; $P_3 = P_3(x)$ — критериальная функция, характеризующая качество выполнения условий (18.62) и (18.63).

Критериальную функцию $P_3 = P_3(x)$ введем следующим образом:

$$P_3 = \frac{1}{4} \eta_1 \left(|H| - H \right)^2 - \frac{1}{4} \eta_2 \left(|H| + H \right)^2, \quad (18.80)$$

где η_1 и η_2 — весовые коэффициенты (положительные), назначаемые проектировщиком;

$$H = 1 - \left(\vartheta_* \right) / \vartheta_d; \quad (18.81)$$

$$\vartheta_* = \max \left[\left(\vartheta_G \right)_{\max}, \left(\vartheta_H \right)_{\max} \right]. \quad (18.82)$$

Из формул (18.80) и (18.81) видно, что

- 1) если $\vartheta_* > \vartheta_d$, то $H < 0$ и $P_3 = \eta_1 H^2 > 0$;
- 2) если $\vartheta_* = \vartheta_d$, то $H = 0$ и $P_3 = 0$;
- 3) если $\vartheta_* < \vartheta_d$, то $H > 0$ и $P_3 = -\eta_2 H^2 < 0$.

Таким образом критерий P_3 при любом ϑ_* , равен либо первому, либо второму члену выражения (18.80). Первый член в формуле (18.80) введен с целью контроля неравенства $\vartheta_* \leq \vartheta_d$ и имеет точно такую же форму, как и любое из w слагаемых в формуле (18.23) для критерия P_2 . Второй член в формуле (18.80) для критерия P_3 отображает минимаксное ус-

ловие $\vartheta_* \rightarrow \min$ и начинает проявлять себя только при выполнении указанного неравенства.

Если в формуле (18.80) принять $\eta_2 = 0$, т.е. заблокировать минимаксное условие $\vartheta_* \rightarrow \min$, то в соответствии с формулой (18.79) целевая функция $P(x)$ достигает своего наименьшего значения, равного нулю, в некоторой области Ω_* значений варьируемых параметров x , в пределах которой выполняются неравенства (18.21) и неравенство $\vartheta_* \leq \vartheta_d$, т.е. $P_2 = P_3 = 0$.

В случае $\eta_2 > 0$ целевая функция $P(x)$ становится равной нулю только на границах области Ω_* , а внутри этой области $P(x) < 0$, причем существует такая оптимальная точка $x = x_{\text{опт}}$, в которой достигается минимум функции $P(x)$ (в этой точке угол ϑ_* принимает минимально возможное значение).

18.6.5. Числовой пример

Анализ существующего механизма схемы N 10 (см. рис. 17.38) был выполнен в п. 17.13.3. Там приведены значения постоянных параметров механизма; значения коэффициентов k_1 и k_2 ; закон движения $s = s(t)$ поршня 2 по отношению к цилиндру 1; результаты анализа механизма (в табличной форме и в виде графиков).

Существующий механизм имеет достаточно благоприятные характеристики, т.е. значения контролируемых параметров $\varphi(T)$, $\Delta y_C(T)$, $\Delta X_L(t_i)$, $\dot{y}_C(T)$ и $\dot{\varphi}(T)$, угла передачи μ_D и угла давления ϑ_G и ϑ_H , а также габариты.

Выполним синтез механизма схемы N 10 по описанной выше методике. Цель синтеза — улучшить значения углов передачи и давления, не ухудшая значений контролируемых параметров и не увеличивая габариты механизма.

Пусть заданы значения величин C_i , фигурирующих в основных условиях синтеза (18.4), (18.5), (18.60), (18.9) — (18.11): $C_1 = -200$ мм, $C_2 = 1340$ мм, $C_3 = 180,558$, $C_4 = -80,77$ мм, $C_6 = 0$, $C_7 = 5$ мм, $C_8 = -4,5$ м/с, $C_9 = -4,17$ м/с, $C_{10} = 28$ град/с, $C_{11} = 32$ град/с.

Задаваемые параметры механизма имеют следующие значения (линейные размеры даны в мм): $x_B = 670$, $x_A = -670$, $y_G = 0$, $y_H = 0$, $l = 0$, $Y_L = 0$, $X_C = 1000$, $Y_C = 107$, $(l_y)_0 = 226,43$, $\kappa_1 = 1,28047$, $\kappa_2 = 1,41273$, $A_1 = 249,81$, $A_2 = -260,88$.

Первоначальные значения пяти варьируемых параметров примем такими же, как у существующего механизма: $y_{01} = -57$, $x_{02} = 0$, $y_{02} = 0$, $\Theta_3 = 180^\circ$, $\lambda_3 = 0$.

На самом начальном этапе аналитико-оптимизационного синтеза (т.е. при первой пробе целевой функции) были получены следующие значения шести вычисляемых параметров механизма: $x_{01} = 274$, $l_3 = 74$, $a_3 = 69$, $b_3 = 74$, $l_4 = 453,446$, $l_6 = 453,126$.

При этом контролируемые параметры имеют такие значения: $y_B(0) = -200$, $X_L(0) = 1340$, $\varphi(0) = 180^\circ$, $\varphi(T) = 180,558^\circ$, $\Delta y_C(T) = -80,77$, $(\Delta X_L)_{\max} = 0,06$, $\dot{y}_C(T) = -4,17$ м/с, $\dot{\varphi}(T) = 29,59$ град/с, $(\mu_D)_{\text{ext}} = 49,9^\circ$, $(\vartheta_G)_{\max} = 8,7^\circ$, $(\vartheta_H)_{\max} = 9,4^\circ$.

В результате решения задачи синтеза (т.е. при последней пробе целевой функции) были получены следующие значения варьируемых и вычисляемых параметров механизма: $y_{01} = -57,0$, $x_{02} = 9,217$, $y_{02} = -0,460$, $\Theta_3 = 184,887^\circ$, $\lambda_3 = 4,896^\circ$, $x_{01} = 264,768$, $l_3 = 56,360$, $a_3 = 50,675$, $b_3 = 54,218$, $l_4 = 428,595$, $l_6 = 445,429$.

Что касается контролируемых параметров, то они имеют такие значения: $y_B(0) = -200$, $X_L(0) = 1340$, $\varphi(0) = 180^\circ$, $\varphi(T) = 180,558^\circ$, $\Delta y_C(T) = -80,77$, $(\Delta X_L)_{\max} = 0,06$, $\dot{y}_C(T) = -4,21$ м/с, $\dot{\varphi}(T) = 29,66$ град/с, $(\mu_D)_{\text{ext}} = 56,6^\circ$, $(\vartheta_G)_{\max} = 6,7^\circ$, $(\vartheta_H)_{\max} = 7,0^\circ$.

Из приведенных числовых данных видно, что в результате синтеза угол передачи μ_D и углы давления ϑ_G и ϑ_H стали более благоприятными, габариты восьмизвенного механизма в направлении оси y уменьшились, другие контролируемые параметры механизма практически не изменились.

Поиск оптимального решения потребовал 438 проб целевой функции.

Глава 19. ЭЛЕМЕНТЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 19.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В последние десятилетия ведутся активные исследования и разработки в области автоматизации проектирования механизмов и машин. Качественно новый этап в развитии автоматизированного проектирования механизмов и машин связан с широким использованием в инженерной практике персональных компьютеров. Были разработаны мощные системы автоматизированного проектирования (САПР), или CAD-системы, а также CAD/CAM-системы (CAD-Computer-Aided Desing; CAM — Computer-Aided Manufacture).

Среди CAD-систем лидером является широко известная система AutoCAD, созданная американской фирмой AutoDESK. На многих российских предприятиях работают на русскоязычных версиях AutoCAD R10, R11, R12 и R13. Основное назначение AutoCAD — изготовление чертежей и другой конструкторской документации. AutoCAD стимулировал разработку множества специализированных прикладных программ, ориентированных на решение частных задач проектирования и конструирования и работающих в среде AutoCAD. Кроме AutoCAD, достаточное распространение получили и другие крупные системы автоматизированного проектирования (Pro/ENGINEER, EUCLID, CATIA, 1-DEAS, DUST, Cimatron90 и др.), в том числе и отечественные разработки (КОМПАС, T-FLEX CAD, ADEM и др.)

Несмотря на широкие возможности, предоставляемые конструкторам, AutoCAD все же не имеет средств, позволяющих разрешить ряд проблем, связанных с проектированием рычажных механизмов.

Процесс проектирования рычажного механизма можно разделить на следующие этапы: 1) структурный синтез, 2) структурный анализ, 3) кинематический синтез, 4) кинематический анализ, 5) динамический синтез, 6) разработка конструкции, 7) динамический анализ, 8) прочностные расчеты, 9) корректировка конструкции механизма после изготовления и испытания опытного образца. В каждом конкретном случае некоторые из этапов могут отсутствовать, может быть изменена последо-

вательность выполнения этапов, к некоторым из этапов иногда приходится обращаться повторно.

Большинство существующих CAD-систем типа AutoCAD предназначено для автоматизации выполнения этапа 6 в части представления и производства конструкторской и технологической документации и ориентированы в основном на соответствующие базы данных и графику (двумерную или трехмерную).

Что касается этапов 1 — 5 и 7, относящихся к области теории механизмов, то они или полностью не обеспечиваются системой AutoCAD, или же обеспечиваются ею на недостаточном уровне.

В связи с этим, можно считать актуальной проблему разработки специализированных CAD-систем, предназначенных для выполнения указанных выше этапов проектирования, относящихся к области теории механизмов. Эти системы могут разрабатываться как автономные прикладные программные продукты, функционирующие независимо от AutoCAD. Но возможен и иной путь создания подобных CAD-систем, в соответствии с которым они разрабатываются в виде приложений к AutoCAD. Начиная с версии 11 в AutoCAD была встроена технология разработки приложений на языке Си, которая получила дальнейшее развитие в версиях 12 и 13. Приложения используют AutoCAD как базовую систему и функционируют в его среде.

В данной главе излагаются в концептуальном плане некоторые вопросы создания автоматизированной системы структурного и кинематического анализа и синтеза рычажных механизмов. Для удобства изложения этой CAD-системе присвоим имя MechCAD (Mechanism ComputerAided Design). Автоматизированная система MechCAD позволяет решать задачи проектирования, касающиеся этапов 1, 2, 3 и 4 применительно к рычажным механизмам.

§ 19.2. ОБЩЕЕ СТРОЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ СТРУКТУРНОГО И КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И СИНТЕЗА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Как уже отмечалось в § 19.1, MechCAD — это специализированная прикладная компьютерная система, базирующаяся на знаниях в области структурного и кинематического анализа и синтеза рычажных механизмов. В отличие от широко известных

CAD-систем типа AutoCAD, предназначенных для автоматизации конструкторских работ (подготовка конструкторской и технологической документации, изготовление чертежей и т.д.), система MechCAD используется на этапах проектирования механизма, предшествующих конструктивной разработке. Системы типа AutoCAD занимаются проектированием, главным образом, *формы* деталей механизма. Целью же проектирования рычажного механизма в MechCAD является достижение заданных его *свойств* на уровне его структурной или кинематической схемы.

Обсуждая вопрос о целесообразности разработки специализированной системы MechCAD и о ее месте среди таких известных пакетов широкого спектра применения как AutoCAD или математических пакетов общего назначения как MathCAD, можно отметить, что MechCAD занимает некоторую пока почти не заполненную нишу, расположенную между AutoCAD и MathCAD. В AutoCAD главная роль принадлежит программам инженерной графики и базам данных в области машиностроения. Система MathCAD позволяет автоматизировать математические и инженерно-технические расчеты при решении различных прикладных задач. Она содержит текстовый редактор, мощный вычислитель, удобные средства математической графики; язык общения с пользователем предельно приближен к обычному математическому языку. Между тем, при решении конкретной задачи пользователь должен составить соответствующий алгоритм. Что касается MechCAD, то главная роль в этой системе принадлежит алгоритмам анализа и синтеза рычажных механизмов, модули графической поддержки создают удобную среду для работы с системой, пользователь не должен составлять каких-либо алгоритмов (и от него не требуется знания соответствующих методов теории механизмов).

Компьютерная система MechCAD автоматизированного проектирования рычажных механизмов существенным образом отличается от ранее разрабатываемых (примерно до конца 80-х годов) программ для «больших» ЭВМ, относящихся к той же предметной области. В программах для «больших» ЭВМ основное ядро и почти весь их объем составляли соответствующие алгоритмы анализа или синтеза рычажных механизмов, т.е. *база знаний* по этим механизмам. В компьютерной системе, разрабатываемой на уровне современного программного продукта, ба-

за знаний, как и ранее, играет фундаментальную роль, однако по своему относительному объему она составляет лишь небольшую часть системы (порядка 5 — 10%); основной объем занимают другие блоки системы (о которых будет сказано ниже).

Как известно, число структурных схем рычажных механизмов, применяемых в машинах и приборах, отличается огромным многообразием. К тому же, число различных задач анализа и синтеза рычажных механизмов, встречающихся в инженерной практике, тоже весьма велико (речь идет о принципиальных различиях в постановках и условиях задач, а не об отличиях в численных данных). Поэтому естественно, что при разработке системы MechCAD приходится вводить определенные ограничения, касающиеся как выбора структурных схем исследуемых или проектируемых механизмов, так и выбора задач их анализа или синтеза. Между тем, система MechCAD должна быть открытой, т.е. необходимо предусмотреть возможность ее развития за счет новых механизмов и новых задач.

Многообразие структурных схем рычажных механизмов, а также задач их анализа и синтеза, необходимость автоматизации четырех указанных в § 19.1 этапов проектирования рычажного механизма — структурный анализ, структурный синтез, кинематический анализ и кинематический синтез, позволяют говорить о целесообразности разработки в рамках системы MechCAD ряда подсистем, или пакетов программ. Каждая такая подсистема предназначена для решения некоторого класса задач в рассматриваемой области и является автономным программным продуктом. В то же время все подсистемы должны быть разработаны на единой методологической основе, включая интерфейс, систему управления, структуру баз данных и т.д. Различные подсистемы могут обращаться к одним и тем же общим программным модулям, которые должны быть совместимы с другими модулями системы. Необходимо обеспечить также совместимость файлов, генерируемых какой-либо подсистемой как результат ее работы и используемых другой подсистемой в качестве исходных данных. По мере необходимости система MechCAD может пополняться новыми подсистемами.

В структуре большинства пакетов программ, входящих в систему MechCAD, можно выделить пять основных блоков: 1) *база знаний* (БЗ) по методам и процедурам структурного или кинематического анализа и/или синтеза рычажных механизмов;

2) блок формирования баз данных (ФБД) по рычажным механизмам; 3) база данных (БД) по рычажным механизмам; 4) система управления (СУ); 5) интерфейс пользователя (ИП). Некоторые из пакетов могут включать еще один блок: *экспертную систему* (ЭС) по рычажным механизмам.

В БЗ аккумулируются современные знания в области структурного и кинематического анализа и синтеза рычажных механизмов. Блок ФБД обеспечивает формирование баз данных по рычажным механизмам. База данных БД является компьютерным справочником (альбомом) по рычажным механизмам, который создается с помощью самого пакета, благодаря наличию в его составе блока ФБД. Система управления СУ обеспечивает управление всеми компонентами пакета программ, а также их взаимодействие друг с другом.

Принимая во внимание, что успех прикладной программы среди инженеров-проектировщиков зависит от уровня разработки и удобства пользовательского интерфейса, следует при разработке системы MechCAD уделить большое внимание созданию дружелюбного, интуитивно понятного интерфейса. С учетом современных требований, интерфейс должен быть графическим и многооконным, что существенно увеличивает его возможности. Кроме того, разрабатываемый ИП должен отличаться такими особенностями, как система ниспадающих меню, контекстная помощь (не только в виде встроенного диалогового справочника, но и в виде рисунков и пиктограмм), визуализация и анимация изображений (т.е. графическое представление структурных и кинематических схем механизмов на экране дисплея и воспроизведение их движения), защита от ошибок пользователя при работе с программой и подсказки ему о правильных действиях в каждой из нестандартных ситуаций, возможность вывода результатов работы программы (графиков, кинематических схем механизмов, числовых данных и др.) на экран, в файл и на принтер и др.

Экспертная система ЭС содержит информацию о функциональных возможностях рычажных механизмов тех структурных схем, которые являются объектом кинематического синтеза в данном пакете программ. С помощью ЭС производится проверка соответствия условий задачи синтеза, решаемой с помощью данного пакета, потенциальным функциональным возможностям той или иной структурной схемы рычажного механизма. ЭС

может дать ответ на вопрос, можно или нет при помощи механизма данной структурной схемы воспроизвести заданную функцию положения или заданную траекторию рабочей точки. Кроме того, ЭС осуществляет экспертизу полученных решений задачи синтеза и их оценку по различным критериям качества. Окончательный выбор механизма среди нескольких полученных вариантов остается за проектировщиком.

По своему назначению подсистемы, входящие в систему MechCAD, могут относиться к различным актуальным проблемам структуры и кинематики рычажных механизмов. Эти подсистемы могут быть распределены по своей тематике на четыре группы: 1) TAL (Type Analysis of Linkages) — структурный анализ рычажных механизмов; 2) TSL (Type Synthesis of Linkages) — структурный синтез рычажных механизмов; 3) KAL (Kinematic Analysis of Linkages) — кинематический анализ рычажных механизмов; 4) KSL (Kinematic Synthesis of Linkages) — кинематический синтез рычажных механизмов. Кроме того, самостоятельное место может занимать еще одна, пятая, группа подсистем: ALBUM — компьютерные альбомы (электронные справочники) по рычажным механизмам.

В следующих параграфах данной главы рассматриваются некоторые принципиальные вопросы, связанные с разработкой подсистем пяти указанных выше групп.

§ 19.3. АВТОМАТИЗАЦИЯ СТРУКТУРНОГО АНАЛИЗА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Каждую из подсистем, входящих в группу TAL, целесообразно разрабатывать не для механизма конкретной структурной схемы, а для некоторого множества однотипных механизмов. Наибольшее практическое применение будет иметь подсистема группы TAL, предназначенная для структурного анализа неподвижных плоских рычажных механизмов первого типа первого класса (см. пп. 16.2.5 и 16.4.3), поскольку к таким механизмам относится подавляющее большинство рычажных механизмов, используемых в технике.

В качестве исходной информации, вводимой в компьютер при работе с программой TAL, рекомендуется использовать известную матрицу *SM* структурной схемы механизма (*SM* — *structural matrix*), которая может быть легко подготовлена поль-

зователем. Эта матрица содержит n строк и n столбцов, где n — число звеньев механизма. Если звено i механизма образует кинематическую пару со звеном j , то в качестве элемента a_{ij} матрицы SM , расположенного в строке i и столбце j , берется буква В или П (В — в том случае, когда указанная пара является вращательной, а П — в том случае, когда она поступательная). Если звенья i и j не образуют друг с другом кинематическую пару, то элемент a_{ij} матрицы SM не заполняется. Матрица SM является симметрической, поскольку $a_{ij} = a_{ji}$. Отметим, что вид матрицы SM для конкретного механизма зависит от принятого порядка нумерации его звеньев.

Порядок нумерации звеньев механизма может быть произвольным, за исключением лишь двух звеньев — стойки и входного звена: стойке рекомендуется присваивать номер 1, а входному звену — номер 2.

Программа TAL должна сначала проверить правильность составления структурной матрицы SM и в случае каких-либо ошибок сообщить о них пользователю. Если матрица составлена правильно, то программа проверяет, относится ли исследуемый механизм к рычажным механизмам, для анализа которых предназначена эта программа.

Если данная проверка дает утвердительный ответ, то программа TAL должна выполнить структурный анализ механизма, а именно, определить: общее число кинематических пар, а также число кинематических пар различных видов; число двухпарных, трехпарных, ... звеньев. Кроме того, программа должна разделить ведомую цепь механизма на группы Ассура и указать последовательность наложения этих групп. В том случае, когда речь идет об упомянутых выше механизмах первого класса, программа должна дополнительно установить модификацию каждой двухзвенной группы Ассура — ВВВ, ВВП, ВПВ, ВПП или ПВП (см. п. 16.4.2).

Следует предусмотреть вывод полученной при анализе механизма информации о его структуре на экран, или в файл, или на принтер. Желательно, чтобы пользователь имел возможность вывести структурную схему механизма и структурные схемы групп Ассура, входящих в его состав, на экран компьютера в графической форме. Кроме того, полезно вывести на экран дополнительную графическую информацию, отобразив ее непосред-

редственно на структурных схемах механизма и групп Ассура: неподвижную систему координат; подвижные системы координат, неизменно связанные с подвижными звеньями механизма; рекомендуемые буквенные обозначения для характерных точек на структурных схемах, а также для постоянных и переменных параметров механизма. Введенные системы координат и обозначения могут быть использованы в дальнейшем при кинематическом анализе механизма, т.е. в другом пакете системы MechCAD.

В программе TAL целесообразно иметь базу данных БД по рычажным механизмам и модуль, который выполняет *идентификацию структурных схем* рычажных механизмов. БД формируется из структурных схем тех механизмов, которые исследуются с помощью данной программы, но может быть пополнена за счет структурных схем, синтезированных с помощью пакетов программ TSL (см. § 19.5). Информация о каждой из структурных схем хранится в БД в компактном формализованном виде, так что она занимает очень небольшой объем памяти (дискового пространства). При просмотре БД формализованное представление преобразуется в графическую форму, вследствие чего на экран выводится структурная схема механизма в графическом изображении. Компактное представление структурной схемы рычажного механизма формируется в результате работы встроенного в программу TAL модуля идентификации структурных схем.

§ 19.4. ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

В связи с автоматизацией структурного анализа и синтеза рычажных механизмов, а также созданием компьютерных баз данных (БД) по рычажным механизмам, становится актуальной проблема идентификации их структурных схем. Сложность этой проблемы связана с тем, что, во-первых, существует неограниченное множество структурных схем рычажных механизмов, и во-вторых, они представляют собой графические объекты, непосредственная компьютерная обработка которых (ввод графической информации в компьютер, ее анализ, помещение в БД, хранение и извлечение из БД, вывод на экран и т.п.) требует весьма специфических методов и средств. Поэтому проблему

идентификации структурных схем механизмов целесообразно решать на базе их *формализованного символического представления* (ФСП). Задачу идентификации структурной схемы рычажного механизма можно считать решенной в том случае, если между структурной схемой и ее ФСП существует взаимно однозначное соответствие.

Известны различные способы ФСП структурных схем. Однако, как правило, они являются средством для структурного описания исследуемых механизмов, но не приспособлены для решения задачи об изоморфизме структурных схем, которая занимает центральное место в проблеме их идентификации. Одна из причин этого заключается в том, что вид символического представления механизма обычно зависит от выбранного порядка нумерации его звеньев. Но для n -звенного механизма существует $n!$ вариантов нумерации звеньев при помощи чисел от 1 до n (так, при $n = 10$ получаем 3628800 вариантов), что при достаточно большом n практически исключает возможность идентификации схемы путем, например, просмотра всех возможных вариантов ФСП.

При разработке алгоритма идентификации структурных схем может быть использован метод, изложенный в работе [11]. Этот метод базируется на особом виде формализованном символическом представлении схемы, которое содержит полноценную информацию о структурных признаках механизма и, что очень важно, не зависит от первоначально принятого порядка нумерации его звеньев. Метод обеспечивает взаимно однозначное соответствие между структурной схемой механизма и ее ФСП. Он применим для плоских и пространственных рычажных механизмов с вращательным, поступательным, цилиндрическими и сферическими парами без избыточных связей. Механизм может быть одно- или многоподвижным. Входную пару, которая предполагается одноподвижной, могут образовывать стойка и подвижное звено или два подвижных звена.

Модуль идентификации структурных схем рычажных механизмов, которому присвоим имя IDENT, может функционировать как в виде самостоятельной программы, так и в составе пакетов программ TAL, TSL и других, входящих в систему MechCAD.

В качестве исходной информации, вводимой в компьютер при работе с модулем IDENT, рекомендуется использовать мат-

рицу SM структурной схемы исследуемого механизма, которая была уже описана ранее (см. § 19.3). Что касается порядка нумерации звеньев механизма, то стойке присваивается номер 1, входному звену — номер 2, а другие подвижные звенья имеют номера от 3 до n в произвольном порядке. Отметим, что вид входной матрицы SM для конкретного механизма зависит от принятого порядка нумерации его звеньев.

На основании структурной матрицы SM алгоритм идентификации, содержащий некоторую сходящуюся циклическую процедуру, формирует *унифицированный структурный код* (УСК) данного механизма. Если изменить первоначальную нумерацию звеньев механизма, то в результате действия алгоритма идентификации получим тот же его УСК. Никакой другой механизм не может иметь такой же УСК, что и данный механизм.

Если кроме модуля IDENT, в программе имеется еще база данных (БД) по механизмам, то может быть произведено сравнение структурной схемы данного механизма со структурными схемами механизмов, хранящихся в БД, путем сопоставления символьных представлений механизмов в форме УСК. Если в БД отсутствует рассматриваемый механизм, то его можно внести туда. При наличии же данного механизма в БД можно вывести на экран различную информацию, касающуюся этого механизма и хранящуюся в БД (например, наличие или отсутствие методов его кинематического анализа или синтеза, примеры его практического применения и др.).

§ 19.5. АВТОМАТИЗАЦИЯ СТРУКТУРНОГО СИНТЕЗА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

В п. 16.5.2. отмечалось, что применительно к рычажным механизмам можно выделить четыре вида структурного синтеза: 1) синтез структурных групп, 2) синтез замкнутых кинематических цепей, 3) синтез структурных схем механизмов, 4) выбор структурной схемы проектируемого механизма. Все эти четыре вида структурного синтеза можно автоматизировать и выполнять с помощью компьютера.

Рассмотрим здесь в качестве примера следующую задачу структурного синтеза: найти все принципиально возможные структурные схемы n -звенных одноподвижных плоских рычаж-

ных механизмов первого типа первого класса с вращательными парами (в механизмах первого класса все структурные группы являются диадами). Соответствующая программа относится к группе подсистем типа TSL системы MechCAD.

Число n звеньев у рассматриваемых механизмов может быть равно 4, 6, 8, 10 и т.д. При $n = 4$ и 6 данная задача легко решается вручную; при $n = 8$ поиск решения вручную затруднителен; при $n = 10$ решение задачи может быть найдено только с помощью компьютера; при $n = 12$ и более число возможных схем становится чрезмерно большим и его определение не представляет интереса с практической точки зрения.

При решении рассматриваемой задачи в компьютер вводится только число n звеньев синтезируемых механизмов. В результате работы программы мы должны получить: 1) число N всех неповторяющихся структурных схем n -звенных механизмов; 2) банк данных, содержащий унифицированные структурные коды (УСК) всех N найденных механизмов; 3) более детальную информацию о структурных признаках отдельных групп механизмов, входящих в полученное множество n -звенных механизмов (например, можно выделить механизмы с одинаковыми значениями числа двухпарных, трехпарных, четырехпарных, ... звеньев).

Алгоритм поиска решения задачи включает два этапа. На первом этапе определяются все возможные способы присоединения диад при образовании n -звенного механизма, а также число Q_n этих способов. Число Q_n определяется по формуле: $Q_n = C_2^2 \cdot C_4^2 \cdot C_6^2 \cdot \dots \cdot C_{n-2}^2$, где C_i^2 — число сочетаний из i элементов по 2. Для ряда значений n получаем следующие значения Q_n : $Q_4 = 1$, $Q_6 = 6$, $Q_8 = 90$, $Q_{10} = 2520$, $Q_{12} = 113400$. Заметим, что среди структурных схем, найденных при данном n , могут встретиться одинаковые схемы.

На втором этапе производится идентификация всех Q_n найденных структурных схем по методу, описанному в § 19.4, с целью выявления и исключения одинаковых (повторяющихся) схем и, следовательно, получения множества всех неповторяющихся структурных схем n -звенных шарнирных механизмов.

В результате решения рассматриваемой задачи структурного синтеза получены следующие значения числа N всех повто-

ряющихся структурных схем: $N = 1, 6, 69, 1282$ при $n = 4, 6, 8, 10$ соответственно.

Структурные схемы механизмов, синтезированных с помощью программ типа TSL, хранятся в банке данных (БД) в компактном формализованном виде. При желании этот БД можно использовать при работе с программами типа TAL, KAL и KSL.

§ 19.6. АВТОМАТИЗАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Многообразие структурных схем рычажных механизмов делает необходимым разработку некоторого набора компьютерных программ, предназначенных для их кинематического анализа. Каждая из этих программ представляет собой один из вариантов подсистемы KAL (см. § 19.2). В данном параграфе обсуждаются некоторые вопросы, связанные с созданием программы типа KAL, которая предназначена для кинематического анализа одноподвижных плоских рычажных механизмов первого типа первого класса (см. пп. 16.2.5 и 16.4.3). К таким механизмам относится подавляющее большинство рычажных механизмов, применяемых в технике.

Число двухзвенных структурных групп (диад) в механизме может быть произвольным (но не более некоторого наперед заданного значения). Диады могут быть любого из пяти возможных видов: ВВВ, ВВП, ВПВ, ВПП, ПВП, где В — вращательная пара, П — поступательная пара. Входное звено образует со стойкой пару вида В или П.

В результате работы программы должны быть определены следующие геометрические и кинематические параметры механизма: положения, угловые скорости и угловые ускорения (или их аналоги) всех подвижных звеньев механизма; положения, скорости и ускорения (или их аналоги) отдельных точек подвижных звеньев; углы давления в диадах (эти углы характеризуют качество передачи движения и сил в механизме). Все указанные величины определяются для ряда дискретных положений входного звена, взятых в заданном интервале и с заданным шагом.

Необходимо предусмотреть вывод результатов анализа механизма в форме графиков или числовых таблиц. Как графики,

так и таблицы, могут быть выведены на экран, в файл или на принтер.

Может оказаться, что при некотором положении входного звена имеет место разрыв кинематической цепи механизма. Программа должна установить факт разрыва, но вычисления при этом не прерываются: анализ продолжается для последующих дискретных положений входного звена; не исключено, что при некотором из них кинематическая цепь механизма будет восстановлена.

При расчете искомых параметров необходимо использовать эффективные алгоритмы, которые обеспечивают быстрое получение однозначных и точных результатов анализа механизма (некоторые из этих алгоритмов были изложены в § 17.8).

При разработке программы в ней следует предусмотреть модуль, позволяющий формировать банк структурных и кинематических схем рычажных механизмов. Структурные и кинематические схемы механизмов хранятся в банке данных (БД) в компактном формализованном виде, что дает возможность разместить большое число схем в малом объеме памяти (дискового пространства). Пользователь может быстро просмотреть схемы механизмов, включенных в банк, и затем извлечь из него интересующую его схему (при просмотре механизмов формализованная информация преобразуется в графическое изображение с помощью специальной программы).

При создании программы особое внимание необходимо уделить разработке унифицированной и простой процедуры подготовки и ввода исходных данных, касающихся структуры исследуемого механизма и параметров его кинематической схемы. Все этапы этой процедуры должны быть реализованы в интерактивном режиме.

Предварительная подготовка структурной схемы механизма заключается в том, что пользователь нумерует звенья механизма числами 1, 2, ..., n .

Исходную информацию о структуре механизма рекомендуется вводить в компьютер посредством матрицы SM структурной схемы (см. § 19.3). Далее производится *идентификация* структурной схемы механизма с помощью модуля IDENT, описанного в § 19.4, в результате чего определяется *унифицированный структурный код* (УСК) механизма. Кроме того, выполняется *структурный анализ* механизма (с помощью модуля типа TAL,

описанного в § 19.3), в результате чего мы получаем следующие сведения о структуре механизма: число и вид пар, образуемых каждым звеном с другими звеньями; вид группы начальных звеньев, состоящей из стойки и входного звена; последовательность наложения двухзвенных структурных групп (диад), из которых состоит механизм; модификация каждой диады (BBB, BBП, ВПВ, ВПП или ПВП).

В том случае, когда в банке структурных схем механизмов уже имеется схема исследуемого механизма, отпадает необходимость ввода структурной матрицы SM ; нужно лишь загрузить отобранную структурную схему из БД в рабочую зону программы.

Ввод второй части исходных данных — постоянных параметров кинематической схемы механизма, а также данных, огибающих движение входного звена, — может быть выполнен различными способами. Выбор способа ввода производится пользователем в зависимости, например, от такого фактора, как наличие или отсутствие структурной или кинематической схемы исследуемого механизма в БД.

Программы типа KAL, как и другие программы системы MechCAD, должны быть снабжены соответствующим интерфейсом, который обеспечивал бы простую и удобную работу с ними. Должна быть предусмотрена развитая система контекстной помощи и подсказок на всех этапах взаимодействия пользователя с программой, начиная с ввода исходных данных и кончая интерпретацией полученных результатов. Поэтому среди модулей программ типа KAL важную роль играют модули, обеспечивающие эффективную графическую поддержку, а также визуализацию механизма и его анимацию, т.е. воспроизведение на экране компьютера движения механизма. На экран желательно выводить, в частности, следующую графическую информацию: рисунки звеньев и диад механизма вместе с необходимыми обозначениями; кинематическую схему механизма; графики зависимости определяемых параметров в функции независимого переменного параметра (например, угла поворота входного звена); графики траекторий рабочих точек подвижных звеньев; специальные формы для ввода исходных данных; оперативную поддержку в виде пиктограмм. Выбор масштабов всех изображений должен производиться автоматически, но в случае необ-

ходимости пользователь должен иметь возможность изменить масштаб любого рисунка.

§ 19.7. АВТОМАТИЗАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Многообразие задач кинематического синтеза рычажных механизмов различных структурных схем делает необходимым разработку серии компьютерных программ, предназначенных для решения этих задач. Каждая из этих программ представляет собой один из вариантов подсистемы KSL (см. § 19.2). При создании указанной серии программ приоритет следует отдавать типовым задачам кинематического синтеза рычажных механизмов, наиболее часто встречающимся в инженерной практике.

Уровень разработки программ, предназначенных для решения типовых задач, должен отвечать современным требованиям, предъявляемым к программным продуктам, особенно в части интерфейса. Несмотря на различия в постановках задач синтеза и в структурных схемах проектируемых механизмов (проявляющиеся, главным образом, в блоке «база знаний» по методам и процедурам кинематического синтеза рычажных механизмов), желательно обеспечить, насколько это возможно, методологическое единство программ при разработке блоков *«система управления»*, *«база данных»*, *«интерфейс пользователя»*, *«экспертная система»* (см. § 19.2).

Теоретической основой алгоритмов, использованных в блоке «база знаний» различных программ серии KSL, являются аналитические, аналитико-оптимизационные или чисто оптимизационные методы синтеза, а также анализа рычажных механизмов. Сюда относятся методы синтеза передаточных механизмов, направляющих механизмов, перемещающих механизмов, а также механизмов с заданным относительным движением двух подвижных звеньев. Синтезируемые рычажные механизмы могут быть плоскими и пространственными, одноподвижными и многоподвижными, малозвенными и многозвенными.

БД программ типа KSL формируется из рычажных механизмов, синтезированных данной программой. Информация о механизмах хранится в БД в сжатом формализованном виде. При просмотре того или иного механизма эта информация автоматически разворачивается и предстает в виде кинематиче-

ской схемы механизма, графика его функции положения, числовых данных, характеризующих свойства механизма. Программа должна обеспечить просмотр механизма как в состоянии покоя, так и в движении.

§ 19.8. КОМПЬЮТЕРНЫЕ АЛЬБОМЫ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Как отмечалось в § 19.2, в структуре большинства пакетов программ, входящих в систему MechCAD, присутствует в качестве одного из блоков *база данных* (БД) по рычажным механизмам. Формирование базы данных обеспечивается блоком ФБД, а ее функционирование — *системой управления базой данных* (СУБД).

На основе баз данных, создаваемых с помощью программ типа KAL и KSL (см. § 19.6 и 19.7), могут быть разработаны *компьютерные альбомы рычажных механизмов*. Эти альбомы, являющиеся самостоятельными программами (им присвоим общее наименование ALBUM), представляют собой электронные справочники и предназначены для конструкторов, занимающихся проектированием рычажных механизмов. Они могут найти применение при обучении студентов технических вузов, а также технического персонала, обслуживающего те или иные технологические машины (с помощью программы типа ALBUM можно, например, проследить на экране дисплея за взаимодействием нескольких исполнительных органов машины, приводимых в движение от рычажных механизмов).

Информация о кинематических схемах рычажных механизмов хранится в программе ALBUM в компактном формализованном виде, т.е. в закодированной форме, что дает возможность разместить большое число схем в малом объеме дискового пространства. При просмотре того или иного механизма эта информация автоматически разворачивается и предстает в виде кинематической схемы механизма, графика его функции положения, числовых данных, характеризующих свойства механизма.

Интерфейс с пользователем программ серии ALBUM включает систему иерархических меню, соответствующие оперативные указания и контекстную помощь.

СУБД программы серии ALBUM позволяет пользователю легко и быстро найти интересующий его механизм и перейти к его просмотру и анализу. Пользователь может выбрать механизм из БД различными способами: 1) по меню кинематических схем; 2) по меню графиков функций положения выходных звеньев или траекторий движения рабочих точек; 3) по числу звеньев механизма; 4) по его порядковому номеру в данном справочнике; 5) по его принадлежности к группе механизмов определенного технологического назначения или по другим признакам.

Различные программы серии ALBUM отличаются друг от друга только содержанием базы данных по механизмам, т.е. набором кинематических схем механизмов, включаемых в справочник.

Принцип формирования базы данных для конкретной программы может быть различным. Так, можно составить справочник, содержащий схемы рычажных механизмов, применяемых в машинах определенной отрасли промышленности, или механизмов с заданным числом звеньев (например, шестизвенных), или механизмов с определенными структурными особенностями (например, кулисных механизмов) и т.д.

В программах серии ALBUM желательно предусмотреть возможность оперативного изменения значений постоянных параметров кинематической схемы механизма непосредственно на экране компьютера во время сеанса работы пользователя с программой, что позволит оценить влияние таких изменений на график функции положения выходного звена или траектории движения рабочей точки.

Глава 20. СИСТЕМА ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМОВ АКУ

§ 20.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ АКУ

В общей системе проектирования механизмов АКУ динамические расчеты являются завершающим этапом. Этапу динамических исследований должны предшествовать этапы структурного синтеза и кинематического анализа и синтеза. Это обсто-

ительство накладывает вполне определенные требования к основным составным частям динамических исследований и особенно к разрабатываемым динамическим и математическим моделям.

В книге в обобщенную модель динамического анализа механизмов АКУ включены модели силового привода, механизма АКУ, отделяемого изделия (ракеты) и крыла самолета-носителя. В зависимости от целей и задач исследования возможны динамические модели с учетом или без учета упругости. В книге описана наиболее полная и сложная обобщенная динамическая модель: «силовой привод — упругий механизм АКУ — упругое отделяемое изделие — упругое крыло самолета-носителя».

Работоспособность разработанных методов и алгоритмов динамического исследования проиллюстрирована на динамической модели упругого рычажного механизма АКУ с пиротехническим силовым приводом.

Предложенные принципы составления динамических моделей и методы решения носят универсальный характер, поэтому можно считать, что в рассмотрение введены некоторые эталонные модели. Накопление материалов, содержащих сведения о наиболее характерных динамических моделях и их приводах, составленных на основе эталонных моделей, является существенным условием их рационального проектирования и дальнейшего совершенствования.

Заключительным этапом динамических исследований является этап оптимизационного динамического синтеза механизмов АКУ. Разработка методов оптимизационного динамического синтеза механизмов АКУ, практически не разработанных ранее, является одной из наиболее важных и актуальных современных проблем их проектирования.

При решении задачи оптимизационного динамического синтеза и рассмотрении нестационарных процессов при катапультировании изделий отсутствует необходимая статистическая информация о случайных возмущениях, действующих на систему «Самолет — АКУ — изделие». Поэтому важно разработать такой метод исследования динамических систем, который позволил бы получить гарантированные значения решений при самых неблагоприятных воздействиях случайных возмущений, заданных областями возможных значений. Такой метод, получивший назва-

ние метода «Разрешенных зон», разработан и изложен в настоящей книге.

Таким образом для исследуемой сложной механической системы, какой является система упругого механизма АКУ, изделия и самолета-носителя должна быть создана определенная совокупность динамических моделей, разработаны и апробированы методом их динамического анализа и оптимизационного динамического синтеза.

Решению комплекса поставленных задач посвящены главы 20, 21 и 22 настоящей книги.

В главе 20 представлены динамические модели и разработанные на их основе математические модели динамического анализа наиболее полной и сложной системы: "упругий механизм АКУ — упругое изделие — упругое крыло самолета — силовой привод".

В главе 20 изложен также алгоритм математического моделирования термогазодинамических процессов (с учетом теплоотдачи) в силовом пиропроводе катапультиной установки, используемый в этой главе при составлении обобщенной динамической и математической модели.

В главе 21 изложена методология оптимизационного динамического синтеза механизмов АКУ.

В главе 22 изложены подходы и методы динамического синтеза механизмов АКУ при воздействии на систему систематических и случайных возмущений, соответствующим условиям реального старта.

§ 20.2. ДИНАМИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРУГОГО РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА АКУ, УПРУГОГО ОТДЕЛЯЕМОГО ИЗДЕЛИЯ И УПРУГОГО КРЫЛА САМОЛЕТА-НОСИТЕЛЯ

Рассмотрим наиболее полную систему динамических и математических моделей «АКУ — отделяемое изделие — самолет-носитель». Общая структурная схема исследуемой динамической системы изображена на рис. 20.1.

Исследуемая динамическая система разбивается на отдельные подсистемы, для каждой из которых разработаны алгоритм и соответствующее программное обеспечение:

1. Механизм АКУ.

2. Отделяемое изделие.
3. Крыло самолета-носителя.
4. Силовой пиропровод.

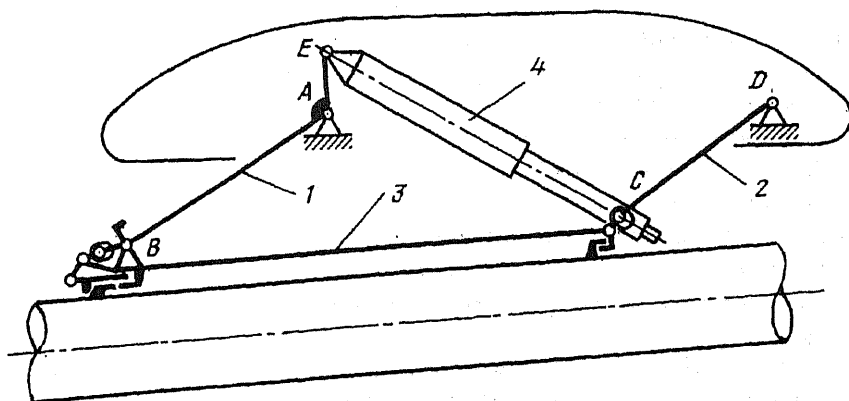


Рис. 20.1

Учитывая, что в данной главе представлена наиболее полная система динамических и математических моделей, изложение материала по каждой из подсистем построено таким образом, чтобы в максимальной степени осветить методические аспекты динамического анализа, приводя при этом необходимые выводы и доказательства. Что касается динамических и математических моделей крыла самолета-носителя, то в методических целях они приводятся именно в настоящем разделе. При этом следует иметь в виду, что изложенные здесь теоретические основы динамического анализа носят универсальный характер и могут быть применены к любому типу АКУ, отделяемого изделия и самолета-носителя.

20.2.1. Упругий механизм АКУ

Динамическая модель исследуемого упругого механизма АКУ изображена на рис. 20.2. Порядок соединения пружин, учитывающих изгибные и продольные жесткости звеньев, и шарниров в точках B и C представлен на рис. 20.3, a и $б$. Здесь C_1 — жесткость на изгиб звена EAB ; C_2 — жесткость на

растяжение звена AB . Жесткость на растяжение звена AE не учитываем; C_7 — жесткость на изгиб звена DC ; C_8 — жесткость на растяжение звена DC ; C_3 — жесткость на растяжение звена BC . На изгиб это звено не работает; C_6 — жесткость на растяжение звена 5; C_5 — жесткость на изгиб звена 5.

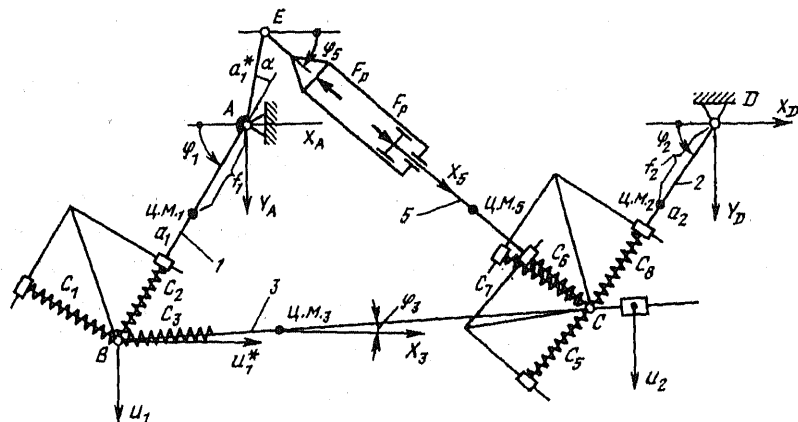


Рис. 20.2

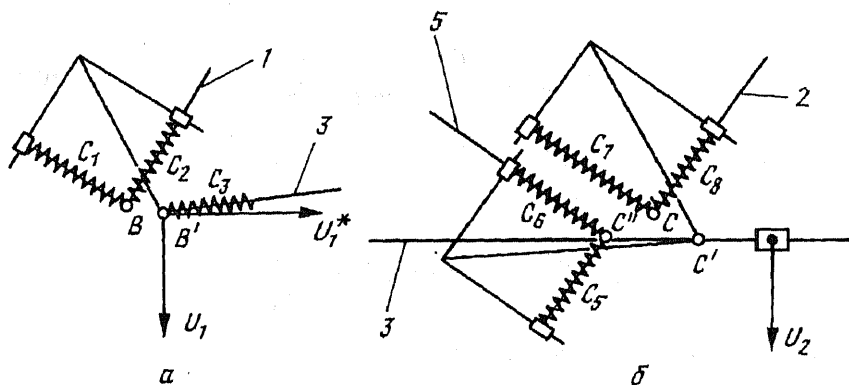


Рис. 20.3

Характеристики звеньев:

m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 — массы соответствующих звеньев;
 J_1, J_2 моменты инерции звеньев 1 и 2 относительно точек A и

D ; J_4 , J_5 — моменты инерции звеньев 4 и 5 относительно их центров масс; f_1 , f_2 — расстояния от точек A и D до Ц.М. звеньев 1 и 2.

Влияние на механизм АКУ крыла и изделия учтено с помощью введения координат u_1 , u_1^* , u_2 и X_A , Y_A , X_D , Y_D .

Математическое описание представленной динамической модели записывается в форме уравнений Лагранжа второго рода.

Введем независимые обобщенные координаты. Данная система имеет 12 степеней свободы, следовательно, должно быть 12 обобщенных координат. Однако, поскольку мы считаем координаты X_A , Y_A , X_D , Y_D , u_1 , u_1^* , u_2 известными (они получаются путем решения уравнений движения изделия и крыла самолета-носителя), то необходимо выбрать лишь 5 обобщенных координат: φ_1 , φ_2 , φ_5 , X_3 , X_5 .. В результате получим систему из пяти дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} &= \frac{\partial A}{\partial \varphi_1}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} &= \frac{\partial A}{\partial \varphi_2}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_5} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_5} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_5} &= \frac{\partial A}{\partial \varphi_5}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial X_3} + \frac{\partial \Pi}{\partial X_3} &= \frac{\partial A}{\partial X_3}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_5} \right) - \frac{\partial T}{\partial X_5} + \frac{\partial \Pi}{\partial X_5} &= \frac{\partial A}{\partial X_5}. \end{aligned} \right\} \quad (20.1)$$

Найдем кинетическую энергию системы:

$$\begin{aligned} T = & \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{J_2 \dot{\varphi}_2^2}{2} + \frac{m_5 (\dot{X}_5 - \dot{\varphi}_1 a_1^* \sin(\alpha + \varphi_1 + \varphi_5))^2}{2} + \\ & + \frac{m_4 (\dot{\varphi}_1 a_1^* \sin(\alpha + \varphi_1 + \varphi_5))^2}{2} + \frac{m_3 \dot{X}_3^2}{2} + \frac{(J_5 + J_4) \dot{\varphi}_5^2}{2}. \end{aligned} \quad (20.2)$$

Вследствие того, что угол φ_3 и скорость его изменения $\dot{\varphi}_3$ малы, вращение звена 3 вокруг центра масс не учитываем.

Найдем необходимые производные кинетической энергии:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= (J_1 + (m_5 + m_4) a_1^{*2} \sin^2(\alpha + \varphi_1 + \varphi_5)) \dot{\varphi}_1 - \\ &\quad - m_5 \dot{X}_5 a_1^* \sin(\alpha + \varphi_1 + \varphi_5); \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) &= (J_1 + (m_5 + m_4) a_1^{*2} \sin^2(\alpha + \varphi_1 + \varphi_5)) \ddot{\varphi}_1 - \\ &\quad - m_5 \ddot{X}_5 a_1^* \sin(\alpha + \varphi_1 + \varphi_5).\end{aligned}\quad (20.3)$$

Полагаем

$$\frac{d}{dt} \sin(\alpha + \varphi_1 + \varphi_5) \approx 0. \quad (20.4)$$

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_5} = m_5 \dot{X}_5 - \dot{\varphi}_1 a_1^* \sin(\alpha + \varphi_1 + \varphi_5) m_5; \quad (20.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_5} \right) = m_5 \ddot{X}_5 - \ddot{\varphi}_1 a_1^* \sin(\alpha + \varphi_1 + \varphi_5) m_5; \quad (20.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = J_2 \ddot{\varphi}_2 \quad (20.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_3} \right) = m_3 \ddot{X}_3; \quad (20.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_5} \right) = (J_5 + J_4) \ddot{\varphi}_5. \quad (20.9)$$

Из уравнений (20.3) и (20.6) можно получить:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) &= (J_1 + m_4 a_1^{*2} \sin^2(\alpha + \varphi_1 + \varphi_5)) \ddot{\varphi}_1 - \\ &\quad - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}_5} \right) \cdot a_1^* \sin(\alpha + \varphi_1 + \varphi_5).\end{aligned}$$

Тогда исходная система уравнений (20.1) приводится к виду:

$$\left. \begin{aligned} (J_1 + m_4 a_1^{*2} \sin^2 (\alpha + \varphi_1 + \varphi_5)) \ddot{\varphi}_1 - \\ - \left(\frac{\partial A}{\partial X_5} - \frac{\partial \Pi}{\partial X_5} \right) a_1^* \sin (\alpha + \varphi_1 + \varphi_5) &= \frac{\partial A}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}; \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 &= \frac{\partial A}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}; \\ m_3 \ddot{X}_3 &= \frac{\partial A}{\partial X_3} - \frac{\partial \Pi}{\partial X_3}; \\ (J_5 + J_4) \ddot{\varphi}_5 &= \frac{\partial A}{\partial \varphi_5} - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_5}; \\ m_5 \ddot{X}_5 - \ddot{\varphi}_1 a_1^* \sin (\alpha + \varphi_1 + \varphi_5) m_5 &= \frac{\partial A}{\partial X_5} - \frac{\partial \Pi}{\partial X_5}. \end{aligned} \right\} \quad (20.10)$$

Находим частные производные от работы внешних сил по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi_1} = 0; \quad \frac{\partial A}{\partial \varphi_2} = 0; \quad \frac{\partial A}{\partial X_3} = 0; \quad \frac{\partial A}{\partial \varphi_5} = 0; \quad \frac{\partial A}{\partial X_5} = F_P. \quad (20.11)$$

Для исследуемой схемы механизма внешней силой является усилие F_P , развиваемое приводом и приложенное в двух точках.

В результате система (20.10) приводится к виду, непосредственно реализуемому в алгоритме расчета:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= \frac{\left(\left(F_P - \frac{\partial \Pi}{\partial X_5} \right) a_1^* \sin (\alpha + \varphi_1 + \varphi_5) - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} \right)}{(J_1 + m_4 a_1^{*2} \sin^2 (\alpha + \varphi_1 + \varphi_5))}; \\ \ddot{\varphi}_2 &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} / J_2; \\ \ddot{X}_3 &= - \frac{\partial \Pi}{\partial X_3} / m_3; \\ \ddot{\varphi}_5 &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_5} / (J_4 + J_5); \\ \ddot{X}_5 &= \left(\ddot{\varphi}_1 a_1^* \sin (\alpha + \varphi_1 + \varphi_5) m_5 - \frac{\partial \Pi}{\partial X_5} + F_P \right) / m_5. \end{aligned} \right\} \quad (20.12)$$

В уравнения системы (20.12) входят частные производные потенциальной энергии системы по обобщенным координатам. Потенциальная энергия данной системы есть сумма потенциальных энергий растяжения — сжатия отдельных пружин, и ее можно найти по формуле:

$$\Pi = \sum_i c_i \frac{Z_i^2}{2},$$

где C_i — жесткости пружин; Z_i — растяжение — сжатие пружин.

С целью упрощения математического описания задачи не будем находить полное выражение потенциальной энергии, а сразу найдем производные ее по обобщенным координатам. Для этого выясним, на растяжение — сжатие каких пружин влияет та или иная координата, а также от каких обобщенных координат зависит растяжение — сжатие той или иной пружины. Предварительно введем следующие обозначения для растяжения — сжатия каждой из пружин:

$$A_{\Pi} \rightarrow C_1,$$

$$B_{\Pi} \rightarrow C_2,$$

$$E_{\Pi} \rightarrow C_3,$$

$$N_{\Pi} \rightarrow C_5,$$

$$M_{\Pi} \rightarrow C_6,$$

$$K_{\Pi} \rightarrow C_7,$$

$$F_{\Pi} \rightarrow C_8.$$

Тогда из анализа схемы на рис. 20.2 получим:

$$A_{\Pi} = f(\varphi_1; u_1; u_1^*; X_A; Y_A),$$

$$B_{\Pi} = f(\varphi_1; u_1; u_1^*; X_A; Y_A),$$

$$E_{\Pi} = f(X_3; u_1^*),$$

$$N_{\Pi} = f(\varphi_5; \varphi_1; X_3; u_2; X_A; Y_A), \quad (20.13)$$

$$M_{\Pi} = f(\varphi_5; \varphi_1; X_3; u_2; X_A; Y_A, X_5),$$

$$K_{\Pi} = f(\varphi_2; X_3; u_2; X_D; Y_D),$$

$$F_{\Pi} = f(\varphi_2; X_3; u_2; X_D; Y_D).$$

Отсюда для производных потенциальной энергии по обобщенным координатам запишем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} &= C_4 A_{\Pi} \frac{\partial A_{\Pi}}{\partial \varphi_1} + C_2 B_{\Pi} \frac{\partial B_{\Pi}}{\partial \varphi_1} + C_5 N_{\Pi} \frac{\partial N_{\Pi}}{\partial \varphi_1} + C_5 M_{\Pi} \frac{\partial M_{\Pi}}{\partial \varphi_1}, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} &= C_7 K_{\Pi} \frac{\partial K_{\Pi}}{\partial \varphi_2} + C_8 F_{\Pi} \frac{\partial F_{\Pi}}{\partial \varphi_2}, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial X_5} &= C_6 M_{\Pi} \frac{\partial M_{\Pi}}{\partial X_5}, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial X_3} &= C_3 E_{\Pi} \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial X_3} + C_5 N_{\Pi} \frac{\partial N_{\Pi}}{\partial X_3} + C_6 M_{\Pi} \frac{\partial M_{\Pi}}{\partial X_3} + \\ &\quad + C_7 K_{\Pi} \frac{\partial K_{\Pi}}{\partial X_3} + C_8 F_{\Pi} \frac{\partial F_{\Pi}}{\partial X_3}, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_5} &= C_5 N_{\Pi} \frac{\partial N_{\Pi}}{\partial \varphi_5} + C_5 M_{\Pi} \frac{\partial M_{\Pi}}{\partial \varphi_5}. \end{aligned} \right\} \quad (20.14)$$

Найдем растяжения — сжатия пружин и затем продифференцируем их по обобщенным координатам.

На основании (20.13) можно записать:

$$\begin{aligned} A_{\Pi} &= A_{\Pi \varphi_1} + A_{\Pi u_1} + A_{\Pi u_1^*} + A_{\Pi X_A} + A_{\Pi Y_A}; \\ B_{\Pi} &= B_{\Pi \varphi_1} + B_{\Pi u_1} + B_{\Pi u_1^*} + B_{\Pi X_A} + B_{\Pi Y_A}; \\ E_{\Pi} &= E_{\Pi X_3} + E_{\Pi u_1^*}; \\ N_{\Pi} &= N_{\Pi \varphi_5} + N_{\Pi \varphi_1} + N_{\Pi X_3} + N_{\Pi u_2} + N_{\Pi X_A} + N_{\Pi Y_A}; \\ M_{\Pi} &= M_{\Pi \varphi_5} + M_{\Pi X_5} + M_{\Pi \varphi_1} + M_{\Pi X_3} + M_{\Pi u_2} + M_{\Pi X_A} + M_{\Pi Y_A}; \\ K_{\Pi} &= K_{\Pi \varphi_2} + K_{\Pi X_3} + K_{\Pi u_2} + K_{\Pi X_D} + K_{\Pi Y_D}; \\ F_{\Pi} &= F_{\Pi \varphi_2} + F_{\Pi X_3} + F_{\Pi u_2} + F_{\Pi X_D} + F_{\Pi Y_D}. \end{aligned} \quad (20.15)$$

Принцип нахождения составляющих растяжения — сжатия от каждой обобщенной или от известной координаты состоит в том, что каждой обобщенной координате дается приращение от начального ее значения до текущего при фиксированных других координатах; растяжение — сжатие соответствующей пружины определяется при сравнении текущей длины с начальной. Приведем здесь только окончательные значения:

$$\begin{aligned}
 A_{\Pi \varphi_1} &= a_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_{10}); \\
 A_{\Pi u_2} &= -u_1 \cos \varphi_1; \\
 A_{\Pi u_1^*} &= -u_1^* \sin \varphi_1; \\
 A_{\Pi X_A} &= X_A \sin \varphi_1; \\
 A_{\Pi Y_A} &= Y_A \cos \varphi_1.
 \end{aligned} \tag{20.16}$$

$$\begin{aligned}
 B_{\Pi \varphi_1} &= a_1 (1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_{10})); \\
 B_{\Pi u_1} &= -u_1 \sin \varphi_1; \\
 B_{\Pi u_1^*} &= u_1^* \cos \varphi_1; \\
 B_{\Pi X_A} &= -X_A \cos \varphi_1; \\
 B_{\Pi Y_A} &= Y_A \sin \varphi_1.
 \end{aligned} \tag{20.17}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\Pi \varphi_2} &= a_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_{20}); \\
 K_{\Pi X_3} &= -X_3 \sin \varphi_2; \\
 K_{\Pi u_2} &= -u_2 \cos \varphi_2; \\
 K_{\Pi X_D} &= X_D \sin \varphi_2; \\
 K_{\Pi Y_D} &= Y_D \cos \varphi_2.
 \end{aligned} \tag{20.18}$$

$$F_{\Pi \varphi_2} = a_2 (1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_{20}));$$

$$F_{\Pi X_3} = X_3 \cos \varphi_2;$$

$$F_{\Pi u_2} = -u_2 \sin \varphi_2; \quad (20.19)$$

$$F_{\Pi X_D} = -X_D \cos \varphi_2;$$

$$F_{\Pi Y_D} = Y_D \sin \varphi_2.$$

$$M_{\Pi \varphi_5} = a_5 (1 - \cos(\varphi_5 - \varphi_{50}));$$

$$M_{\Pi X_5} = X_5;$$

$$\begin{aligned} M_{\Pi \varphi_1} &= -2a_1^* \sin\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_{10}}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_{10}}{2} + \alpha + \varphi_5\right) = \\ &= -a_1^* (\cos(\varphi_1 + \alpha + \varphi_5) - \cos(\varphi_1 + \alpha + \varphi_5)); \end{aligned} \quad (20.20)$$

$$M_{\Pi X_3} = -X_3 \cos \varphi_5;$$

$$M_{\Pi u_2} = -u_2 \sin \varphi_5;$$

$$M_{\Pi X_A} = X_A \cos \varphi_5;$$

$$M_{\Pi Y_A} = Y_A \sin \varphi_5.$$

$$N_{\Pi \varphi_5} = -a_5 \sin(\varphi_5 - \varphi_{50});$$

$$\begin{aligned} N_{\Pi \varphi_1} &= 2a_1^* \sin\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_{10}}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_{10}}{2} + \alpha + \varphi_5\right) = \\ &= -a_1^* (\sin(\varphi_{10} + \alpha + \varphi_5) - \sin(\varphi_1 + \alpha + \varphi_5)); \end{aligned} \quad (20.21)$$

$$N_{\Pi X_3} = -X_3 \sin \varphi_5;$$

$$N_{\Pi u_2} = u_2 \cos \varphi_5;$$

$$N_{\Pi X_A} = X_A \sin \varphi_5;$$

$$N_{\Pi Y_A} = -Y_A \cos \varphi_5.$$

$$\begin{aligned} E_{\Pi} X_3 &= X_3 ; \\ E_{\Pi} u_1^* &= -u_1^* . \end{aligned} \quad (20.22)$$

Таким образом, растяжения — сжатия пружин рассчитываются из выражений:

$$\left. \begin{aligned} A_{\Pi} &= a_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_{10}) - u_1 \cos \varphi_1 - u_1^* \sin \varphi_1 + \\ &\quad + X_A \sin \varphi_1 + Y_A \cos \varphi_1 , \\ B_{\Pi} &= a_1 (1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_{10})) - u_1 \sin \varphi_1 + u_1^* \cos \varphi_1 - \\ &\quad - X_A \cos \varphi_1 + Y_A \sin \varphi_1 , \\ K_{\Pi} &= a_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_{20}) - X_3 \sin \varphi_2 - u_2 \cos \varphi_2 + \\ &\quad + X_D \sin \varphi_2 + Y_D \cos \varphi_2 , \\ F_{\Pi} &= a_2 (1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_{20})) + X_3 \cos \varphi_2 - u_2 \sin \varphi_2 - \\ &\quad - X_D \cos \varphi_2 + Y_D \sin \varphi_2 , \\ M_{\Pi} &= a_5 (1 - \cos(\varphi_5 - \varphi_{50})) + X_5 - a_1^* (\cos(\varphi_{10} + \alpha + \varphi_5) - \\ &\quad - \cos(\varphi_1 + \alpha + \varphi_5)) - X_3 \cos \varphi_5 - u_2 \sin \varphi_5 + \\ &\quad + X_A \cos \varphi_5 + Y_A \sin \varphi_5 , \\ N_{\Pi} &= -a_5 \sin(\varphi_5 - \varphi_{50}) - a_1^* (\sin(\varphi_{10} + \alpha + \varphi_5) - \\ &\quad - \sin(\varphi_1 + \alpha + \varphi_5)) - X_3 \sin \varphi_5 + u_2 \cos \varphi_5 + \\ &\quad + X_A \sin \varphi_5 - Y_A \cos \varphi_5 , \\ E_{\Pi} &= X_3 - u_1^* . \end{aligned} \right\} \quad (20.23)$$

Продифференцируем уравнения (20.23) по обобщенным координатам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \varphi_1} &= a_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_{10}) + u_1 \sin \varphi_1 - u_1^* \cos \varphi_1 + X_A \cos \varphi_1 - \\ &\quad - Y_A \sin \varphi_1 = a_1 - B_{\Pi} ; \\ \frac{\partial B_{\Pi}}{\partial \varphi_1} &= a_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_{10}) - u_1 \cos \varphi_1 - u_1^* \sin \varphi_1 + X_A \sin \varphi_1 + \\ &\quad + Y_A \cos \varphi_1 = A_{\Pi} ; \end{aligned} \quad (20.24)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi_1} = a_1^* \cos(\varphi_1 + \alpha + \varphi_5);$$

$$\frac{\partial M_{\Pi}}{\partial \varphi_1} = -a_1^* \sin(\varphi_1 + \alpha + \varphi_5).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{\Pi}}{\partial \varphi_2} = a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_{20}) - X_3 \cos \varphi_2 + u_2 \sin \varphi_2 + X_D \cos \varphi_2 - \\ - Y_D \sin \varphi_2 = a_2 - F_{\Pi}; \end{aligned} \quad (20.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\Pi}}{\partial \varphi_2} = a_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_{20}) - X_3 \sin \varphi_2 - u_2 \cos \varphi_2 + X_D \sin \varphi_2 + \\ + Y_D \cos \varphi_2 = K_{\Pi}; \end{aligned} \quad (20.26)$$

$$\frac{\partial M_{\Pi}}{\partial X_5} = 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial X_3} = 1; \quad \frac{\partial N_{\Pi}}{\partial X_3} = -\sin \varphi_5; \quad \frac{\partial M_{\Pi}}{\partial X_3} = -\cos \varphi_5; \\ \frac{\partial K_{\Pi}}{\partial X_3} = -\sin \varphi_2; \quad \frac{\partial F}{\partial X_3} = \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (20.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\Pi}}{\partial \varphi_5} = -a_5 \cos(\varphi_5 - \varphi_{50}) - a_1^* (\cos(\varphi_{10} + \alpha + \varphi_5) - \\ - \cos(\varphi_1 + \alpha + \varphi_5)) - X_3 \cos \varphi_5 - u_2 \sin \varphi_5 + \\ + X_A \cos \varphi_5 + Y_A \sin \varphi_5 = M_{\Pi} - a_5 - X_5, \end{aligned} \quad (20.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\Pi}}{\partial \varphi_5} = a_5 \sin(\varphi_5 - \varphi_{50}) + a_1^* (\sin \varphi_{10} + \alpha + \varphi_5) - \\ - \sin(\varphi_1 + \alpha + \varphi_5)) + X_3 \sin \varphi_5 - u_2 \cos \varphi_5 - \\ - X_5 \sin \varphi_5 + Y_A \cos \varphi_5 = -N_{\Pi}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в систему уравнений (20.23), можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = & C_1 A_{\Pi} (a_1 - B_{\Pi}) + C_2 B_{\Pi} A_{\Pi} + C_5 N_{\Pi} a_1^* \cos(\varphi_1 + \alpha + \varphi_5) - \\ & - C_6 M_{\Pi} a_1^* \sin(\varphi_1 + \alpha + \varphi_5); \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = & C_7 K_{\Pi} (a_2 - F_{\Pi}) + C_8 F_{\Pi} K_{\Pi}; \end{aligned} \quad (20.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial X_5} = & C_6 M_{\Pi}; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial X_3} = & C_3 E_{\Pi} - C_5 N_{\Pi} \sin \varphi_5 - C_6 M_{\Pi} \cos \varphi_5 - \\ & - C_7 K_{\Pi} \sin \varphi_5 + C_8 F_{\Pi} \cos \varphi_2; \end{aligned} \quad (20.30)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_5} = - C_6 M_{\Pi} N_{\Pi} + C_5 N_{\Pi} (M_{\Pi} - a_5 - X_5).$$

Таким образом, мы полностью определили систему уравнений (20.12).

Для решения задачи движения изделия необходимо получить формулы для вычисления значений усилий, с которыми механизм АКУ воздействует на изделие. Эти усилия есть усилия сжатия — растяжения пружин.

Обозначим:

$$\begin{aligned} F_1 &= C_1 A_{\Pi}; & F_2 &= C_2 B_{\Pi}; \\ F_7 &= C_7 K_{\Pi}; & F_8 &= C_8 F_{\Pi}; \\ F_3 &= C_3 E_{\Pi}; & F_5 &= C_5 N_{\Pi}; & F_6 &= C_6 M_{\Pi}. \end{aligned} \quad (20.31)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} P_1 &= F_1 \cos \varphi_1 + F_2 \sin \varphi_1; \\ P_1^* &= F_1 \sin \varphi_1 - F_2 \cos \varphi_1 + F_3; \\ P_2 &= F_7 \cos \varphi_2 + F_8 \sin \varphi_2 + F_6 \sin \varphi_5 - F_5 \cos \varphi_5. \end{aligned} \quad (20.32)$$

20.2.2. Упругое отделяемое изделие

При решении задач, связанных с математическим моделированием сложных механических систем, возникает необходимость в учете взаимного влияния упругих деформаций элементов системы.

Упругие деформации вызывают изменение формы и размеров звеньев, что, в свою очередь, оказывает значительное влияние на работу механизма в целом. Задача приобретает особую актуальность в том случае, когда силы, действующие на элементы механизма, являются функциями их относительного положения. Тогда упругие деформации звеньев, влияя на их взаимное расположение и изменяя величины действующих в системе сил, оказывают качественное воздействие на характер протекания динамических процессов. Так, например, законы изменения выходных переменных в математической модели могут приобретать колебательную составляющую.

В данной работе рассматривается именно такая сложная механическая система, включающая упругий механизм АКУ, упругое отделяемое изделие и упругое крыло самолета-носителя.

Здесь мы рассматриваем решение задачи об упругих колебаниях отделяемого изделия, представленного при математическом моделировании в виде призматического стержня. При расчетах учитывается масса стержня, распределенная по его длине. Упругие свойства считаются также распределенными по его длине. При решении учитывается упругость стержня на растяжение — сжатие и на изгиб. Деформациями при кручении пренебрегаем из-за их малости. Не учитывается также взаимное влияние деформаций растяжения — сжатия и изгиба друг на друга.

Отделяемое изделие является упругой системой, и оно может совершать свободные продольные и изгибные колебания. Полагаем, что эти колебания не влияют друг на друга.

Кроме того, под действием приложенных внешних сил (сил со стороны механизма АКУ, аэродинамических, инерционных сил и сил веса) изделие совершает вынужденные движения, которые накладываются на свободные колебания.

В настоящем разделе рассматривается вывод и решение дифференциального уравнения, описывающего изгибные колебания, а также решение дифференциального уравнения для продольных колебаний стержня. Дана оценка влияния упругости отделяемого изделия на работу рычажного механизма АКУ (см. рис. 20.4).

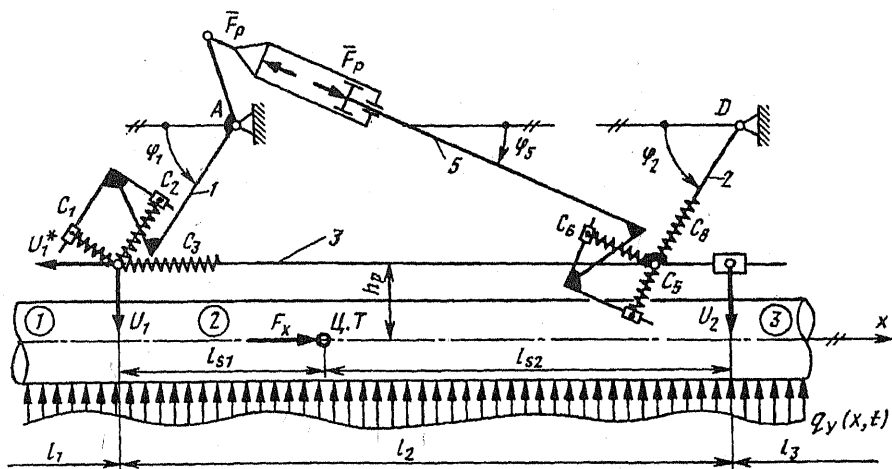


Рис. 20.4

Для решения дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих изгибные и продольные колебания, используется метод нормальных форм колебаний, теорема механики о взаимности работ на виртуальных перемещениях системы, функции и преобразования Крылова.

Учет влияния граничных условий для нахождения значений постоянных интегрирования в решениях дифференциальных уравнений производится с применением матричных методов.

Численное решение трансцендентного уравнения частот производится по методу Мюллера.

20.2.2.1. Учет конструктивных особенностей отделяемого изделия и действующих силовых факторов

Для более точного учета особенностей конструкции реального отделяемого изделия с точки зрения его упругих и массовых свойств рассматриваемый стержень разбивается на несколько участков.

Предполагается, что площадь поперечного сечения F_k , момент сопротивления сечения на изгиб J_k , плотность ρ_k и модуль Юнга E_k материала, имеют постоянное значение по длине k -го участка стержня.

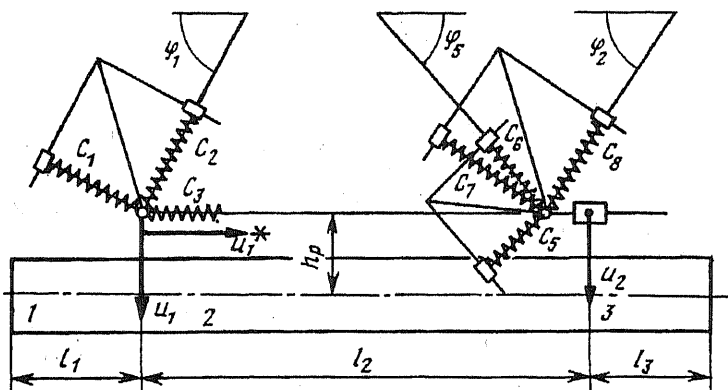


Рис. 20.5

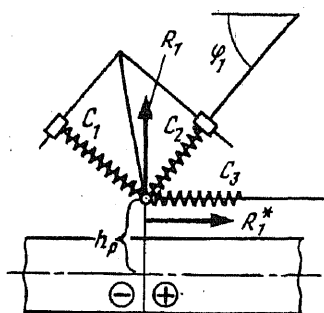


Рис. 20.6

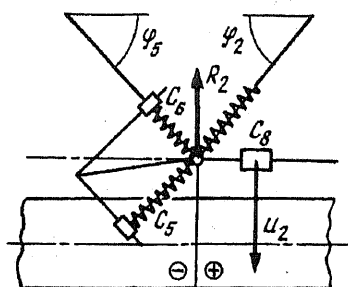


Рис. 20.7

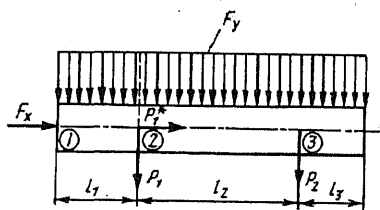


Рис. 20.8

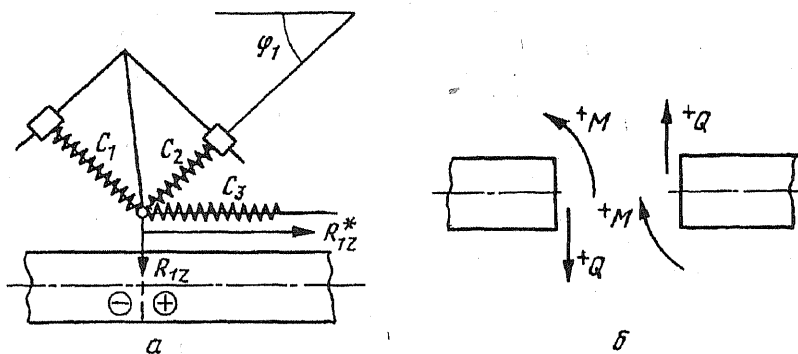


Рис. 20.9

Количество участков выбирается в зависимости от особенностей конкретной конструкции изделия. Количество участков, в принципе, не ограничено. В нашем случае стержень разбит на 3 участка (рис. 20.4). Левый конец первого участка и правый конец третьего — свободны (в сечении отсутствуют силовые и моментные нагрузки). На границах между первым и вторым, а также между вторым и третьим участками изделие соединяется с механизмом АКУ. Выбор границ участков в местах соединения с механизмом АКУ не случаен. Этот прием позволяет учесть упругость рычагов механизма при рассмотрении собственных колебаний общей системы «упругое отделяемое изделие — упругий механизм АКУ».

Кроме того, в этих точках к изделию прикладываются сосредоточенные силы P_1 , P_1^* и P_2 (рис. 20.8) со стороны механизма АКУ. Из внешних сил, приложенных к изделию, учтем в решении силу веса изделия, распределенные аэродинамические и инерционные нагрузки (см. рис. 20.8).

Решение задачи сводится к определению координат u_1 , u_1^* и u_2 (см. рис. 20.5 — 20.7, 20.9, а) точек присоединения изделия к механизму АКУ в любой момент времени процесса отделения относительно системы координат, связанной с механизмом АКУ. При этом предполагаются известными геометрические (J_k, F_k) , жесткостные (E_k) , массовые (ρ_k) ($k = 1, 2, 3$) параметры изделия, жесткости на растяжение — сжатие и изгиб

рычагов механизма АКУ, пространственное положение рычагов и значения сил P_1 , P_1^* , P_2 в текущий момент времени.

20.2.2.2. Изгибные колебания составного стержня (отделяемого изделия)

20.2.2.2.1. Вывод дифференциального уравнения изгибных колебаний k -го участка составного стержня

Составим уравнения динамического равновесия сил и моментов, действующих на малый элемент k -го участка:

$$Q - Q - \frac{\partial Q}{\partial x} dx - \rho_k F_k dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q(x_k, t) dx = 0. \quad (20.33)$$

Равновесие моментов относительно точки с координатой $x + dx$ имеет вид:

$$- Q dx - M + M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \approx 0; \quad Q = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (20.34)$$

(пренебрегаем моментами, созданными инерционными силами и внешней распределенной нагрузкой).

Подставим уравнение (20.34) в (20.33), получим

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} dx + \rho_k F_k dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x_k, t).$$

Из теории сопротивления материалов известно соотношение:

$M = E_k J_k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Подставим его в последнюю формулу, помня, что E_k , $J_k = \text{const}$ по длине k -го участка стержня:

$$E_k J_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho_k F_k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x_k, t). \quad (20.35)$$

Здесь (20.35) — уравнение вынужденных изгибных колебаний k -го участка стержня.

При выводе уравнения (20.35) не учитывалось влияние вязкого трения внешней среды из-за его относительной малости в задачах данного класса.

20.2.2.2. Решение дифференциального уравнения изгибных колебаний.

Свободные колебания системы. Перепишем уравнение (20.35) в виде:

$$a_k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q_k(x, t),$$

где

$$a_k = \sqrt{\frac{E_k J_k}{\rho_k F_k}}; \quad q_k(x, t) = q(x_k, t) / \rho_k F_k,$$

k — номер рассматриваемого участка стержня.

Таким образом получим неоднородное дифференциальное уравнение 4-го порядка в частных производных. Решим сначала соответствующее однородное уравнение. Решение этого уравнения будет соответствовать свободным колебаниям k -го участка стержня:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = - \frac{1}{a_k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (20.36)$$

Решение ищем в форме

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} X_{ki}(x) \varphi_i(t), \quad (20.37)$$

где $\varphi_i = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t = E_i \sin(\omega_i t + \beta_i)$; $X_{ki}(x)$ — собственная функция свободных изгибных колебаний стержня; E_i , β_i — постоянные интегрирования.

Выражение (20.37) — бесконечная сумма гармоник; i — номер гармоники. Каждая гармоника в выражении (20.37) должна являться решением уравнения (20.36) (это свойство выте-

кает из предположения о независимости отдельных гармоник в выражении (20.37)).

Подставим выражение для i -й гармоники в уравнение (20.36):

$$(A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \left(\frac{\partial^4 X_{ki}}{\partial x^4} - \frac{\omega_i^2}{a_k^2} X_{ki} \right) = 0.$$

Левый сомножитель в общем случае отличен от нуля.

Тогда

$$\frac{\partial^4 X_{ki}}{\partial x^4} - \lambda_{ki}^4 X_{ki} = 0, \quad (20.38)$$

где $\lambda_{ki} = \sqrt{\frac{\omega_i}{a_k}}$.

Решение уравнения (20.38) будем искать в виде: $X_{ki}(x) = e^{nx}$.

Тогда

$$e^{nx} (n^4 - \lambda_{ki}^4) = 0,$$

где $n_{1,2} = \pm \lambda_{ki}$; $n_{2,3} = \pm j \lambda_{ki}$; $j^2 = -1$.

В этом случае

$$X_{ki} = C_1 \sin \lambda_{ki} x + C_2 \cos \lambda_{ki} x + C_3 \operatorname{sh} \lambda_{ki} x + C_4 \operatorname{ch} \lambda_{ki} x.$$

Собственную функцию представим в форме Крылова:

$$X_{ki} = D_{1ki} S_{ki}(x) + D_{2ki} T_{ki}(x) + D_{3ki} U_{ki}(x) + D_{4ki} V_{ki}(x), \quad (20.39)$$

где функции Крылова:

$$S_{ki}(x) = \frac{1}{2} [\operatorname{ch} \lambda_{ki} x + \cos \lambda_{ki} x];$$

$$T_{ki}(x) = \frac{1}{2} [\operatorname{sh} \lambda_{ki} x + \sin \lambda_{ki} x];$$

$$U_{ki}(x) = \frac{1}{2} [\operatorname{ch} \lambda_{ki} x - \cos \lambda_{ki} x];$$

$$V_{ki}(x) = \frac{1}{2} [\operatorname{sh} \lambda_{ki} x - \sin \lambda_{ki} x],$$

а D_{1ki} , D_{2ki} , D_{3ki} , D_{4ki} — постоянные интегрирования.

Их значения определим из рассмотрения граничных условий на концах участков. Здесь λ_{ki} — волновое число:

$$\lambda_{ki} = \sqrt{\frac{\omega_i}{a_k}} = \sqrt[4]{\frac{\rho_k F_k \omega_i^2}{E_k J_k}}.$$

По своему физическому смыслу волновое число есть величина, обратная длине волны деформации.

Физический смысл собственной функции $X_{ki}(x)$ в случае свободных колебаний системы (отсутствуют внешние силовые факторы) становится ясен из рассмотрения i -й гармоники выражения (20.37): $u_i = X_{ki} \Phi_i(t)$. Здесь X_{ki} — зависимость амплитуды смещения сечения на k -м участке стержня от координаты этого сечения.

Действительно,

$$u_i = X_{ki}(x) E_i \sin(\omega_i t + \beta_i) = X_{ki}(x) \sin(\omega_i t + \beta_i),$$

где $X_{ki}(x)$ найдена с точностью до неизвестных пока постоянных интегрирования.

Найдем значения D_{jki} ($j = 1; 2; 3; 4$) постоянных интегрирования в $X_{ki}(x)$. Для этого используем известные соотношения:

$$\Theta(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = u'(x, t);$$

$$M(x, t) = E_k J_k u''(x, t);$$

$$Q(x, t) = E_k J_k u'''(x, t),$$

где u , Θ , M , Q — соответственно смещение, угол поворота, изгибный момент и перерезывающая сила в сечении с координатой k -го участка стержня.

Тогда

$$\begin{aligned} u_i(0, t) &= X_{ki}(0) \sin(\omega_i t + \beta_i) = D_{1ki} \sin(\omega_i t + \beta_i) = \\ &= u_{0ki} \sin(\omega_i t + \beta_i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_i(0, t) &= X'_{ki}(0) \sin(\omega_i t + \beta_i) = \lambda_{ki} D_{2ki} \sin(\omega_i t + \beta_i) = \\ &= \Theta_{0ki} \sin(\omega_i t + \beta_i); \end{aligned}$$

$$M_i(0, t) = E_k J_k X_{ki}''(0) \sin(\omega_i t + \beta_i) = E_k J_k \lambda_{ki}^2 D_{3ki} \sin(\omega_i t + \beta_i) = M_{0ki} \sin(\omega_i t + \beta_i);$$

$$Q_i(0, t) = E_k J_k X_{ki}'''(0) \sin(\omega_i t + \beta_i) = E_k J_k \lambda_{ki}^3 D_{4ki} \sin(\omega_i t + \beta_i) = Q_{0ki} \sin(\omega_i t + \beta_i).$$

Мы видим, что u_{0ki} , Θ_{0ki} , M_{0ki} , Q_{0ki} — соответственно амплитуды смещения, угла поворота, изгибающего момента и перерезывающей силы в сечении $x = 0$ на левой границе k -го участка. Из этих соотношений найдем D_{jki} ($j = 1; 2; 3; 4$):

$$D_{1ki} = u_{0ki};$$

$$D_{2ki} = \Theta_{0ki} / \lambda_{ki};$$

$$D_{3ki} = M_{0ki} / E_k J_k \lambda_{ki}^2;$$

$$D_{4ki} = Q_{0ki} / E_k J_k \lambda_{ki}^3.$$

Тогда амплитуды u , Θ , M , Q в любом сечении k -го участка можно найти из выражений:

$$\left. \begin{aligned} u_{ki}(x) &= u_{0ki} S_{ki}(x) + \frac{\Theta_{0ki}}{\lambda_{ki}} T_{ki}(x) + \frac{M_{0ki}}{E_k J_k \lambda_{ki}^2} U_{ki}(x) + \\ &\quad + \frac{Q_{0ki}}{E_k J_k \lambda_{ki}^3} V_{ki}(x), \\ \Theta_{ki}(x) &= \lambda_{ki} u_{0ki} V_{ki}(x) + \Theta_{0ki} S_{ki}(x) + \frac{M_{0ki}}{E_k J_k \lambda_{ki}} T_{ki}(x) + \\ &\quad + \frac{Q_{0ki}}{E_k J_k \lambda_{ki}^2} U_{ki}(x), \\ M_{ki}(x) &= \lambda_{ki}^2 E_k J_k u_{0ki} U_{ki}(x) + E_k J_k \lambda_{ki} \Theta_{0ki} V_{ki}(x) + \\ &\quad + M_{0ki} S_{ki}(x) + \frac{Q_{0ki}}{\lambda_{ki}} T_{ki}(x); \\ Q_{ki}(x) &= \lambda_{ki}^3 E_k J_k u_{0ki} T_{ki}(x) + E_k J_k \lambda_{ki}^2 \Theta_{0ki} U_{ki}(x) + \\ &\quad + \frac{M_{0ki}}{\lambda_{ki}} V_{ki}(x) + Q_{0ki} S_{ki}(x). \end{aligned} \right\} \quad (20.40)$$

Таким образом, зная амплитудные значения для i -й гармоники величин u_{ki} , Θ_i , M_{ki} , Q_{ki} на одном конце участка стержня, можно определить их на другом конце. Для этого в (20.40) вместо x нужно подставить l_k — длину k -го участка стержня.

Для более компактной формы записи представим выражения (20.40) в матричной форме. Для этого обозначим:

R_{0ki} — вектор амплитуд свободных колебаний левого конца k -го участка,

$$\tilde{R}_{0ki} = \begin{bmatrix} u_{0ki} \\ \Theta_{0ki} \\ M_{0ki} \\ Q_{0ki} \end{bmatrix};$$

$\tilde{R}_{lki}$ — вектор амплитуд свободных колебаний правого конца k -го участка,

$$\tilde{R}_{lki} = \begin{bmatrix} u_{lki} \\ \Theta_{lki} \\ M_{lki} \\ Q_{lki} \end{bmatrix};$$

$$q_{k-1, k, i} = \begin{bmatrix} S_{ki}(l_k) & \frac{T_{ki}(l_k)}{\lambda_{ki}} & \frac{U_{ki}(l_k)}{E_k J_k \lambda_{ki}^2} & \frac{V_{ki}(l_k)}{E_k J_k \lambda_{ki}^3} \\ \lambda_{ki} V_{ki}(l_k) & S_{ki}(l_k) & \frac{T_{ki}(l_k)}{E_k J_k \lambda_{ki}} & \frac{U_{ki}(l_k)}{E_k J_k \lambda_{ki}^2} \\ \lambda_{ki}^2 E_k J_k U_{ki}(l_k) & E_k J_k \lambda_{ki} V_{ki}(l_k) & S_{ki}(l_k) & \frac{T_{ki}(l_k)}{\lambda_{ki}} \\ \lambda_{ki}^3 E_k J_k T_{ki}(l_k) & E_k J_k \lambda_{ki}^2 U_{ki}(l_k) & \lambda_{ki} V_{ki}(l_k) & S_{ki}(l_k) \end{bmatrix}. \quad (20.41)$$

Здесь (20.41) — матрица переноса амплитуд свободных колебаний с левого конца k -го участка на его правый конец.

Тогда выражение (20.40) для случая, когда $x = l_k$, имеет вид:

$$\tilde{R}_{lki} = q_{k-1, k, i} \tilde{R}_{0ki}.$$

Теперь напишем выражение для переноса параметров с левого конца стержня на правый:

$$\begin{bmatrix} U_{li} \\ \Theta_{li} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = q_{2,3,i} q_{C02} q_{1,2,i} q_{C01} q_{0,1,i} \begin{bmatrix} U_{0li} \\ \Theta_{0li} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (20.42)$$

Значения $M_{0li} = Q_{0li} = M_{li} = Q_{li} = 0$, так как концы стержня не закреплены.

Здесь q_{C01} , q_{C02} — матрицы переноса параметров через узлы подвеса отделяемого изделия к механизму отделения.

Определение элементов матриц переноса q_{C01} , q_{C02} . На рис. 20.6 изображен левый узел подвеса изделия к механизму АКУ (левый бугель). Рассмотрим, как изменяются параметры колебаний при переходе через него. При этом зафиксируем угловые положения рычагов ($\varphi_1 = \text{const}$). Тогда при перемещении точки левого узла подвеса, возникшем в результате колебаний изделия, происходят деформация пружин C_1 , C_2 , C_3 , работающих только на растяжение — сжатие. Пружины имитируют упругость звеньев механизма АКУ на растяжение — сжатие и изгиб.

При колебаниях изделия в исследуемом узле крепления возникают силы R_1 и R_1^* (см. рис. 20.6). Тогда можно записать:

$$\left. \begin{aligned} u^+ &= u^- \\ \Theta^+ &= \Theta^- \\ M^+ &= M^- + R_1^* h_p \\ Q^+ &= Q^- + R_1 \end{aligned} \right\}, \quad (20.43)$$

где u^+ , Θ^+ , M^+ , Q^+ — параметры справа от узла подвески; u^- , Θ^- , M^- , Q^- — параметры слева от узла подвески.

Положительные направления внутренних силовых факторов в сечении выберем в соответствии с правилом знаков, указанным на рис. 20.9, б, (положительные направления перемещения u — вверх, угла поворота Θ — против часовой стрелки).

Тогда согласно схеме на рис. 20.6 запишем:

деформация пружины

$$C_1 - A^* = -u^- \cos \varphi_1 - \Theta^- h_p \sin \varphi_1;$$

$$C_2 - B^* = -u^- \sin \varphi_1 + \Theta^- h_p \cos \varphi_1;$$

$$C_3 - E^* = \Theta^- h_p.$$

Положительное направление деформации пружин — растяжение:

$$R_1^* = -C_1 A^* \sin \varphi_1 + C_2 B^* \cos \varphi_1 + C_3 E^*;$$

$$R_1 = +C_1 A^* \cos \varphi_1 + C_2 B^* \sin \varphi_1.$$

Тогда выражения (20.43) приобретут вид:

$$u^+ = u^-;$$

$$\Theta^+ = \Theta^-;$$

$$M^+ = M^- + (-C_1 (-u^- \cos \varphi_1 - \Theta^- h_p \sin \varphi_1) \sin \varphi_1 + C_2 (-u^- \sin \varphi_1 + \Theta^- h_p \cos \varphi_1) \cos \varphi_1 + C_3 h_p \Theta^-) h_p;$$

$$Q^+ = Q^- + (+C_1 (-u^- \cos \varphi_1 - \Theta^- h_p \sin \varphi_1) \cos \varphi_1 + C_2 (-u^- \sin \varphi_1 + \Theta^- h_p \cos \varphi_1) \sin \varphi_1).$$

Или

$$u^+ = u^-;$$

$$\Theta^+ = \Theta^-;$$

$$M^+ = M^- + C_{01}^p h_p u^- + C_{01}^* h_p^2 \Theta^-;$$

$$Q^+ = Q^- + C_{01} u^- - C_{01}^p h_p \Theta^-,$$

где

$$C_{01}^p = (C_1 - C_2) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1;$$

$$C_{01}^* = + (C_1 \sin^2 \varphi_1 + C_2 \cos^2 \varphi_1 + C_3);$$

$$C_{01} = -(C_1 \cos^2 \varphi_1 + C_2 \sin^2 \varphi_1).$$

Тогда матрица переноса параметров через левый узел подвеса будет иметь вид:

$$q_{c01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ C_{01}^p h_p & C_{01}^* h_p^2 & 1 & 0 \\ C_{01} & -C_{01}^p h_p & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогичные исследования проведем и по правому узлу подвеса отделяемого изделия (правому бугелю) (см. рис. 20.7). Благодаря особенностям конструкции этого узла при колебаниях изделия здесь возникает только сила R_2 , перпендикулярная оси изделия.

Поэтому запишем:

$$u^+ = u^-, \quad \Theta^+ = \Theta^-, \quad M^+ = M^-, \quad Q^+ = Q^- + R_2,$$

где $R_2 = C_8 F \sin \varphi_2 + C_6 M \sin \varphi_5 - C_5 N \cos \varphi_5$; F — деформация пружины C_8 :

$$F = -u^- \sin \varphi_2;$$

M — деформация пружины C_6 :

$$M = -u^- \sin \varphi_5;$$

N — деформация пружины C_5 :

$$N = u^- \cos \varphi_5.$$

Тогда:

$$u^+ = u^-, \quad \Theta^+ = \Theta^-, \quad M^+ = M^-, \quad Q^+ = Q^- - C_{02} u^-,$$

где $C_{02} = C_6 \cos^2 \varphi_5 + C_6 \sin^2 \varphi_5 + C_5 \sin^2 \varphi_2$.

Используя данные выражения, напомним матрицу переноса параметров через правый узел подвеса:

$$q_{C02} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -C_{02} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определение собственных частот колебаний системы. В выражении для собственной функции $X_{ki}(x)$ неизвестна величина λ_{ki} — волновое число. Оно связано с круговой частотой колебания ω_i выражением

$$\lambda_{ki} = \sqrt[4]{\frac{\rho_k F_k \omega_i^2}{E_k J_k}},$$

где ω_i — круговая частота колебаний системы, соответствующая i -й гармонике.

Так как составной стержень — единая механическая система, то круговые частоты i -й гармоник колебаний для всех составных участков одинаковы. Другими словами ω_i не зависит от номера составного участка. Определим значения круговых частот ω_i .

Для этого вернемся к выражению (20.42).

Введем обозначение: $q_{0,3,i} = q_{2,3,2} q_{C02} q_{1,2,i} q_{C01} q_{0,1,i}$.

Тогда выражение (20.42) примет вид:

$$\begin{bmatrix} U_{13i} \\ \Theta_{13i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = q_{0,3,i} \begin{bmatrix} U_{01i} \\ \Theta_{01i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Векторное уравнение можно переписать в виде:

$$u_{13i} = q_{0,3,i}(1,1) u_{0,1,i} + q_{0,3,i}(1,2) \Theta_{0,1,i};$$

$$\Theta_{13i} = q_{0,3,i}(2,1) u_{0,1,i} + q_{0,3,i}(2,2) \Theta_{0,1,i};$$

$$0 = q_{0,3,i}(3,1) u_{0,1,i} + q_{0,3,i}(3,2) \Theta_{0,1,i};$$

$$0 = q_{0,3,i}(4,1) u_{0,1,i} + q_{0,3,i}(4,2) \Theta_{0,1,i}.$$

Из 3-го уравнения системы получим

$$\Theta_{01i} = -u_{01i} \frac{q_{0,3,i}(3,1)}{q_{0,3,i}(3,2)}.$$

Выражение для Θ_{01i} подставим в уравнение (20.36):

$$0 = u_{01i} \left(q_{0,3,i}(4,1) - q_{0,3,i}(4,2) \frac{q_{0,3,i}(3,1)}{q_{0,3,i}(3,2)} \right).$$

Так как в общем случае $u_{01i} \neq 0$, то

$$q_{0,3,i}(4,1) - q_{0,3,i}(4,2) \frac{q_{0,3,i}(3,1)}{q_{0,3,i}(3,2)} = 0. \quad (20.44)$$

Если в (20.44) заменить

$$\lambda_{ki} = \sqrt[4]{\frac{\rho_k F_k \omega_i^2}{E_k J_k}}, \quad (20.45)$$

то получится трансцендентное уравнение с одной неизвестной ω_1 .

Уравнение (20.44) имеет бесконечное множество решений. Это означает, что в колебаниях данной механической системы присутствует бесконечное количество гармоник. Однако на практике ощутимый вклад в колебательное движение вносят лишь первые 4 — 5 гармоник. Поэтому необходимо найти лишь 4 — 5 корней уравнения (20.44). Метод численного решения уравнения (20.44) изложен в работе [20]. Относительный вклад каждой из пяти гармоник проиллюстрирован на графиках в разд. 20.2.4.

Нулевой корень уравнения (20.44) $\omega_0 = 0$ соответствует движению стержня как абсолютно жесткого тела под действием внешних сил.

Амплитуды параметров колебаний в граничных сечениях участков стержня. Амплитуды колебаний в начале второго участка стержня:

$$\left. \begin{aligned} u_{02i} &= q_{0,1,ci}(1,1) u_{01i} + q_{0,1,ci}(1,2) \Theta_{01i}; \\ \Theta_{02i} &= q_{0,1,ci}(2,1) u_{01i} + q_{0,1,ci}(2,2) \Theta_{01i}; \\ M_{02i} &= q_{0,1,ci}(3,1) u_{01i} + q_{0,1,ci}(3,2) \Theta_{01i}; \\ Q_{02i} &= q_{0,1,ci}(4,1) u_{01i} + q_{0,1,ci}(4,2) \Theta_{01i}. \end{aligned} \right\} \quad (20.46)$$

Амплитуды колебаний в начале третьего участка:

$$\left. \begin{aligned} u_{03i} &= q_{0,2,ci}(1,1) u_{01i} + q_{0,2,ci}(1,2) \Theta_{01i}; \\ \Theta_{03i} &= q_{0,2,ci}(2,1) u_{01i} + q_{0,2,ci}(2,2) \Theta_{01i}; \\ M_{03i} &= q_{0,2,ci}(3,1) u_{01i} + q_{0,2,ci}(3,2) \Theta_{01i}; \\ Q_{03i} &= q_{0,2,ci}(4,1) u_{01i} + q_{0,2,ci}(4,2) \Theta_{01i}, \end{aligned} \right\} \quad (20.47)$$

где

$$\begin{aligned} q_{01ci} &= q_{c01} q_{01i}; \\ q_{02ci} &= q_{c02} q_{12i} q_{c01} q_{01i}; \\ \Theta_{01i} &= - u_{01i} \frac{q_{0,3,i}(3,1)}{q_{0,3,i}(3,2)} = u_{01i} C_i; \\ C_i &= - \frac{q_{0,3,i}(3,1)}{q_{0,3,i}(3,2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, собственные функции изгибных колебаний на трех участках имеют вид:

1-й участок:

$$\begin{aligned} X_{1i}(x) &= u_{01i} S_{1i}(x) + u_{01i} \frac{C_i}{\lambda_{1i}} T_{1i}(x) = \\ &= u_{01i} \left(S_{1i}(x) + \frac{C_i}{\lambda_{1i}} T_{1i}(x) \right) = u_{01i} \dot{X}_{1i}(x), \end{aligned}$$

где $\dot{X}_{1i}(x) = S_{1i}(x) + \frac{C_i}{\lambda_{1i}} T_{1i}(x);$

2-й участок:

$$X_{2i}(x) = u_{02i} S_{2i}(x) + \frac{\Theta_{02i}}{\lambda_{2i}} T_{2i}(x) +$$

$$+ \frac{M_{02i}}{E_2 J_2 \lambda_{2i}^2} U_{2i}(x) + \frac{Q_{02i}}{E_2 J_2 \lambda_{2i}^3} V_{2i}(x);$$

3-й участок:

$$X_{3i}(x) = u_{03i} S_{3i}(x) + \frac{\Theta_{03i}}{\lambda_{3i}} T_{3i}(x) + \\ + \frac{M_{03i}}{E_3 J_3 \lambda_{3i}^2} U_{3i}(x) + \frac{Q_{03i}}{E_3 J_3 \lambda_{3i}^3} V_{3i}(x).$$

Так как круговые частоты ω_i , а значит, и волновые числа λ_{ki} нам уже известны, то с учетом выражений (20.46) и (20.47), собственные функции X_{1i} , X_{2i} , X_{3i} найдены с точностью до величины u_{01i} — амплитуды смещения сечения с координатой $x = 0$ первого участка стержня. Причем собственные функции могут быть представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} X_{1i}(x) &= u_{01i} \dot{X}_{1i}(x); \\ X_{2i}(x) &= u_{01i} \dot{X}_{2i}(x); \\ X_{3i}(x) &= u_{01i} \dot{X}_{3i}(x), \end{aligned} \right\} \quad (20.48)$$

где $\dot{X}_{1i}(x)$, $\dot{X}_{2i}(x)$, $\dot{X}_{3i}(x)$ — функции координаты x с известными параметрами.

Возвращаясь к выражению (20.37), напомним выражение для свободных колебаний стержня на k -м участке:

$$u_k(x, t) \equiv \sum_{i=1}^5 u_{01i} \dot{X}_{1i}(x) \sin(\omega_i t + \beta_i). \quad (20.49)$$

Величины параметров u_{01i} и β_i могут быть определены при рассмотрении механической системы в момент времени, соответствующий началу колебаний $t = 0$ (решение подробно рассматривается в работах В.В. Кучинского). В нашем случае влияние свободных колебаний на работу системы пренебрежимо мало по сравнению с вкладом, вносимым вынужденными колебаниями. Это связано с относительно боль-

шими величинами сил, действующих со стороны механизма АКУ и малыми значениями начальных упругих деформаций в системе.

Перейдем теперь к решению задачи о вынужденных колебаниях отделяемого изделия.

20.2.2.3. Вынужденные изгибные колебания отделяемого изделия

Вынужденные изгибные колебания изделия описываются уравнением:

$$a_k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q_k(x, t). \quad (20.50)$$

Решение уравнения (20.50) будем искать в виде:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} X_{ki}(x) \varphi_i(t), \quad (20.51)$$

где $X_{ki}(x)$ — собственная функция, которая найдена нами на предыдущем этапе решения. Таким образом, необходимо определить функцию $\varphi_i(t)$.

Для этого потребуется использовать свойство ортогональности собственных функций $X_{ki}(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \rho_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki} X_{kj} dx &= 0; \\ \sum_{k=1}^3 E_k J_k \int_0^{l_k} X_{ki}^{IV} X_{kj} dx &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20.52)$$

где

$$X_{ki}^{IV}(x) = \frac{d^4 X_{ki}(x)}{dx^4}; \quad i \neq j.$$

20.2.2.3.1. Доказательство свойства ортогональности собственных функций

Исследуем уравнение: $X_{ki}^{IV}(x) = \lambda_{ki}^4 X_{ki}$.

Умножим обе части этого равенства на $E_k J_k$, а также на X_{kj} — собственную функцию j -й формы колебаний и проинтегрируем уравнение по длине k -го участка стержня:

$$\begin{aligned} \int_0^{l_k} E_k J_k X_{kj} X_{ki}^{IV} dx &= \int_0^{l_k} E_k J_k \lambda_{ki}^4 X_{ki} X_{kj} dx; \\ E_k J_k ([X_{ki}''' X_{kj}]_0^{l_k} - [X_{ki}'' X_{kj}']_0^{l_k} + \int_0^{l_k} X_{ki}'' X_{kj}'' dx) &= \\ &= E_k J_k \int_0^{l_k} \lambda_{ki}^4 X_{ki} X_{kj} dx. \end{aligned} \quad (20.53)$$

Сложим соответствующие выражения для всех участков стержня:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 E_k J_k ([X_{ki}''' X_{kj}]_0^{l_k} - [X_{ki}'' X_{kj}']_0^{l_k} + \int_0^{l_k} X_{ki}'' X_{kj}'' dx) &= \\ &= \sum_{k=1}^3 E_k J_k \int_0^{l_k} \lambda_{ki}^4 X_{ki} X_{kj} dx. \end{aligned}$$

Проведем то же с j -й формой собственной функции: $X_{kj}^{IV} = \lambda_{kj}^4 X_{kj}$, но теперь умножим уравнение на X_{ki} :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 E_k J_k ([X_{kj}''' X_{ki}]_0^{l_k} - [X_{kj}'' X_{ki}']_0^{l_k} + \int_0^{l_k} X_{kj}'' X_{ki}'' dx) &= \\ &= \sum_{k=1}^3 E_k J_k \int_0^{l_k} \lambda_{kj}^4 X_{kj} X_{ki} dx. \end{aligned}$$

Из первого уравнения вычтем второе:

$$\sum_{k=1}^3 E_k J_k ([X_{ki}''' X_{kj}]_0^l - [X_{kj}''' X_{ki}]_0^l) - \sum_{k=1}^3 E_k J_k ([X_{ki}'' X_{kj}']_0^l - [X_{kj}'' X_{ki}']_0^l) -$$

$$- [X_{kj}'' X_{ki}]_0^l) = \sum_{k=1}^3 E_k J_k (\lambda_{ki}^4 - \lambda_{kj}^4) \int_0^l X_{ki} X_{kj} dx. \quad (20.54)$$

Для дальнейшего доказательства потребуются следующие свойства собственных функций в смежных сечениях участков:

$$X_{k-1i}(l_{k-1}) = X_{ki}(0);$$

$$X'_{k-1i}(l_{k-1}) = X'_{ki}(0);$$

$$E_{k-1} J_{k-1} X''_{k-1i}(l_{k-1}) = E_k J_k X''_{ki}(0);$$

$$E_{k-1} J_{k-1} X'''_{k-1i}(l_{k-1}) = E_k J_k X'''_{ki}(0),$$

где $k = 2, 3$.

Первые два свойства вытекают из условия неразрывности стержня в местах стыковки участков. Третье и четвертое условия объясняются тем, что выражения в левой и правой частях равенств определяют внутренние силовые факторы в одном и том же сечении стержня.

Кроме того, учитывая, что концы стержня не закреплены, имеем:

$$X''_{1i}(0) = X'''_{1i}(0) = X''_{3i}(l_3) = X'''_{3i}(l_3) = 0.$$

Тогда выражения в левой части (20.54) обнуляются. Действительно:

$$\sum_{k=1}^3 E_k J_k ([X_{ki}''' X_{kj}]_0^l = X_{1j}(l_1) [E_1 J_1 X'''_{1i}(l_1) - E_2 J_2 X'''_{2i}(0)] +$$

$$+ X_{2j}(l_2) [E_2 J_2 X'''_{2i}(l_2) - E_3 J_3 X'''_{3i}(0)] = 0.$$

Аналогично

$$\sum_{k=1}^3 E_k J_k [X_{kj}''' X_{ki}]_0^l = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 E_k J_k [X_{ki}'' X_{kj}']_0^l &= X_{1j}'(l_1) [E_1 J_1 X_{1i}''(l_1) - E_2 J_2 X_{2i}''(0)] + \\ &+ X_{2j}'(l_2) [E_2 J_2 X_{2i}''(l_2) - E_3 J_3 X_{3i}'''(0)] + E_3 J_3 X_{3i}''(l_3) X_{3j}'(l_3) - \\ &- E_1 J_2 X_{1i}''(0) X_{1j}'(0) = 0. \end{aligned}$$

Точно так же

$$\sum_{k=1}^3 E_k J_k [X_{kj}'' X_{ki}']_0^l = 0.$$

Окончательно из уравнения (20.54) имеем:

$$\sum_{k=1}^3 E_k J_k (\lambda_{ki}^4 - \lambda_{kj}^4) \int_0^{l_k} X_{ki} X_{kj} dx = 0;$$

$$\lambda_{ki}^4 = \frac{\rho_k F_k}{E_k J_k} \omega_i^2;$$

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \sum_{k=1}^3 \rho_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki} X_{kj} dx = 0.$$

При $i \neq j$:
$$\sum_{k=1}^3 \rho_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki} X_{kj} dx = 0.$$

Выражение (20.53) преобразуем к виду:

$$\sum_{k=1}^3 \int_0^{l_k} E_k J_k X_{ki}^{IV} X_{kj} dx = \omega_i^2 \sum_{k=1}^3 \rho_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki} X_{kj} dx.$$

Отсюда следует:

$$\sum_{k=1}^3 E_k J_k \int_0^{l_k} X_{ki}^{IV} X_{kj} dx = 0.$$

Таким образом, свойство ортогональности (20.52) доказано.

20.2.2.3.2. Определение функции $\varphi_i(t)$ вынужденных колебаний отделяемого изделия

Вернемся к уравнению (20.35):

$$E_k J_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho_k F_k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x_k, t).$$

Решение ищем в виде

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} X_{ki} \varphi_i(t). \quad (20.55)$$

Подставим (20.55) в уравнение (20.35):

$$E_k J_k \sum_{i=1}^{\infty} X_{ki}^{IV}(x) \varphi_i(t) + \rho_k F_k \sum_{i=1}^{\infty} X_{ki}(x) \ddot{\varphi}_i(t) = q(x_k, t),$$

где $\ddot{\varphi}_i(t) = \frac{d^2 \varphi_i(t)}{dt^2}$; $X_{ki}^{IV}(x) = \frac{d^4 X_{ki}(x)}{dx^4}$.

Домножим обе части равенства на X_{kj} и проинтегрируем по длине k -го участка стержня. Далее просуммируем соответствующие выражения для трех участков стержня:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\varphi_i(t) \sum_{k=1}^3 E_k J_k \int_0^{l_k} X_{ki}^{IV} X_{kj} dx + \ddot{\varphi}_i(t) \sum_{k=1}^3 \rho_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki} X_{kj} dx \right] = \\ = \sum_{k=1}^3 \int_0^{l_k} q(x_k, t) X_{kj} dx. \end{aligned}$$

Используем свойство ортогональности (20.52). Из всей суммы по i в левой части равенства отличен от нуля только тот член, для которого $i = j$. Тогда:

$$\begin{aligned} \varphi_i(t) \sum_{k=1}^3 E_k J_k \int_0^{l_k} X_{ki}^{IV} X_{ki} dx + \ddot{\varphi}_i(t) \sum_{k=1}^3 \rho_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki}^2 dx = \\ = \sum_{k=1}^3 \int_0^{l_k} q(x_k, t) X_{ki} dx; \\ \ddot{\varphi}_i(t) + \frac{\sum_{k=1}^3 E_k J_k \int_0^{l_k} X_{ki}^{IV} X_{ki} dx}{\sum_{k=1}^3 \rho_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki}^2 dx} \varphi_i(t) = \frac{\sum_{k=1}^3 \int_0^{l_k} q(x_k, t) X_{ki} dx}{\sum_{k=1}^3 \rho_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki}^2 dx}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $X_{ki}(x)$ в решении для вынужденных колебаний совпадает с $X_{ki}(x)$ для свободных колебаний, используем выражение (20.38):

$$X_{ki}^{IV} = \lambda_{ki}^4 X_{ki} = \frac{\rho_k F_k}{E_k J_k} \omega_i^2 X_{ki}. \quad (20.56)$$

Подставим (20.56) в последнее уравнение. Получим:

$$\ddot{\varphi}_i(t) + \omega_i^2 \varphi_i(t) = \frac{\sum_{k=1}^3 \int_0^{l_k} q(x_k, t) X_{ki} dx}{\sum_{k=1}^3 \rho_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki}^2 dx}.$$

Введем обозначение:

$$q_i(t) = \frac{\sum_{k=1}^3 \int_0^{l_k} q(x_k, t) X_{ki} dx}{\sum_{k=1}^3 \rho_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki}^2 dx}. \quad (20.57)$$

Тогда

$$\ddot{\varphi}_i(t) + \omega_i^2 \varphi_i(t) = q_i(t), \quad (20.58)$$

т.е. получено обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с правой частью.

Вычислим значение правой части дифференциального уравнения вынужденных колебаний (20.57).

Определение значения внешнего силового фактора на k -м участке стержня ($k = 1, 2, 3$). В числитель выражения (20.57) входит значение $q(x_k, t)$ — внешней распределенной нагрузки, действующей на k -й участок стержня. В нашем случае на изделие действуют: распределенная аэродинамическая нагрузка — $q_a(x_k, t)$, распределенная сила инерции $q_u(x_k, t) \approx \rho_k F_k g_y$, где g_y — перегрузка изделия по оси y (при $n_y = 0$, $g_y = g = 9,81 \text{ м/с}^2$).

Кроме того, на первом и на втором участках действуют сосредоточенные силы P_1 и P_2 со стороны механизма АКУ. Представим сосредоточенные силы в виде распределенных, используя для этого специальную дельта-функцию $\delta(x - x_k)$.

Дельта-функция обладает следующими свойствами:

$$\delta(x - x_k) = \begin{cases} 0, & x < x_k, \quad x > x_k; \\ \infty, & x = x_k; \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_k) dx = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_k) f(x) dx = f(x_k).$$

Силу P_1 условно будем считать распределенной по первому участку, P_2 — по второму. Тогда:

$$q_{P_1}(x_1, t) = P_1 \delta(x - l_1);$$

$$q_{P_2}(x_2, t) = P_2 \delta(x - l_2).$$

Теперь можно вычислить величину в числителе выражения (20.57):

$$\sum_{k=1}^3 \int_0^{l_k} q(x_k, t) X_{ki} dx = \int_0^{l_k} (q_a(x_1, t) + q_u(x_1, t)) X_{1i} dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{l_1} P_1 \delta(x - l_1) X_{1i}(x) dx + \int_0^{l_2} (q_a(x_2, t) + q_u(x_2, t)) X_{2i} dx + \\
& + \int_0^{l_2} P_2 \delta(x - l_2) X_{2i}(x) dx + \int_0^{l_3} (q_a(x_3, t) + q_u(x_3, t)) X_{3i} dx = \\
& = \int_0^{l_1} (q_a(x_1, t) + \rho_1 F_1 g_y) X_{1i} dx + \int_0^{l_2} (q_a(x_2, t) + \rho_2 F_2 g_y) X_{2i} dx + \\
& + \int_0^{l_3} (q_a(x_3, t) + \rho_3 F_3 g_y) X_{3i} dx + P_1 X_{1i}(l_1) + P_2 X_{2i}(l_2). \quad (20.59)
\end{aligned}$$

Вычисление $\int_0^{l_k} X_{ki}^2 dx$ ($k = 1, 2, 3$). Используя преобразования Крылова, получим аналитическое выражение для определения интеграла квадрата собственной функции.

Из выражения (20.39) видно, что $X_{ki} = X_{ki}(x \lambda_{ki})$ (далее индексы k, i для сокращения записи будем опускать).

Возьмем две собственные функции $X = X(x \lambda)$ и $X_n = X_n(x \lambda_n)$; здесь функция X_n отличается от X тем, что в ней вместо λ стоит другое число λ_n .

Используя (20.38), получаем:

$$X^{IV} - \lambda^4 X = 0; \quad X_n^{IV} - \lambda_n^4 X_n = 0.$$

Домножим первое уравнение на X_n , а второе на X и проинтегрируем уравнения по длине k -го участка:

$$\lambda^4 \int_0^{l_k} X X_n dx = \int_0^{l_k} X^{IV} X_n dx = [X''' X_n]_0^{l_k} - [X'' X_n']_0^{l_k} + \int_0^{l_k} X'' X_n'' dx;$$

$$\lambda_n^4 \int_0^{l_k} X_n X dx = \int_0^{l_k} X_n^{IV} X dx = [X_n''' X]_0^{l_k} - [X_n'' X']_0^{l_k} + \int_0^{l_k} X_n'' X'' dx.$$

Вычтем из 1-го выражения 2-е:

$$(\lambda^4 - \lambda_n^4) \int_0^{l_k} X X_n dx = [X''' X_n - X_n''' X - X'' X' + X_n'' X']_0^{l_k};$$

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow \lambda} \int_0^{l_k} X X_n dx = \lim_{\lambda_n \rightarrow \lambda} \frac{[X''' X_n - X_n''' X - X'' X' + X_n'' X']_0^{l_k}}{(\lambda^4 - \lambda_n^4)}.$$

Для раскрытия неопределенности в правой части найдем предел частного производного числителя и знаменателя по λ_n .

Но прежде обозначим: $z = \lambda x$; $z_n = \lambda_n x$.

Тогда:

$$X' = \frac{\partial X(\partial x)}{\partial x} = \frac{dx(z)}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \partial X_z', \quad \text{где} \quad X_z' = \frac{dx(z)}{dz};$$

$$(X_n)_{\lambda_n}' = \frac{\partial X_n(\lambda_n x)}{\partial \lambda_n} = \frac{dx_n(z_n)}{dz_n} \frac{\partial z_n}{\partial \lambda_n} = x \frac{dx_n(z_n)}{dz_n};$$

$$\begin{aligned} \int_0^{l_k} X^2 dx &= \lim_{\lambda_n \rightarrow \lambda} \left\{ \left[\left(\lambda^3 \frac{\partial^3 X(z)}{\partial z^3} X_n - \lambda_n^3 \frac{d^3 X_n}{dz_n^3} X - \lambda^2 \lambda_n \frac{d^2 X}{dz^2} \frac{dX_n}{dz_n} + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \lambda_n^2 \frac{d^2 X_n}{dz_n^2} \lambda \frac{dX}{dz} \right)' \right]_{\lambda_n} \Big/ (\lambda^4 - \lambda_n^4)_{\lambda_n}' \Big\} = \left[\lambda^3 X_z''' x X_z' - 3\lambda^2 X_z''' X - \right. \\ &- \left. \lambda^3 X_z^{IV} x X - \lambda^2 X_z'' X_z' - \lambda^3 X_z'' x X_z'' + 2\lambda^2 X_z'' X_z' + \lambda^3 x X_z''' X_z' \right]_0^{l_k} / (-4\lambda^3) = \\ &= \left[\frac{1}{4\lambda} \left(3X_z''' X + \lambda_x X^2 - X_z'' X_z' - 2\lambda_x X_z''' X_z' + \lambda_x X_z''^2 \right) \right]_0^{l_k}. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\int_0^{l_k} X_{ki}^2 dx = \left[\frac{1}{4\lambda_{ki}} \left(3X_{zki}''' X_{ki} + \lambda_{kix} X_{ki}^2 - X_{zki}'' X_{zki}' - \right. \right.$$

$$- 2\lambda_{kix} X_{zki}''' X_{zki}' + \lambda_{kix} X_{zki}''^2 \Big) \Big]_0^{l_k}. \quad (20.60)$$

Используя выражения (20.46) — (20.48), вычисляя соответствующие производные собственных функций и подставляя их в (20.60), получим искомые значения $\int_0^{l_k} X_{ki}^2 dx$, ($k = 1, 2, 3$).

Подставив полученные по формулам (20.59), (20.60) значения в выражение (20.57), определим правую часть $q_i(t)$ дифференциального уравнения вынужденных колебаний стержня.

Два способа решения дифференциального уравнения (20.58). Способ решения дифференциального уравнения (20.58) зависит от вида его правой части (20.57). Если величины внешних силовых факторов известны полностью до начала решения задачи (известны законы $q_a(x_k, t)$, $q_u(x_k, t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, где $t \in [0; t_{\max}]$, $t_{\max}$ — время окончания отделения, под которым понимается время разрыва механической связи изделия с механизмом АКУ, то для решения можно использовать интеграл Дюамеля:

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t q_i(t') \sin \omega_i(t - t') dt'. \quad (20.61)$$

Однако в нашем случае величины сил $P_1(t)$, $P_2(t)$ зависят от координат положения точек подвеса изделия. Поэтому дифференциальное уравнение (20.58) в данном случае не может быть сведено к интегральному уравнению (20.61). Таким образом, уравнение (20.58) необходимо решать одним из численных методов. При этом каждой i -й частоте колебаний изделия соответствует свое уравнение вида (20.58). Если учитывать в решении 5 первых гармоник колебаний, то на каждом шаге необходимо численно решать 5 дифференциальных уравнений 2-го порядка.

В знаменатель выражения, стоящего в правой части (20.58), входит неизвестный параметр u_{0i} .

Преобразуя уравнение (20.58) к виду:

$$\ddot{\varphi}_i(t) + \omega_i \dot{\varphi}_i(t) = \dot{q}_i(t), \quad (20.62)$$

где $\dot{\phi}_i(t) = \phi_i(t) u_{01i}$; $\dot{q}_i(t) = q_i(t) u_{01i}$.

В выражении $\dot{q}_i(t)$ неизвестный параметр u_{01i} сокращается.

Решая (20.62), найдем $\dot{\phi}_i(t)$. Тогда

$$\phi_i(t) = \dot{\phi}_i(t) \frac{1}{u_{01i}}. \quad (20.63)$$

Подставив (20.48) и (20.63) в выражение (20.51), получим:

$$u(x, t) = \sum_i u_{01i} \dot{X}_{ki}(x) \frac{1}{u_{01i}} \dot{\phi}_i(t) = \sum_i \dot{X}_{ki}(x) \dot{\phi}_i(t).$$

Таким образом задача об изгибных колебаниях изделия решена.

20.2.2.4. Продольные колебания системы

Вывод дифференциального уравнения продольных колебаний стержня в общих чертах аналогичен выводу уравнения (20.35) для изгибных колебаний. Поэтому здесь он не приводится. Дифференциальное уравнение продольных колебаний имеет вид:

$$-E_k F_k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \rho_k F_k \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = q^*(x_k, t). \quad (20.64)$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных.

20.2.2.4.1. Решение дифференциального уравнения продольных колебаний

Как и в случае изгибных колебаний, применив метод нормальных форм для решения уравнения (20.64), получим общий вид решения:

$$u^*(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_{ki}^*(x) \varphi_i^*(t);$$

вид решения для свободных колебаний:

$$u^*(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_{ki}^*(x) \sin(\omega_i^* t + \beta_i^*).$$

Подставив это выражение в (20.64) и считая, что $q^*(x_k, t) = 0$ для свободных колебаний, получим:

$$X_{ki}^{*''}(x) + \lambda_{ki}^{*2} X_{ki}^* = 0, \quad (20.65)$$

где

$$\lambda_{ki}^* = \omega_i^* / \sqrt{E_k / \rho_k}.$$

Решением уравнения (20.65) будет:

$$X_{ki}^*(x) = B_{1ki} \cos \lambda_{ki}^* x + B_{2ki} \sin \lambda_{ki}^* x. \quad (20.66)$$

Собственные продольные колебания системы. Определим физический смысл коэффициентов B_{1ki} , B_{2ki} собственной функции (20.66). Для этого используем известное из сопротивления материалов соотношение между деформацией $\varepsilon = \frac{\partial u^*(x, t)}{\partial x}$ и упругой силой N в сечении x стержня:

$$N(x, t) = E_k F_k \varepsilon = E_k F_k u'^*(x, t).$$

Тогда для i -й гармоники собственных колебаний имеем

$$\left. \begin{aligned} U_i^* &= \left(B_{1ki} \cos \lambda_{ki}^* x + B_{2ki} \sin \lambda_{ki}^* x \right) \sin \left(\omega_i^* t + \beta_i \right); \\ N_i &= E_k F_k \lambda_{ki}^* \left(-B_{1ki} \sin \lambda_{ki}^* x + B_{2ki} \cos \lambda_{ki}^* x \right) \times \\ &\quad \times \sin \left(\omega_i^* t + \beta_i \right); \end{aligned} \right\} \quad (20.67)$$

где N_i — упругое усилие, возникающее в сечении стержня при его колебаниях на i -й частоте.

Найдем значения этих выражений при $x = 0$:

$$U_i^*(0, t) = B_{1ki} \sin(\omega_i^* t + \beta_i) = U_{0ki} \sin(\omega_i^* t + \beta_i);$$

$$N_i(0, t) = B_{2ki} E_k F_k \lambda_{ki}^* \sin(\omega_i^* t + \beta_i) = N_{0ki} \sin(\omega_i^* t + \beta_i).$$

Здесь U_{0ki} , N_{0ki} — амплитудные значения смещения и упругой силы в сечении $x = 0$ k -го участка стержня.

Тогда $B_{1ki} = U_{0ki}$;

$$B_{2ki} = \frac{N_{0ki}}{E_k F_k \lambda_{ki}^*};$$

$$\left. \begin{aligned} U_{ki}^*(x) = X_{ki}^*(x) &= U_{0ki} \cos \lambda_{ki}^* x + \frac{N_{0ki}}{E_k F_k \lambda_{ki}^*} \sin \lambda_{ki}^* x, \\ N_{ki}(x) &= E_k F_k X_{ki}^{*'}(x) = -E_k F_k \lambda_{ki}^* U_{0ki} \sin \lambda_{ki}^* x + \\ &+ N_{0ki} \cos \lambda_{ki}^* x, \end{aligned} \right\} \quad (20.68)$$

где U_{ki}^* , N_{ki} — амплитуды параметров колебаний в сечении k -го участка стержня.

Введем следующие матричные обозначения:

вектор параметров в сечении $x = 0$:

$$\begin{bmatrix} U_{ki}^* \\ N_{ki} \end{bmatrix},$$

вектор параметров в сечении $x = l_k$:

$$\begin{bmatrix} U_{lki}^* \\ N_{lki} \end{bmatrix}.$$

Тогда, используя (20.68) и заменяя везде x на l_k , запишем:

$$\begin{bmatrix} U_{lki}^* \\ N_{lki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_{ki}^* l_k & \frac{1}{E_k F_k \lambda_{ki}^*} \sin \lambda_{ki}^* l_k \\ -E_k F_k \lambda_{ki}^* \sin \lambda_{ki}^* l_k & \cos \lambda_{ki}^* l_k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{0ki}^* \\ N_{0ki} \end{bmatrix}.$$

Обозначим

$$q_{k-1ki}^* = \begin{bmatrix} \cos \lambda_{ki}^* l_k & \frac{1}{E_k F_k \lambda_{ki}^*} \sin \lambda_{ki}^* l_k \\ -E_k F_k \lambda_{ki}^* \sin \lambda_{ki}^* l_k & \cos \lambda_{ki}^* l_k \end{bmatrix}.$$

Теперь можно записать уравнения переноса параметров продольных колебаний с левого конца стрержня на правый. При этом необходимо учесть, что концы стержня свободны, т.е. $N_{01i} = N_{l3i} = 0$:

$$\begin{bmatrix} U_{l3i}^* \\ 0 \end{bmatrix} = q_{23i}^* \times q_{12i}^* \times q_{c01}^* \times q_{01i}^* \begin{bmatrix} U_{01i}^* \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (20.69)$$

где q_{c01}^* — матрица переноса параметров колебаний через передний узел подвеса изделия к механизму АКУ. Задний узел подвеса изделия не оказывает влияния на продольные колебания в связи с особенностями конструкции этого узла.

Определение элементов матрицы переноса q_{c01}^* . При продольных колебаниях изделия в передней точке подвеса возникают силы R_{1z}^* и R_{1z} (см. рис. 20.9). Поэтому запишем:

$$U^+ = U^-;$$

$$N^+ = N^- - R_{1z}^*;$$

$$R_{1z} = C_2 B^{**} \sin \varphi_1 + C_1 A^{**} \cos \varphi_1;$$

$$R_{1z}^* = -C_2 B^{**} \cos \varphi_1 + C_1 A^{**} \sin \varphi_1 + C_3 E^{**},$$

где $B^{**} = U^{-} \cos \varphi_1$ — деформация пружины с жесткостью C_2 ,
 $A^{**} = -U^{-} \sin \varphi_1$ — деформация пружины с жесткостью C_1 ,
 $E^{**} = -U^{-}$ — деформация пружины с жесткостью C_3 ,

$$R_{1z}^{*} = U^{-} (C_2 \cos^2 \varphi_1 + C_1 \sin^2 \varphi_1 + C_3) = -U^{-} C_{01}^{*}.$$

Матрица переноса параметров:

$$q_{c01}^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C_{01}^{*} & 1 \end{bmatrix}.$$

Определение частот колебаний стержня ω_i . Введем обозначение $q_{03i}^{*} = q_{23i}^{*} \times q_{12i}^{*} \times q_{c01}^{*} \times q_{01i}^{*}$. Тогда выражение (20.69) можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} U_{13i}^{*} &= q_{03i}^{*} (1, 1) U_{01i}^{*}; \\ 0 &= q_{03i}^{*} (2, 1) U_{01i}^{*}. \end{aligned} \right\} \quad (20.70)$$

Из последнего уравнения системы (20.70) можно получить уравнение для определения частот ω_i^{*} , если в матрице q_{03i}^{*} заменить λ_{ki}^{*} на его выражение через ω_i^{*} :

$$\lambda_{ki}^{*} = \frac{\omega_i^{*}}{\sqrt{\frac{E_k}{\rho_k}}}.$$

Так как U_{01i}^{*} в общем случае $\neq 0$, то

$$q_{03i}^{*} (2, 1) = 0. \quad (20.71)$$

Здесь (20.71) — трансцендентное уравнение частот ω_i^{*} продольных колебаний стержня. Один из способов определения круговых частот ω_i^{*} из уравнения (20.71) описан в работе [25].

Определение собственных функций X_{1ki}^* ($k = 1, 2, 3$) продольных колебаний стержня. Найдем амплитуды смещения и упругой силы на границах участков.

$$\begin{aligned} U_{02i}^* &= q_{c01}^* \times q_{01i}^*(1, 1) U_{01i}^* = q_{01ci}^*(1, 1) U_{01i}^*; \\ N_{02i}^* &= q_{01ci}^*(2, 1) U_{01i}^*; \\ U_{03i}^* &= q_{02ci}^*(1, 1) U_{01i}^*; \\ N_{03i}^* &= q_{02ci}^*(2, 1) U_{01i}^*, \end{aligned} \quad (20.72)$$

где

$$q_{01ci}^* = q_{c01}^* \times q_{01i}^*; \quad q_{02ci}^* = q_{12i}^* \times q_{c01}^* \times q_{01i}^*.$$

Тогда собственные функции продольных колебаний на первом, втором и третьем участках будут соответственно иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} X_{1i}^*(x) &= U_{01i}^* \cos \lambda_{1i}^* x = U_{01i}^* \dot{X}_{1i}^*(x); \\ X_{2i}^*(x) &= U_{02i}^* \cos \lambda_{2i}^* x + \frac{N_{02i}^*}{E_2 F_2 \lambda_{2i}^*} \sin \lambda_{2i}^* x = U_{01i}^* \dot{X}_{2i}^*(x); \\ X_{3i}^*(x) &= U_{03i}^* \cos \lambda_{3i}^* x + \frac{N_{03i}^*}{E_3 F_3 \lambda_{3i}^*} \sin \lambda_{3i}^* x = U_{01i}^* \dot{X}_{3i}^*(x). \end{aligned} \right\} \quad (20.73)$$

Подставляя в последние уравнения параметры U_{02i}^* , N_{02i}^* , U_{03i}^* , N_{03i}^* , видим, что функции $\dot{X}_{1i}^*$, $\dot{X}_{2i}^*$, $\dot{X}_{3i}^*$ содержат уже известные параметры.

Таким образом, собственные функции определены нами с точностью до одного неизвестного параметра U_{01i}^* .

Этот параметр может быть определен из рассмотрения деформированного состояния системы при $t = 0$ (в момент начала колебаний). В нашем же случае влияние начальных деформаций, а значит, и собственных колебаний системы на общий

процесс колебаний под действием внешних нагрузок мало. Поэтому сразу перейдем к рассмотрению вынужденных колебаний системы.

20.2.2.4.2. Вынужденные продольные колебания системы

Как и в случае изгибных колебаний решение (20.64) будем искать в форме $U^*(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_{ki}^*(x) \varphi_i^*(t)$.

Для функции $X_{ki}^*(t)$ также может быть доказано свойство ортогональности:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \rho_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki}^* X_{kj}^* dx &= 0; \\ \sum_{k=1}^3 E_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki}^{''*} X_{kj}^* dx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.74)$$

Доказательство (20.74) аналогично доказательству (20.52).

Подставим $U^*(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_{ki}^*(x) \varphi_i^*(t)$ в (20.64):

$$- E_k F_k \sum_{i=1}^{\infty} X_{ki}^{''*} \varphi_i^*(t) + \rho_k F_k \sum_{i=1}^{\infty} X_{ki}^*(x) \ddot{\varphi}_i^*(t) = q^*(x_k, t).$$

Домножим обе части равенства на X_{kj}^* и проинтегрируем по длине k -го участка стержня. Просуммируем полученные выражения для всех трех участков стержня.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[- \varphi_i^*(t) \sum_{k=1}^3 E_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki}^{''*} X_{kj}^* dx + \right.$$

$$+ \ddot{\varphi}_i^*(t) \sum_{k=1}^3 \rho_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki}^* X_{kj}^* dx \left] = \sum_{k=1}^3 \int_0^{l_k} q^*(x_k, t) X_{kj} dx.$$

Используя свойство ортогональности (20.74), получим:

$$\begin{aligned} & - \varphi_i^*(t) \sum_{k=1}^3 E_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki}''^* X_{ki}^* dx + \\ & + \ddot{\varphi}_i^*(t) \sum_{k=1}^3 \rho_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki}^{2*} dx = \sum_{k=1}^3 \int_0^{l_k} q^*(x_k, t) X_{kj} dx. \end{aligned}$$

Последнее уравнение преобразуем, используя:

$$X_{ki}''^* = - \frac{\rho_k}{E_k} \omega_i^{2*} X_{ki}^*.$$

Уравнение вынужденных продольных колебаний имеет вид:

$$\ddot{\varphi}_i^*(t) + \omega_i^{2*} \varphi_i^*(t) = \frac{\sum_{k=1}^3 \int_0^{l_k} q^*(x_k, t) X_{ki} dx}{\sum_{k=1}^3 \rho_k F_k \int_0^{l_k} X_{ki}^{2*} dx}. \quad (20.75)$$

Определение внешнего силового фактора $q^*(x_k, t)$. Из распределенных по длине стержня внешних силовых факторов на продольные колебания оказывает влияние распределенная сила инерции $q_u^*(x_k, t) \approx \rho_k F_k g_x$, где g_x — перегрузка изделия по оси x .

Кроме того, в сечении $x = 0$ 1-го участка действует сосредоточенная аэродинамическая сила F_x , а в сечении $x = l_1$ действует сила P_1^* со стороны механизма АКУ.

Используя δ -функцию, запишем:

$$q_{P_1}^*(x_1, t) = P_1^* \delta(x - l_1);$$

$$q_{F_x}(x_1, t) = F_x \delta(x - 0).$$

Тогда

$$q^*(x_1, t) = \rho_1 F_1 g_x + P_1^* \delta(x - l_1) + F_x \delta(x - 0);$$

$$q^*(x_2, t) = \rho_2 F_2 g_x;$$

$$q^*(x_3, t) = \rho_3 F_3 g_x;$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \int_0^{l_k} q^*(x_k, t) X_{ki}^* dx &= \rho_1 F_1 g_x \int_0^{l_1} X_{1i}^* dx + P_1^* X_{1i}^*(l_1) + \\ &+ F_x X_{1i}^*(0) + \rho_2 F_2 g_x \int_0^{l_2} X_{2i}^* dx + \rho_3 F_3 g_x \int_0^{l_3} X_{3i}^* dx. \end{aligned}$$

Вычисление $\int_0^{l_k} X_{ki}^{*2} dx$ ($k = 1, 2, 3$). Используемые ниже преобразования подобны ранее сделанным вычислениям $\int_0^{l_k} x^2 dx$ ($k = 1; 2; 3$) (см. п. 20.2.2.3.2). Из уравнения (20.65) имеем, опуская индексы k, i и $*$:

$$X'' + \lambda^2 X = 0; \quad X_n'' + \lambda_n^2 X_n = 0;$$

$$X'' X_n'' + \lambda_n^2 X X_n = 0; \quad X_n'' X = \lambda_n^2 X_n X = 0;$$

$$\lambda^2 \int_0^{l_k} X X_n dx = - \int_0^{l_k} X'' X_n dx = - \left[X' X_n \right]_0^{l_k} + \int_0^{l_k} X' X_n' dx;$$

$$\lambda_n^2 \int_0^{l_k} X_n X dx = - \int_0^{l_k} X_n'' X dx = - \left[X_n' X \right]_0^{l_k} + \int_0^{l_k} X_n' X' dx;$$

$$\left(\lambda^2 - \lambda_n^2\right) \int_0^{l_k} X_n X \, dx = \left[X_n' X \right]_0^{l_k} - \left[X' X_n \right]_0^{l_k};$$

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow \lambda} \int_0^{l_k} X X_n \, dx = \lim_{\lambda_n \rightarrow \lambda} \frac{\left[X_n' X - X' X_n \right]_0^{l_k}}{\lambda^2 - \lambda_n^2}.$$

Обозначим $z = \lambda x$; $z_n = \lambda_n x$; $\frac{dX(z)}{dz} = X'_z$.

Тогда

$$X' = \frac{dX(z)}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \lambda X'_z; \quad X'_n = \lambda_n (X_n')_z;$$

$$\frac{\partial X_n(\lambda_n x)}{\partial \lambda_n} = (X_n)_{\lambda_n}' = \frac{dX_n(z_n)}{dz_n} \frac{\partial z_n}{\partial \lambda_n} = x (X_n)'_{z_n};$$

$$\int_0^{l_k} X^2 \, dx = \lim_{\lambda_n \rightarrow \lambda} \frac{\left[\left(\lambda_n \frac{dx_n}{dz_n} X - \lambda \frac{dx(z)}{dz} X_n \right)_0^{l_k} \right]_{\lambda_n}'}{\left(\lambda^2 - \lambda_n^2 \right)_{\lambda_n}'}$$

$$= \left[X'_z X + \lambda x X''_z X - \lambda x X'^2_z \right]_0^{l_k} \cdot \left(-\frac{1}{2\lambda} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[x X'^2_z - x X''_z X - \frac{X'_z X}{\lambda} \right]_0^{l_k},$$

или

$$\int_0^{l_k} X^{2*}_{ki} \, dx = \frac{1}{2} \left[x X^{*2}_{zki} - x X^{*''}_{zki} X^*_{zki} - \frac{X^{*'}_{zki} X^*_{ki}}{\lambda^*_{ki}} \right]_0^{l_k}.$$

Используя выражения (20.72), (20.73) и вычисляя их производные по z , легко получить $\int_0^{l_k} X^{2*}_{ki} \, dx$ ($k = 1, 2, 3$).

Таким образом, правая часть (20.75) найдена нами, как и раньше, для изгибных колебаний с точностью до одного неизвестного параметра U_{01i}^* .

Сравнивая (20.58) и (20.75), видим, что уравнения вынужденных изгибных и продольных колебаний одинаковы по виду. Значит все ранее сделанные выкладки можно отнести и к уравнению (20.75).

В итоге задачу о продольных колебаниях системы можно считать решенной.

20.2.3. Упругое крыло самолета-носителя

В данном разделе исследуются упругие свойства крыла самолета-носителя и оценивается их влияние на процесс отделения изделия.

Полагаем, что крыло обладает неабсолютной жесткостью на кручение и изгиб в вертикальной плоскости. Следовательно-

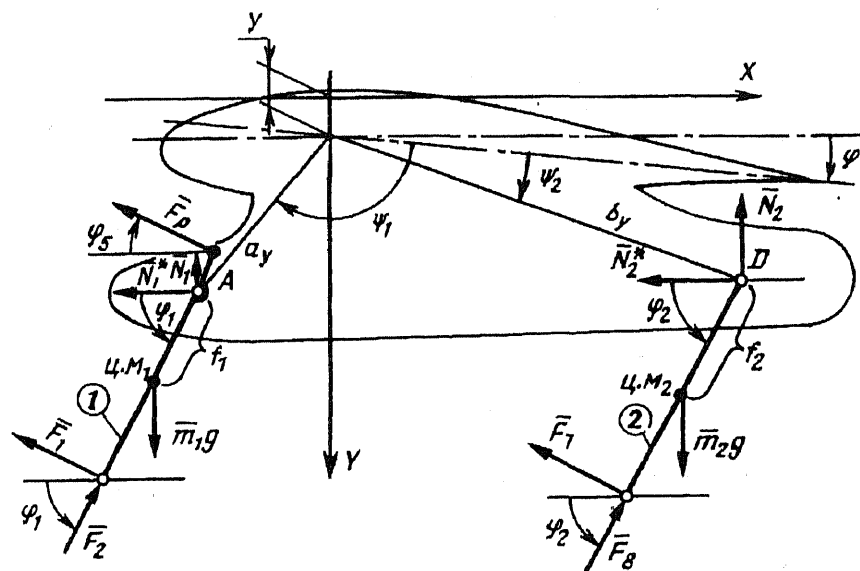


Рис. 20.10

но, каждое сечение крыла может поворачиваться на определенный угол φ вокруг оси Z и перемещаться параллельно оси Y . Нас интересует сечение крыла, в котором размещена установка.

Обозначим: φ — угол поворота этого сечения, y — его перемещение в вертикальной плоскости. Расчетная схема изображена на рис. 20.10.

На схеме показаны только те звенья механизма АКУ, которые непосредственно соединены с крылом. Действия пружин показаны силами $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_7, \bar{F}_8$. Здесь $\bar{F}_p$ — усилие привода, передаваемое звену 1. Массой звеньев 4 и 5 пренебрегаем (см. рис. 20.1).

Найдем осевые усилия, с которыми механизм АКУ воздействует на крыло. Они приложены в точках A и D . Это силы $\bar{N}_1, \bar{N}_1^*, \bar{N}_2, \bar{N}_2^*$.

Для нахождения этих сил рассмотрим уравнения движения центров масс звеньев 1 и 2 в проекциях на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{Y}_{цм_1} &= -F_p \sin(\varphi_5 + \varphi) + m_1 g + N_1 - \\ &\quad - F_1 \cos(\varphi_1 - \varphi) - F_2 \sin(\varphi_1 - \varphi); \\ m_1 \ddot{X}_{цм_1} &= -F_p \cos(\varphi_5 + \varphi) + N_1^* - F_1 \sin(\varphi_1 - \varphi) + \\ &\quad + F_2 \cos(\varphi_1 - \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (20.76)$$

$$\left. \begin{aligned} m_2 \ddot{Y}_{цм_2} &= m_2 g + N_2 - F_7 \cos(\varphi_2 - \varphi) - \\ &\quad - F_8 \sin(\varphi_2 - \varphi); \\ m_2 \ddot{X}_{цм_2} &= N_2^* - F_7 \sin(\varphi_2 - \varphi) + F_8 \cos(\varphi_2 - \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (20.77)$$

Здесь $\ddot{Y}_{цм_1}, \ddot{X}_{цм_1}, \ddot{Y}_{цм_2}, \ddot{X}_{цм_2}$ — вторые производные координат центров масс звеньев 1 и 2. Эти координаты можно найти по формулам:

$$\left. \begin{aligned} Y_{\Pi M_1} &= Y + a_y \sin(\psi_1 + \varphi) + f_1 \sin \varphi_1; \\ X_{\Pi M_1} &= a_y \cos(\psi_1 + \varphi) - f_1 \cos \varphi_1; \\ Y_{\Pi M_2} &= Y + b_y \sin(\psi_2 + \varphi) + f_2 \sin \varphi_2; \\ X_{\Pi M_2} &= b_y \cos(\psi_2 + \varphi) - f_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (20.78)$$

Возьмем от них первую и вторую производные:

$$\left. \begin{aligned} \dot{Y}_{\Pi M_1} &= \dot{Y} + a_y \dot{\varphi} \cos(\psi_1 + \varphi) + f_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1; \\ \dot{X}_{\Pi M_1} &= -a_y \dot{\varphi} \sin(\psi_1 + \varphi) + f_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1; \\ \dot{Y}_{\Pi M_2} &= \dot{Y} + b_y \dot{\varphi} \cos(\psi_2 + \varphi) + f_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2; \\ \dot{X}_{\Pi M_2} &= -b_y \dot{\varphi} \sin(\psi_2 + \varphi) + f_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (20.79)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{Y}_{\Pi M_1} &= \ddot{Y} + a_y \left(\ddot{\varphi} \cos(\psi_1 + \varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\psi_1 + \varphi) \right) + \\ &\quad + f_1 \left(\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 \right); \\ \ddot{X}_{\Pi M_1} &= -a_y \left(\ddot{\varphi} \sin(\psi_1 + \varphi) + \dot{\varphi}^2 \cos(\psi_1 + \varphi) \right) + \\ &\quad + f_1 \left(\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 \right); \\ \ddot{Y}_{\Pi M_2} &= \ddot{Y} + b_y \left(\ddot{\varphi} \cos(\psi_2 + \varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\psi_2 + \varphi) \right) + \\ &\quad + f_2 \left(\ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 \right); \\ \ddot{X}_{\Pi M_2} &= -b_y \left(\ddot{\varphi} \sin(\psi_2 + \varphi) - \dot{\varphi}^2 \cos(\psi_2 + \varphi) \right) + \\ &\quad + f_2 \left(\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (20.80)$$

Подставим полученные уравнения (20.80) в уравнения (20.76) и (20.77) и выразим из них N_1 , N_1^* , N_2 , N_2^* . Тогда получим:

$$\begin{aligned}
N_1 &= F_p \sin(\varphi_5 + \varphi) + F_1 \cos(\varphi_1 - \varphi) + F_2 \sin(\varphi_1 - \varphi) - \\
&\quad - \cancel{m_1 g} - m_1 \left[\ddot{Y} + a_y \left(\ddot{\phi} \cos(\psi_1 + \varphi) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \dot{\phi}^2 \sin(\psi_1 + \varphi) \right) + f_1 \left(\ddot{\phi} \cos \varphi_1 - \dot{\phi}_1^2 \sin \varphi_1 \right) \right]; \\
N_1^* &= F_p \cos(\varphi_5 + \varphi) + F_1 \sin(\varphi_1 - \varphi) - F_2 \cos(\varphi_1 - \varphi) - \\
&\quad - m_1 \left[-a_y \left(\ddot{\phi} \sin(\psi_1 + \varphi) + \dot{\phi}^2 \cos(\psi_1 + \varphi) \right) + \right. \\
&\quad \left. + f_1 \left(\ddot{\phi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\phi}_1^2 \cos \varphi_1 \right) \right]; \\
N_2 &= F_7 \cos(\varphi_2 - \varphi) + F_8 \sin(\varphi_2 - \varphi) - \cancel{m_2 g} - \\
&\quad - m_2 \left[\ddot{Y} + b_y \left(\ddot{\phi} \cos(\psi_2 + \varphi) - \dot{\phi}^2 \sin(\psi_2 + \varphi) \right) + \right. \\
&\quad \left. + f_2 \left(\ddot{\phi}_2 \cos \varphi_2 - \dot{\phi}_2^2 \sin \varphi_2 \right) \right]; \\
N_2^* &= F_7 \sin(\varphi_2 - \varphi) - F_8 \sin(\varphi_2 - \varphi) - \\
&\quad - m_2 \left[-b_y \left(\ddot{\phi} \sin(\psi_2 + \varphi) - \dot{\phi} \sin(\psi_2 + \varphi) \right) + \right. \\
&\quad \left. + f_2 \left(\ddot{\phi}_2 \sin \varphi_2 - \dot{\phi}_2^2 \cos \varphi_2 \right) \right].
\end{aligned} \tag{20.81}$$

Недостающие значения усилий пружин можно найти как:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= A_{\Pi}^* C_1; \\ F_2 &= B_{\Pi}^* C_2; \\ F_7 &= K_{\Pi}^* C_7; \\ F_8 &= F_{\Pi}^* C_8. \end{aligned} \right\} \tag{20.82}$$

Здесь C_1, C_2, C_7, C_8 — жесткости соответствующих пружин; $A_{\Pi}, B_{\Pi}, K_{\Pi}, F_{\Pi}$ — растяжения — сжатия этих пружин.

Вертикальная составляющая суммарного воздействия установки на крыло имеет вид:

$$N_y = -N_1 - N_2. \tag{20.83}$$

Крутящий момент:

$$M_{0z} = \left(-N_1 \cos(\psi_1 + \varphi) - N_1^* \sin(\psi_1 + \varphi) \right) a_y + \left(N_2^* \sin(\psi_2 + \varphi) - N_2 \cos(\psi_2 + \varphi) \right) b_y. \quad (20.84)$$

Будем рассматривать крыло как балку постоянного сечения и воспользуемся тем же подходом, который был описан для отделяемого изделия. Рассмотрим отдельно изгибные и крутильные колебания крыла.

20.2.3.1. Крутильные колебания крыла

Расчетная схема приведена на рис. 20.11. Введем некоторые обозначения: ρ — плотность балки (крыла); J_p — полярный момент инерции сечения балки относительно центра ее тяжести; G — модуль сдвига материала балки; J — момент инерции установки относительно оси жесткости балки; m — масса установки.

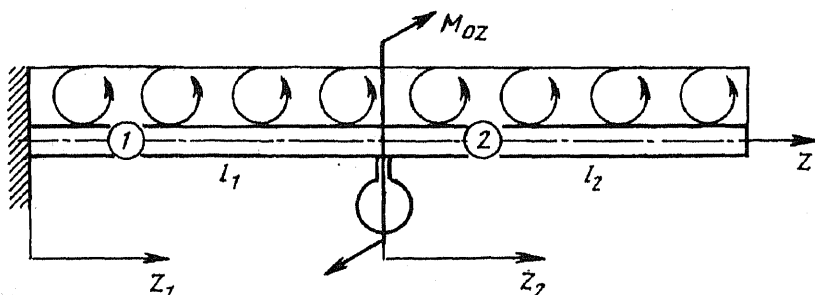


Рис. 20.11

Полярный момент инерции сечения балки принимается постоянным во всех ее сечениях. Он численно равен среднему значению полярного момента инерции крыла, т.е.:

$$J_p = J_{p \text{ ср.кр}} = \frac{J_{p1} l_1^* + J_{p2} l_2^* + \dots + J_{pn} l_n^*}{l_1^* + l_2^* + l_3^* + \dots + l_n^*}, \quad (20.85)$$

где J_{p_n} — полярный момент инерции сечения на n -м участке крыла; l_n^* — длина n -го участка крыла; $l_1^* + l_2^* + \dots + l_n^*$ — общая длина крыла.

Модуль сдвига материала балки (крыла) находится из уравнения:

$$G = \frac{l_1^* + l_2^* + \dots + l_n^*}{J_p \left(\frac{l_1^*}{G_1 J_{p_1}} + \frac{l_2^*}{G_2 J_{p_2}} + \dots + \frac{l_n^*}{G_n J_{p_n}} \right)}. \quad (20.86)$$

Найдем матрицу переноса параметров через установку, имеющую при кручении крыла момент инерции J вокруг оси жесткости крыла (см. рис. 20.12).

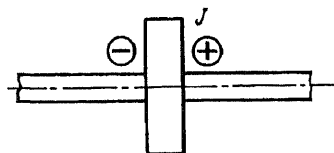


Рис. 20.12

Можно записать:

$$\varphi^+ = \varphi^-; \quad (20.87)$$

$$M^+ = M^- + J \ddot{\varphi}^-.$$

Для свободных колебаний

$$\ddot{\varphi} = -\omega_n^{*2} \varphi, \quad (20.88)$$

поэтому

$$\varphi^+ = \varphi^-; \quad (20.89)$$

$$M^+ = M^- + J \omega_n^{*2} \varphi^-.$$

Матрица переноса будет иметь вид:

$$q_{J_n}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -J \omega_n^{*2} & 1 \end{bmatrix}. \quad (20.90)$$

Здесь φ — угол закрутки сечения; M — упругий крутящий момент; ω_n^* — n -я собственная частота крутильных колебаний крыла.

Матрица переноса параметров через k -й участок для крутильных колебаний получается из матрицы переноса парамет-

ров через k -й участок для продольных колебаний путем замены E на G , F на J_p :

$$q_{k-1,k,n}^* = \begin{bmatrix} \cos \lambda_n^* l_k & \frac{\sin l_k \lambda_n^*}{G J_p \lambda_n^*} \\ -G J_p \lambda_n^* \sin \lambda_n^* l_k & \cos \lambda_n^* l_k \end{bmatrix}. \quad (20.91)$$

Перенесем параметры крутильных колебаний крыла с его левого конца на правый и учтем граничные условия: $\varphi_{0,1} = 0$, $M_{l_2} = 0$. Тогда

$$\begin{bmatrix} \varphi_{l_{2n}} \\ 0 \end{bmatrix} = q_{0,1,n}^* \times q_{J_n}^* \times q_{1,2,n}^* \begin{bmatrix} 0 \\ M_{0,1,n} \end{bmatrix}, \quad (20.92)$$

или

$$\begin{bmatrix} \varphi_{l_{2n}} \\ 0 \end{bmatrix} = q_{0,2,n}^* \begin{bmatrix} 0 \\ M_{0,1,n} \end{bmatrix}. \quad (20.93)$$

Из (20.93) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{l_{2n}} &= q_{0,2n}^*(1, 2) M_{0,1,n}^* ; \\ 0 &= q_{0,2n}^*(2, 2) M_{0,1,n} . \end{aligned} \right\}. \quad (20.94)$$

Из второго уравнения этой системы необходимо найти λ_n^* , т.е. нужно решить уравнение:

$$q_{0,2n}^*(2, 2) = 0. \quad (20.95)$$

Собственную частоту крутильных колебаний можно найти как:

$$\omega_n^* = \sqrt{\frac{\lambda_n^{2*} G}{\rho}}. \quad (20.96)$$

Функция собственных крутильных колебаний на первом участке будет иметь вид:

$$\chi_{1n}^*(z_1) = \frac{M_{0,1,n}}{G J_p \lambda_n^*} \sin(\lambda_n^* z_1). \quad (20.97)$$

Найдем вынужденные крутильные колебания крыла в сечении, где подвешена установка, т.е. найдем искомую координату φ :

$$\varphi = \sum_n \chi_{1n}^*(l_1) U_n^*(t). \quad (20.98)$$

Здесь $U_n^*(t)$ — закон вынужденных крутильных колебаний крыла, соответствующий одной из главных частот ω_n :

$$U_n^*(t) = \int_0^t \frac{1}{\omega_n^*} q_n^*(\tau) \sin \omega_n^*(t - \tau) d\tau, \quad (20.99)$$

или

$$\begin{aligned} U_n^*(t) = & \sin \omega_n^* t \int_0^t \frac{1}{\omega_n^*} q_n^*(\tau) \cos \omega_n^* \tau d\tau - \\ & - \cos \omega_n^* t \int_0^t \frac{1}{\omega_n^*} q_n^*(\tau) \sin \omega_n^* \tau d\tau. \end{aligned} \quad (20.100)$$

Здесь $q_n^*(t)$ — приведенная интенсивность внешней нагрузки. В общем виде ее можно найти как:

$$q_n^*(t) = \frac{\int_0^{l_1} q_1^*(z_1, t) \chi_{1n}^*(z_1) dz_1}{\int_0^{l_1} \chi_{1n}^{*2}(z_1) dz_1} + \frac{M_{0z}}{\rho J_p} \cdot \frac{\chi_{1n}^*(l_1)}{\int_0^{l_1} \chi_{1n}^{*2}(z_1) dz_1} +$$

$$+ \frac{\int_0^{l_2} q_2^*(z_2, t) \chi_{2n}^* dz_2}{\int_0^{l_2} \chi_{2n}^{*2}(z_2) dz_2}. \quad (20.101)$$

Здесь $q_k^*(z_k, t) = \frac{q(z_k, t)}{\rho J_p}$ — интенсивность распределенной внешней нагрузки; M_{0z} — момент кручения крыла в сечении, в котором подвешена установка, создаваемый реакциями в шарнирах относительно оси жесткости крыла (20.84).

Рассмотрим отделение изделия относительно некоторого установившегося положения, для которого φ и Y имеют установившиеся значения, обусловленные действующими на крыло аэродинамическими силами и массой установки.

Поскольку нас интересует перемещение изделия относительно носителя, то все нагрузки, действовавшие до отделения и не изменившие своего значения в момент отделения, можно принять для таких расчетов равными нулю. К таким нагрузкам относятся установившиеся значения аэродинамических сил и масса установки. Инерционные же силы не равны нулю. При этом принимаем в начальный момент отделения $\varphi = 0$, $Y = 0$.

Тогда приведенная интенсивность распределенной внешней нагрузки имеет вид:

$$q_n^*(t) = \frac{M_{0z}}{\rho J_p} \cdot \frac{\chi_{1n}^*(l_1)}{\int_0^{l_1} \chi_{1n}^{*2}(z_1) dz_1}. \quad (20.102)$$

Для нахождения сил, действующих со стороны изделия на крыло, необходимо найти первую и вторую производную от φ .

Их можно найти как:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \sum_n \chi_{1n}^*(l_1) \dot{U}_n^*(t); \\ \ddot{\varphi} &= \sum_n \chi_{1n}^*(l_1) \ddot{U}_n^*(t); \end{aligned} \quad (20.103)$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_n^*(t) = & \omega_n^* \left(\cos \omega_n^* t \int_0^t \frac{1}{\omega_n^*} q_n^*(\tau) \cos \omega_n^* \tau d\tau + \right. \\ & \left. + \sin \omega_n^* t \int_0^t \frac{1}{\omega_n^*} q_n^*(\tau) \sin \omega_n^* \tau d\tau \right); \quad (20.104) \\ \ddot{U}_n^* = & -\omega_n^{*2} U_n(t) + q_n^*(t).\end{aligned}$$

20.2.3.2. Изгибные колебания крыла

Расчетная схема приведена на рис. 20.13. Введем некоторые обозначения: F — площадь сечения крыла; J_X — момент инерции

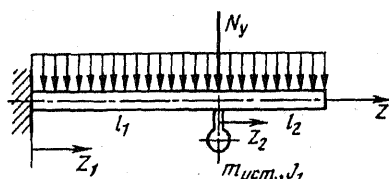


Рис. 20.13

сечения крыла относительно оси X (рис. 20.14); OZ — ось жесткости крыла; E — модуль Юнга материала крыла; J_1 — момент инерции установки относительно оси OX , лежащей в сечении крыла, в котором подвешена установка; $m_{уст}$ — масса установки.

Полагаем момент сечения крыла J_X постоянным, вычисляемым как среднее значение:

$$J_X = J_{ср.кр} = \frac{J_{1X} l_1^* + J_{2X} l_2^* + \dots + J_{nX} l_n^*}{l_1^* + l_2^* + \dots + l_n^*}, \quad (20.105)$$

где J_{nX} — момент инерции сечения на n -м участке крыла; l_n^* — длина этого участка крыла; $l_1^* + l_2^* + \dots + l_n^*$ — общая длина крыла.

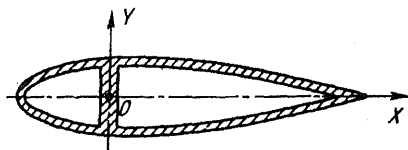


Рис. 20.14

Площадь сечения крыла F принимается постоянной во всех сечениях и вычисляется по формуле:

$$F = F_{\text{ср.кр}} = \frac{F_1 l_1^* + F_2 l_2^* + \dots + F_n l_n^*}{l_1^* + l_2^* + \dots + l_n^*}, \quad (20.106)$$

где F_n — площадь сечения на n -м участке крыла.

Модуль Юнга материала крыла можно найти из уравнения:

$$E = \frac{C(l_1^* + l_2^* + \dots + l_n^*)}{F}, \quad (20.107)$$

где C — жесткость крыла на растяжение, измеренная на его свободном конце в направлении оси OZ , или по формуле:

$$E = \frac{l_1^* + l_2^* + \dots + l_n^*}{F \left(\frac{l_1^*}{E_1 F_1} + \frac{l_2^*}{E_2 F_2} + \dots + \frac{l_n^*}{E_n F_n} \right)}. \quad (20.108)$$

Найдем матрицу переноса параметров через установку, имеющую момент инерции J_1 и массу $m_{\text{уст}}$ для изгибных колебаний крыла (см. рис. 20.15).

Запишем уравнения для параметров изгибных колебаний справа и слева от установки:

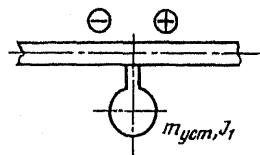


Рис. 20.15

$$\begin{aligned} U^+ &= U^-; \\ \Theta^+ &= \Theta^-; \\ M^+ &= M^- + J_1 \ddot{\Theta}^-; \\ Q^+ &= Q^- + m_{\text{уст}} \ddot{U}^-. \end{aligned} \quad (20.109)$$

Порядок рассуждений аналогичен методике исследований изгибных колебаний изделия. Учтем, что для свободных колебаний:

$$\begin{aligned} \ddot{\Theta} &= -\omega_n^2 \Theta; \\ \ddot{U} &= -\omega_n^2 U, \end{aligned} \quad (20.110)$$

тогда

$$\begin{aligned}
 U^+ &= U^-; \\
 \Theta^+ &= \Theta^-; \\
 M^+ &= M^- - \omega_n^2 \Theta^- J_1; \\
 Q^+ &= Q^- - \omega_n^2 U^- m_{\text{уст.}}
 \end{aligned} \tag{20.111}$$

Таким образом, матрица переноса параметров через установку для изгибных колебаний имеет вид:

$$q_{m,J,n}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -J_1 \omega_n^2 & 1 & 0 \\ -m_{\text{уст.}} \omega_n^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{20.112}$$

Матрицы переноса параметров через k -й участок для изгибных колебаний имеют вид:

$$q_{k-1,k,n} = \begin{bmatrix} S_n(l_k) & \frac{T_n(l_k)}{\lambda_n} & \frac{U_n(l_k)}{E J_z \lambda_n^2} & \frac{V_n(l_k)}{E J_z \lambda_n^3} \\ \lambda_n V_n(l_k) & S_n(l_k) & \frac{T_n(l_k)}{E J_z \lambda_n} & \frac{U_n(l_k)}{E J_z \lambda_n^2} \\ \lambda_n^2 E J_z U_n(l_k) & E J_z \lambda_n V_n(l_k) & S_n(l_k) & \frac{T_n(l_k)}{\lambda_n} \\ \lambda_n^2 E J_z T_n(l_k) & \lambda_n^2 E J_z U_n(l_k) & \lambda_n V_n(l_k) & S_n(l_k) \end{bmatrix}. \tag{20.113}$$

Перенесем начальные параметры изгибных колебаний крыла с его левого конца на правый:

$$\begin{bmatrix} U_{l2n} \\ \Theta_{l2n} \\ M_{l2n} \\ Q_{l2n} \end{bmatrix} = q_{0,1,n} \times q_{m,J,n} \times q_{1,2,n} \begin{bmatrix} U_{0,1,n} \\ \Theta_{0,1,n} \\ M_{0,1,n} \\ Q_{0,1,n} \end{bmatrix}. \tag{20.114}$$

Обозначим

$$q_{0,2,n} = q_{0,1,n} \times q_{m,J,n} \times q_{1,2,n}, \quad (20.115)$$

и учтем, что $U_{0,1,n} = 0$, $\Theta_{0,1,n} = 0$, $M_{l2n} = 0$, $Q_{l2n} = 0$.

Тогда систему (20.114) можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} U_{l2n} \\ \Theta_{l2n} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = q_{0,2,n} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{0,1,n} \\ Q_{0,1,n} \end{bmatrix}, \quad (20.116)$$

или

$$\left. \begin{aligned} U_{l2n} &= q_{0,2,n}(1,3)M_{01n} + q_{0,2,n}(1,4)Q_{01n}; \\ \Theta_{l2n} &= q_{0,2,n}(2,3)M_{01n} + q_{0,2,n}(2,4)Q_{01n}; \\ 0 &= q_{0,2,n}(3,3)M_{01n} + q_{0,2,n}(3,4)Q_{01n}; \\ 0 &= q_{0,2,n}(4,3)M_{01n} + q_{0,2,n}(4,4)Q_{01n}. \end{aligned} \right\} \quad (20.117)$$

Решая совместно два последних уравнения этой системы, можно получить:

$$Q_{01n} = -M_{01n} q_{0,2,n}(3,3) / q_{0,2,n}(3,4); \quad (20.118)$$

$$q_{0,2,n}(4,3) - q_{0,2,n}(4,4) q_{0,2,n}(3,3) / q_{0,2,n}(3,4). \quad (20.119)$$

Уравнение (20.118) связывает амплитуды параметров колебаний на левом конце балки, а из уравнения (20.119) необходимо получить волновые числа колебаний λ_n . Найдя их, можем определить функцию собственных колебаний первого участка крыла:

$$\chi_{1n}(Z_1) = M_{01n} \frac{U_n(Z_1)}{E J_x \lambda_n^2} + Q_{01n} \frac{V_n(Z_1)}{E J_x \lambda_n^2}. \quad (20.120)$$

Собственная частота колебаний крыла:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\lambda_n^4 E J_x}{\rho F}}. \quad (20.121)$$

Найдем вынужденные изгибные колебания крыла в сечении, где подвешена установка, т.е. найдем искомую координату Y :

$$Y = \sum_n \chi_{1n}(l_1) U_n(t); \quad (20.122)$$

$$U_n(t) = \int_0^t \frac{1}{\omega_n} q_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau. \quad (20.123)$$

Формула (20.123) описывает закон вынужденных изгибных колебаний крыла, соответствующий одной из главных частот изгибных колебаний ω_n .

Можно записать:

$$\begin{aligned} U_n(t) = & \sin \omega_n t \int_0^t \frac{1}{\omega_n} q_n(\tau) \cos \omega_n \tau d\tau - \\ & - \cos \omega_n t \int_0^t \frac{1}{\omega_n} q_n(\tau) \sin \omega_n \tau d\tau. \end{aligned} \quad (20.124)$$

Таким образом, рассматривается перемещение изделия относительно некоторого установившегося положения и, следовательно, в выражении для приведенной интенсивности внешней нагрузки учитываются только силы, действующие на крыло со стороны установки, т.е. учитываются только инерционные силы:

$$q_n(t) = \frac{N_y}{\rho F} \frac{\chi_{1n}(l_1)}{\int_0^{l_1} \chi_{1n}(Z_1) s Z_1}, \quad (20.125)$$

где N_y — сила, действующая на крыло со стороны установки.

Для нахождения силы N_y необходимо знать вторую производную от Y :

$$\ddot{Y} = \sum_n \chi_{1n}(l_1) \ddot{U}_n(t); \quad (20.126)$$

$$\ddot{U}_n(t) = -\omega_n^2 U_n(t) + q_n(t). \quad (20.127)$$

В выражениях для φ , Y и их производных производится суммирование колебаний на разных частотах. Как известно, собственных частот бесконечное множество, однако наибольший вклад в движение вносят несколько первых частот. Примем $n = 4$. При этом $\omega_1 \rightarrow 0$, что соответствует отсутствию колебаний, т.е. случаю абсолютно жесткого крыла.

Поскольку в расчетах нельзя принять $\omega_1 = 0$ с большой точностью можно принять, например, волновое число $\lambda_1 = 10^{-8}$.

20.2.4. Математическое моделирование термогазодинамических процессов в приводе АКУ

В настоящем разделе приведен краткий вывод уравнений и алгоритм изменения параметров газа в полостях пиропривода. Зная их, можно определить усилие, развиваемое приводом, а

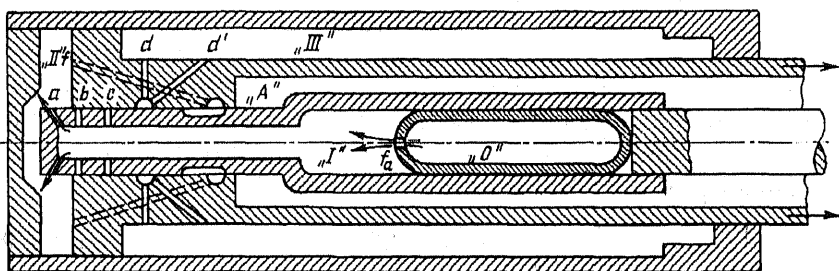


Рис. 20.16

отсюда и характер движения механизма АКУ. Полученные уравнения используются далее в обобщенной динамической модели. На рис. 20.16 — 20.18 привод показан в исходном, промежуточном и конечном положениях, на рис. 20.16 (исходное

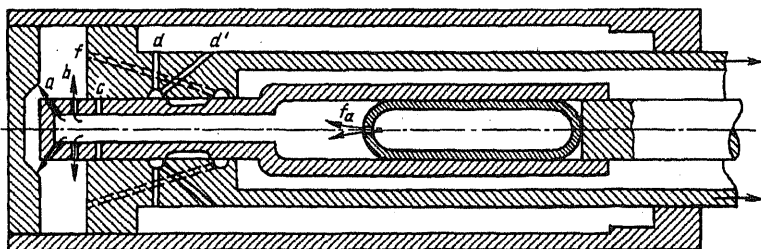


Рис. 20.17

положение), 20.17 (открытие группы отверстий в), 20.18 (обратный ход поршней). Структурная схема совместного исследования динамических характеристик газового привода и плоского рычажного механизма АКУ показана на рис. 20.19.

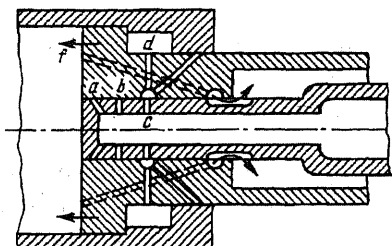


Рис. 20.18

Рассмотрим наиболее общий случай одновременного наполнения и опорожнения полости переменного объема с учетом теплообмена с окружающей средой. Для описания изменения параметров газа в полости

используем уравнение состояния идеального газа, уравнение I закона термодинамики и уравнения движения элементов привода, характеризующие изменение объемов полостей привода.

Уравнение состояния идеального газа:

$$PV = mRT; \quad (20.128)$$

или в дифференциальной форме:

$$PdV + VdP = RTdm + mRdT. \quad (20.129)$$

Заменим в уравнении (20.128) количество газа, поступающего в объем V и вытекающего из него, через значения расхода G в интервале времени dt (т.е. $dm = Gdt$) и, полагая в этом уравнении $m = PV/RT$, получаем:

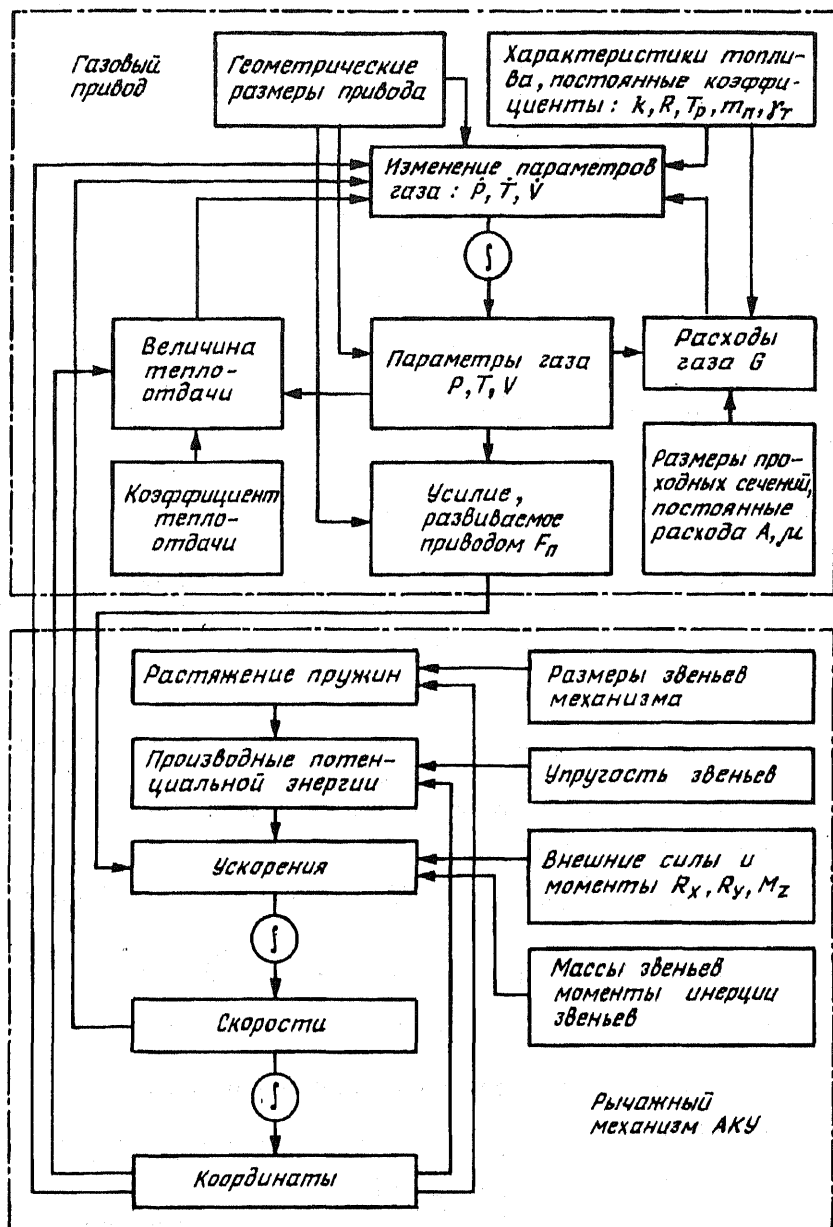


Рис. 20.19

$$VdP + PdV = RTGdt + PVdT/V. \quad (20.130)$$

Здесь G — суммарный расход газа:

$$G = G_{\text{втек}} - G_{\text{вытек}}, \quad (20.131)$$

$G_{\text{втек}}$, $G_{\text{вытек}}$ — соответственно суммарные расходы газа, поступающего и вытекающего из полости. Выделив в уравнении (20.130) член, содержащий dP и проводя несложное преобразование, получаем следующее уравнение:

$$dP = \frac{RT}{V} G dt + \frac{P}{T} dT - \frac{P}{V} dV. \quad (20.132)$$

Запишем это уравнение в виде, удобном для численного интегрирования:

$$\dot{P} = \frac{RT}{V} G + \frac{P}{T} \dot{T} - \frac{P}{V} \dot{V}. \quad (20.133)$$

Для нахождения скорости изменения температуры в полости T используем уравнение I закона термодинамики, выраженного в дифференциальной форме:

$$dQ = dU + dL, \quad (20.134)$$

где Q — количество тепла, подведенного к системе; U — внутренняя энергия газа; L — работа, совершаемая системой.

Можно записать, что $dL = PdV$ и $dV = d(Um)$, где U — удельная внутренняя энергия:

$$dU = mdU + U dm = \frac{PV}{RT} dU + UG dt. \quad (20.135)$$

Удельную внутреннюю энергию можно найти как

$$U = C_V T,$$

где C_V — теплоемкость газа при постоянном объеме.

Так как

$$\begin{cases} \frac{C_P}{C_V} = k; \\ C_P - C_V = R, \end{cases}$$

то

$$C_P = \frac{kR}{k-1}, \quad C_V = \frac{R}{k-1}, \quad (20.136)$$

где C_P — теплоемкость газа при постоянном давлении; R — газовая постоянная; k — коэффициент адиабаты.

Тогда

$$dV = \frac{PV}{(k-1)T} dT + \frac{RT}{k-1} G dt. \quad (20.137)$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (20.134), имеем:

$$dQ = \frac{PV}{(k-1)T} dT + \frac{RT}{k-1} G dt + P dV. \quad (20.138)$$

Выделяя член, содержащий dT и проводя преобразования, получим:

$$dT = \left(dQ - P dV - \frac{RT}{k-1} G dt \right) \frac{(k-1)T}{PV}, \quad (20.139)$$

или в виде, удобном для численного интегрирования:

$$\dot{T} = \left((k-1) \dot{Q} - P\dot{V} - RTG \right) \frac{T}{PV}. \quad (20.140)$$

Здесь $\dot{Q}$ — скорость подвода тепла к системе. Ее величина обусловлена тремя процессами:

- 1) подводом тепла вместе с втекающим газом;
- 2) отводом тепла вместе с вытекающим газом;
- 3) теплоотдачей к стенкам полости.

Так как теплосодержание единицы массы газа можно определить как $i = C_P T$, то скорость подвода тепла к системе:

$$\dot{Q} = C_P T_{\text{втек}} G_{\text{втек}} - C_P T G_{\text{вытек}} - \dot{Q}_T, \quad (20.141)$$

где $T_{\text{втек}}$ — температура втекающего газа; T — температура газа в полости; $G_{\text{втек}}$, $G_{\text{вытек}}$ — втекающие и вытекающие расходы газа; $\dot{Q}_T$ — скорость теплопотерь, обусловленная теплоотдачей к стенкам полости.

Уравнение (20.141) можно записать в виде:

$$\dot{Q} = \frac{kR}{(k-1)} \left(T_{\text{втек}} G_{\text{втек}} - T G_{\text{вытек}} \right) - \dot{Q}_T. \quad (20.142)$$

В написанные выше уравнения входят выражения расходов газа.

Приведем формулы для их вычисления.

Здесь G_{ij} — расход газа из полости i в полость j .

Пусть

$$\beta = \frac{P_j}{P_i} \quad \text{и} \quad \beta_{\text{кр}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad (20.143)$$

а) если $\beta < \beta_{\text{кр}}$ — сверхкритический режим

$$G_{ij} = \mu A P_i \sqrt{\frac{1}{RT_i}} \sqrt{\frac{2k}{k-1}} \sqrt{\beta^{\frac{2}{k}}_{\text{кр}} - \beta^{\frac{k+1}{k}}_{\text{кр}}}; \quad (20.144)$$

б) если $\beta_{\text{кр}} \leq \beta \leq 1$ — докритический режим

$$G_{ij} = \mu A P_i \sqrt{\frac{1}{RT_i}} \sqrt{\frac{2k}{k-1}} \sqrt{\beta^{\frac{2}{k}} - \beta^{\frac{k+1}{k}}}; \quad (20.145)$$

в) если $\beta > 1$ — расход в противоположную сторону, т.е. из полости j в полость i . Расход из i в j считаем равным нулю.

В приведенных зависимостях μ — коэффициент расхода ($\mu < 1$); A — площадь проходного сечения сопла, соединяющего полости i и j ; P_i , P_j — давление в полостях i и j .

Пиропривод применяется в широком диапазоне температур, поэтому теплоотдача от газа к стенкам привода может оказать существенное влияние на динамику системы. Величину теплоотдачи можно определить так:

$$\dot{Q} = \alpha F (T - T_{\text{ст}}), \quad (20.146)$$

где α — коэффициент теплоотдачи; F — поверхность теплообмена; T — температура газа в полости; $T_{\text{ст}}$ — температура внутренней поверхности стенки полости.

Температура внутренней поверхности стенки полости в процессе теплоотдачи повышается, однако вследствие малого времени работы привода ($\sim 0,1$ с), большой толщины стенки и

хорошей теплопроводности материала стенки это повышение температуры мало сказывается на величине $\dot{Q}$ и поэтому температуру внутренней поверхности стенки можно считать постоянной и равной начальной температуре.

Поверхность теплообмена F можно определить из уравнения движения элементов привода и его размеров.

Коэффициент теплоотдачи является функцией многих величин и точное определение его сложно. В первом приближении его можно считать линейно зависящим от плотности газа:

$$\alpha = \sigma_0 \gamma = \sigma_0 \frac{P}{RT}, \quad (20.147)$$

где σ_0 — коэффициент пропорциональности.

Сформируем системы уравнений, реализованных в алгоритме математической модели привода на ЭВМ. В уравнениях приняты следующие обозначения: d_{Π} — диаметр поршня привода; S_P — площадь поршня; $S_{кз}$ — площадь кольцевого зазора возвратной полости; S_0 — площадь горения пороха в пиропатроне; V_0, V_1, V_2, V_3 — объемы полостей привода; A_{ij} — площадь проходного сечения из полости i в полость j ; μ_{ij} — коэффициент расхода; F_0, F_1, F_2 — поверхности теплоотдачи в каждой полости; m_{Π} — масса навески пороха; $m_{сг}$ — масса сгоревшего пороха; T_P — температура горения пороха; γ_T — плотность пороха; T_A, P_A — атмосферные температура и давление; U — скорость горения пороха; x — перемещение поршня; $\dot{x}$ — скорость перемещения поршня; F_{Π} — усилие на поршне.

Составим уравнения для расчета привода:

$$\dot{V}_0 = S_0 U;$$

$$\dot{V}_1 = 0;$$

$$V_2 = S_P \dot{x};$$

$$V_3 = -S_{кз} \dot{x};$$

$$m_{сг} = S_0 U \gamma_T;$$

$$\begin{aligned}
\dot{T}_0 &= \frac{T_0}{P_0 V_0} \left[kR \left(T_P S_0 U \gamma_T - T_0 G_{01} \right) - (k-1) P_0 S_0 U - \right. \\
&\quad \left. - RT_0 \left(S_0 U \gamma_T - G_{01} \right) - (k-1) \dot{Q}_{T_0} \right]; \\
\dot{T}_1 &= \frac{T_1}{P_1 V_1} \left[kR \left(T_0 G_{01} + T_2 \gamma G_{21} - T_1 \left(G_{12} + G_{13} \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. - RT_1 \left(G_{01} + G_{21} - G_{12} - G_{13} \right) - (k-1) \dot{Q}_{T_1} \right]; \\
\dot{T}_2 &= \frac{T_2}{P_2 V_2} \left[kR \left(T_1 G_{12} - T_2 \left(G_{23} + G_{20} + G_{21} \right) \right) - (k-1) P_2 \dot{V}_2 - \right. \\
&\quad \left. - RT_2 \left(G_{12} - G_{21} - G_{12} - G_{23} - G_{2a} \right) - (k-1) \dot{Q}_{T_2} \right]; \\
\dot{T}_3 &= \frac{T_3}{P_3 V_3} \left[kR \left(T_2 G_{23} + T_1 G_{13} \right) - (k-1) P_3 \dot{V}_3 - \right. \\
&\quad \left. - RT_3 \left(G_{23} + G_{13} \right) - (k-1) \dot{Q}_{T_3} \right]; \\
\dot{P}_0 &= \frac{RT_0}{V_0} \left(S_0 U \gamma_T - G_{01} \right) + \frac{P_0}{T_0} \dot{T}_0 - \frac{P_0}{T_0} S U; \\
\dot{P}_1 &= \frac{RT_1}{V_1} \left(G_{01} + G_{21} - G_{12} - G_{13} \right) + \frac{P_1}{T_1} \dot{T}_1; \\
\dot{P}_2 &= \frac{RT_2}{V_2} \left(G_{12} - G_{23} - G_{21} - G_{2a} \right) + \frac{P_2}{T_2} \dot{T}_2 - \frac{P_2}{V_2} \dot{V}_2; \\
\dot{P}_3 &= \frac{RT_3}{V_3} \left(G_{23} + G_{13} \right) + \frac{P_3}{T_3} \dot{T}_3 - \frac{P_3}{V_3} \dot{V}_3; \\
\dot{Q}_{T_0} &= \sigma_0 \frac{P_0}{RT_0} F_0 \left(T_0 - T_A \right); \\
\dot{Q}_{T_1} &= \sigma_0 \frac{P_1}{RT_1} F_1 \left(T_1 - T_A \right);
\end{aligned}$$

$$\dot{Q}_{T_2} = \sigma_0 \frac{P_2}{RT_2} F_2 (T_2 - T_A);$$

$$\dot{Q}_{T_3} = \sigma_0 \frac{P_3}{RT_3} F_3 (T_3 - T_A).$$

Начальные условия: $P_0 = P_1 = P_2 = P_3 = P_A$;

$$T_0 = T_1 = T_2 = T_3 = T_A; \quad V_0 = V_{0H};$$

$$V_1 = V_{1H}; \quad V_2 = V_{2H}; \quad V_3 = V_{3H}; \quad m_{cr} = 0.$$

Температура стенки принята равной T_A .

20.2.5. Результаты математического моделирования динамики отделения изделия от упругого механизма АКУ.

Динамический анализ процессов отделения

В настоящем разделе представлены результаты моделирования на ЭВМ процессов отделения упругого отделяемого изделия от упругого АКУ, динамические и математические модели которых приведены в пп. 20.2.1 и 20.2.2.

Общая динамическая модель работает совместно с моделью пиропривода, термогазодинамические процессы в котором описаны в п. 20.2.4.

Расчет штатного варианта процесса отделения производился при следующих параметрах пиропривода:

а) параметры пороха и пороховых газов:

плотность пороха и пороховых газов $\gamma = 1900 \text{ кг/м}^3$;

отношение теплоемкостей $k = 1,182$;

коэффициент теплоотдачи $\sigma_0 = 100$;

температура горения пороха $T_{\pi} = 2983^\circ \text{ К}$;

масса пороха $M_{\pi} = 30 \text{ г}$;

скорость горения пороха $U_{\text{зад}} = 1 \text{ м/с}$;

площадь горения пороха $S_0 = 0,0019625 \text{ м}^2$.

Скорость и площадь горения пороха выбраны из условия, что процесс горения происходит практически мгновенно (за время $t_{\text{гор}} < 0,01$ с):

$$t_{\text{гор}} = \frac{M_{\text{п}}}{S_0 U \gamma} = \frac{0,030}{0,0019625 \cdot 1 \cdot 1900} < 0,01 \text{ с};$$

б) параметры привода:

площадь поршня $S_{\text{п}} = 0,00407 \text{ м}^2$;

площадь кольцевого зазора $S_{\text{к.з}} = 0,00105 \text{ м}^2$;

диаметр поршня $d_{\text{п}} = 0,072 \text{ м}$;

начальные объемы полостей $V_{10} = 0,000160 \text{ м}^3$;

$V_{20} = 0,000155 \text{ м}^3$;

$V_{30} = 0,000042 \text{ м}^3$;

$V_{40} = 0,000395 \text{ м}^3$;

проходные сечения дюз

$$f_{12} = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2; \quad f_{23} = 113 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Расчеты производились для следующих параметров изделия:

масса изделия $m_{\text{изд}} = 480 \text{ кг}$;

момент инерции изделия относительно центра масс

$$J_z = 400 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

расстояние центра масс изделия от переднего узла подвески

по оси X $l_{51} = 0,4 \text{ м}$;

по оси Y $h_p = 0,26 \text{ м}$.

Параметры механизма АКУ:

жесткости пружин, моделирующих жесткости звеньев:

$$C_1 = 1,67 \cdot 10^8 \text{ Н/м}; \quad C_3 = 0,547 \cdot 10^8 \text{ Н/м}; \quad C_8 = 1,67 \cdot 10^8 \text{ Н/м}.$$

Для случая штатного варианта процесса отделения ($M_{\text{п}} = 30 \text{ г}$, $S_p = 40 \text{ см}^2$, $U_{\text{зад}} = 1 \text{ м/с}$) на рис. 20.20 + 20.27 представлены следующие зависимости:

рис. 20.20 — зависимости $Y_{\text{изд}} = Y_{\text{изд}}(t)$ и $\dot{Y}_{\text{изд}} = \dot{Y}_{\text{изд}}(t)$, где $Y_{\text{изд}}$ — вертикальное перемещение изделия;

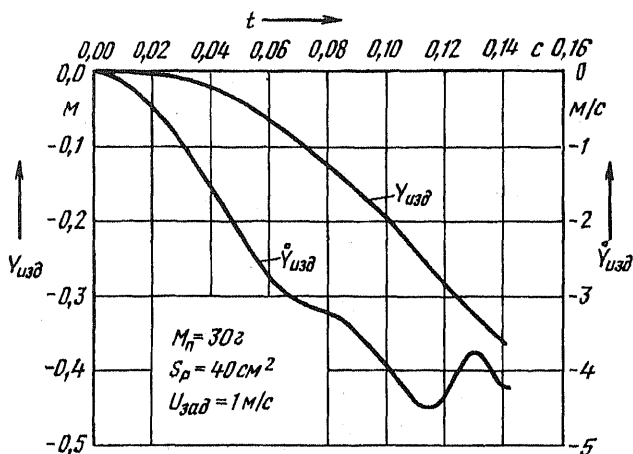


Рис. 20.20

рис. 20.21 — зависимость $\ddot{Y}_{изд} = \ddot{Y}_{изд}(t)$, где величина вертикального ускорения изделия связана с перегрузкой зависимостью: $\frac{\ddot{Y}_{изд}}{10} = n_y - 1$, откуда $n_y = \frac{\ddot{Y}_{изд}}{10} + 1$;

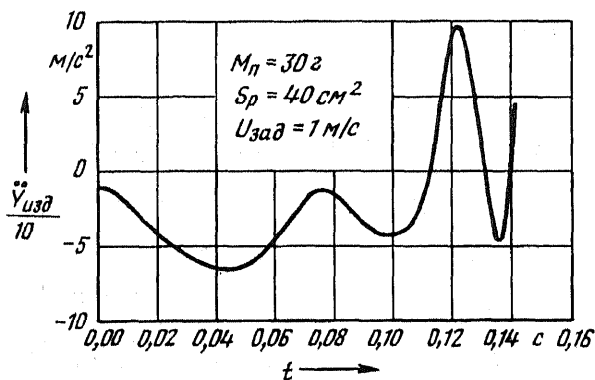


Рис. 20.21

рис. 20.22 — зависимости $\Phi_{изд} = \Phi_{изд}(t)$ и $\dot{\Phi}_{изд} = \dot{\Phi}_{изд}(t)$, где $\Phi_{изд}$ и $\dot{\Phi}_{изд}$ — соответственно угол и угловая скорость отделяемого изделия;

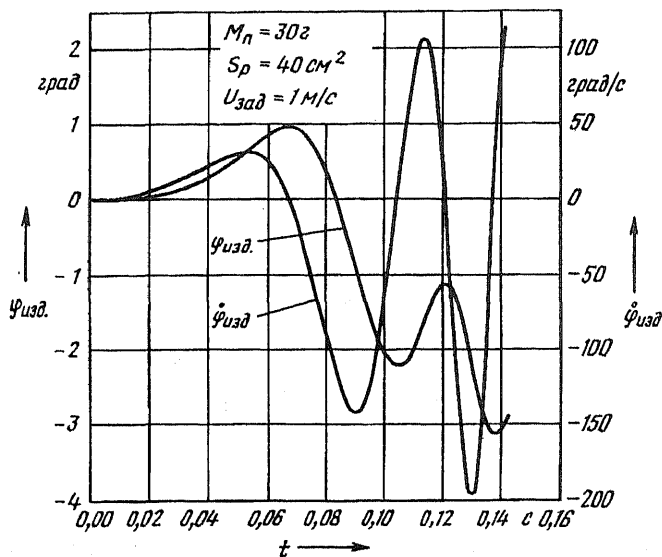


Рис. 20.22

рис. 20.23 — зависимость $F_{\Pi} = F_{\Pi}(t)$, где F_{Π} — усилие, развиваемое приводом;

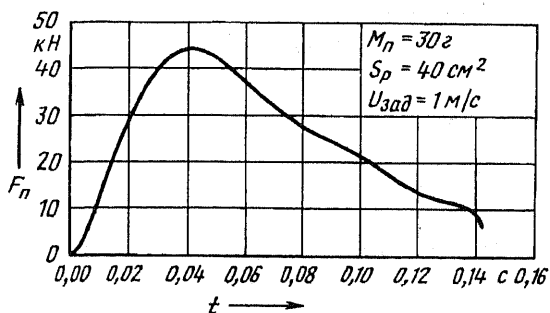


Рис. 20.23

рис. 20.24 — зависимость $P_1 = P_1(t)$, $P_2 = P_2(t)$ и $P_1^* = P_1^*(t)$, где P_1 , P_2 и P_1^* — усилия на бугелях изделия;

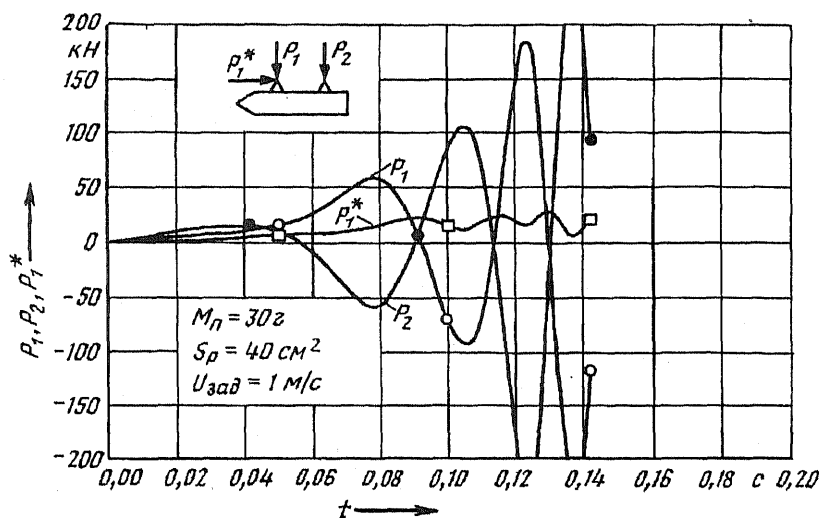


Рис. 20.24

рис. 20.25 — зависимости $N = N(t)$, где N — продольные усилия в звеньях АКУ — подвижной балке, переднем и заднем рычагах;

рис. 20.26 — зависимости $P_1 = P_1(t)$, $P_2 = P_2(t)$, $P_3 = P_3(t)$, $P_4 = P_4(t)$, где P_1 , P_2 , P_3 , P_4 — давления в полостях пиропривода;

рис. 20.27 — зависимости $T_1 = T_1(t)$, $T_2 = T_2(t)$, $T_3 = T_3(t)$, $T_4 = T_4(t)$, где T_1 , T_2 , T_3 , T_4 — температуры в полостях пиропривода.

Наряду со штатным вариантом рассмотрено влияние параметров пиропривода и пороха $M_{\text{п}}$, S_p и $U_{\text{зад}}$ на параметры отделения ($Y_{\text{изд}}$, $\dot{Y}_{\text{изд}}$, $\ddot{Y}_{\text{изд}}$ (n_y), $\Phi_{\text{изд}}$, $\dot{\Phi}_{\text{изд}}$), нагрузки N в звеньях механизма АКУ, усилия на бугелях изделия (P_1 , P_2 , P_1^*) и на характеристики привода ($F_{\text{п}}$, P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , T_1 , T_2 , T_3 , T_4).

На рис. 20.28 — 20.35 представлен вариант для случая $M_{\text{п}} = 30$ г, $S_p = 17$ см², $U_{\text{зад}} = 1$ м/с;

На рис. 20.36 — 20.43 — вариант для случая $M_{\text{п}} = 30$ г, $S_p = 32$ см², $U_{\text{зад}} = 0,05$ м/с;

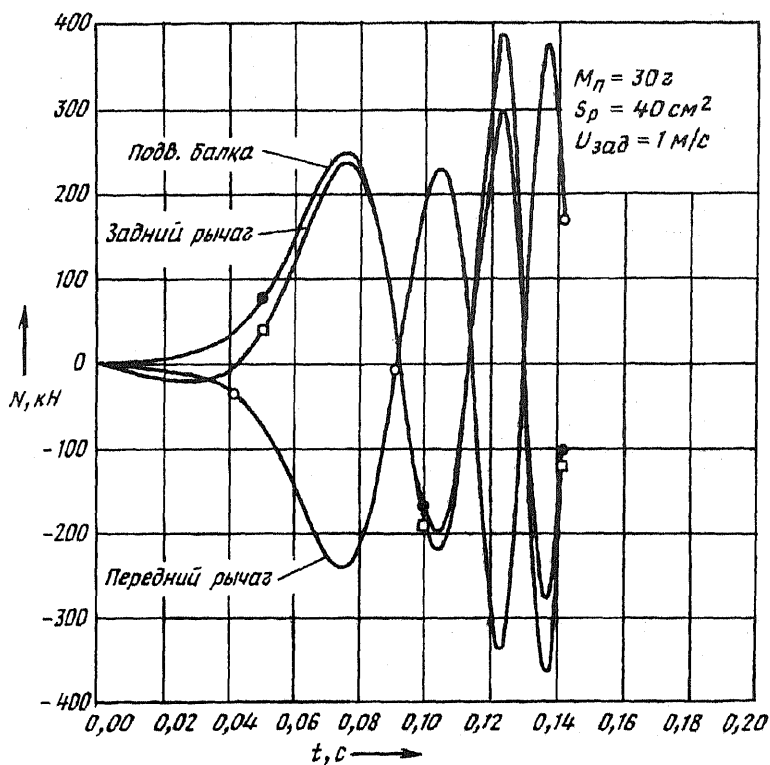


Рис. 20.25

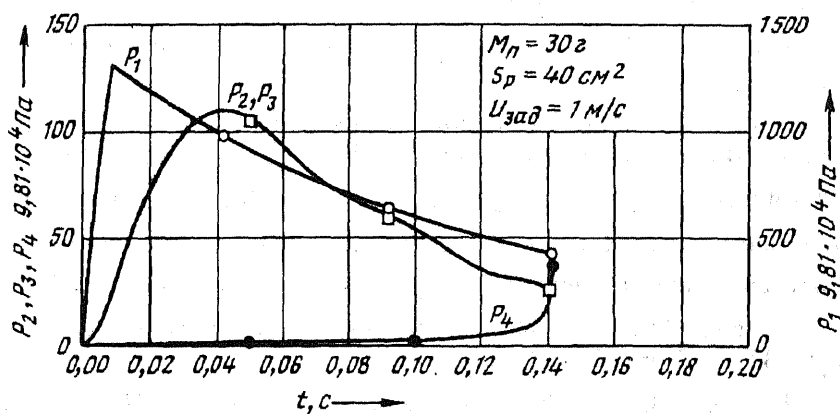


Рис. 20.26

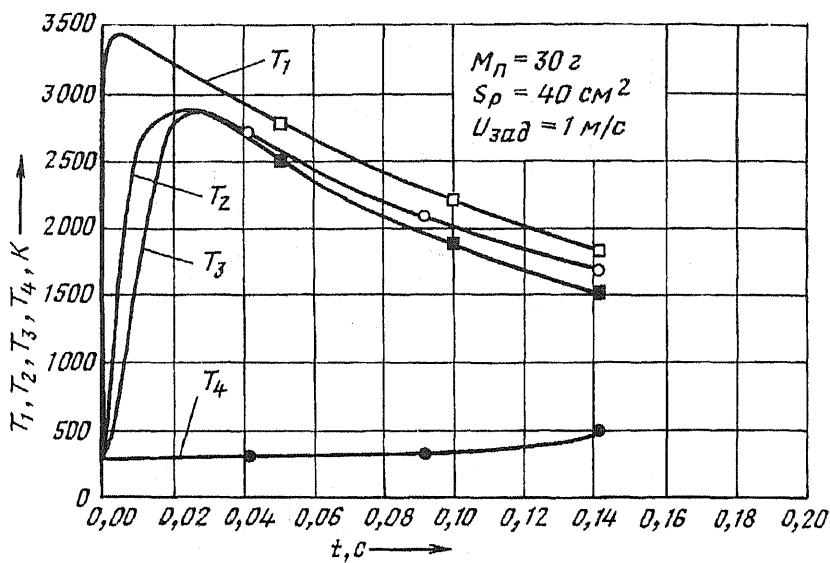


Рис. 20.27

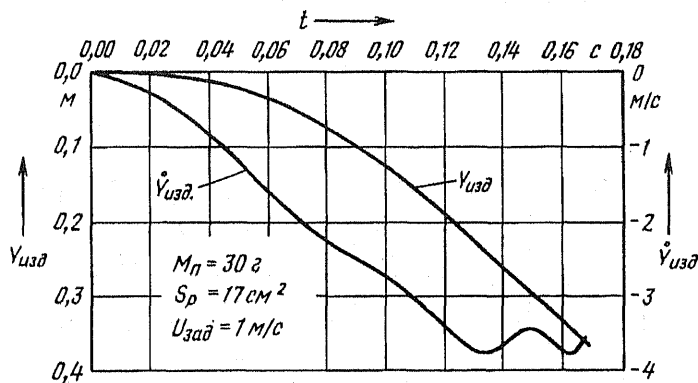


Рис. 20.28

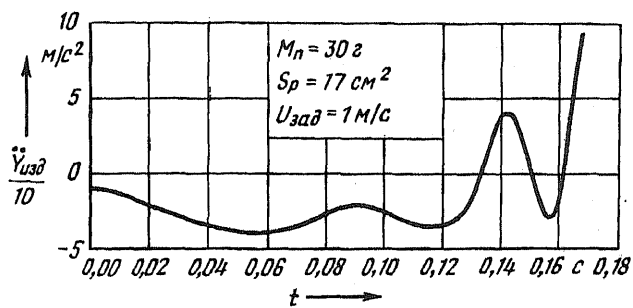


Рис. 20.29

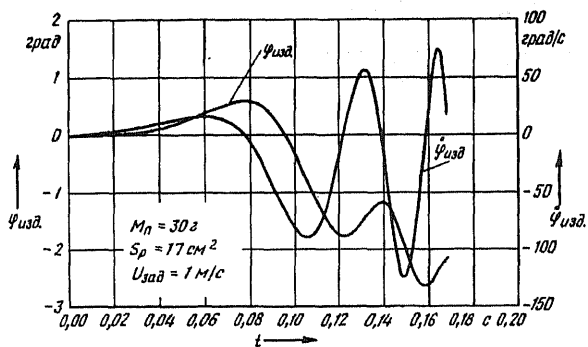


Рис. 20.30

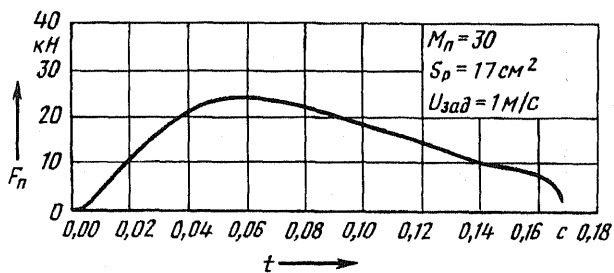


Рис. 20.31

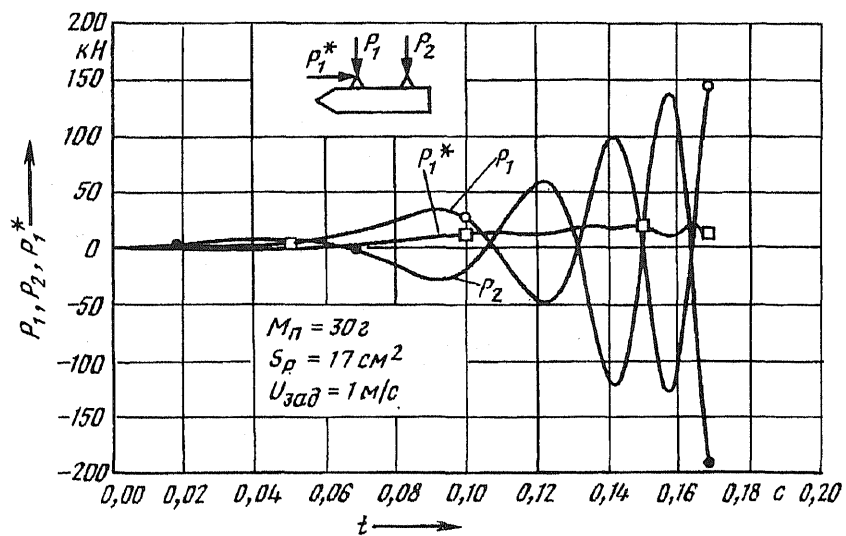


Рис. 20.32

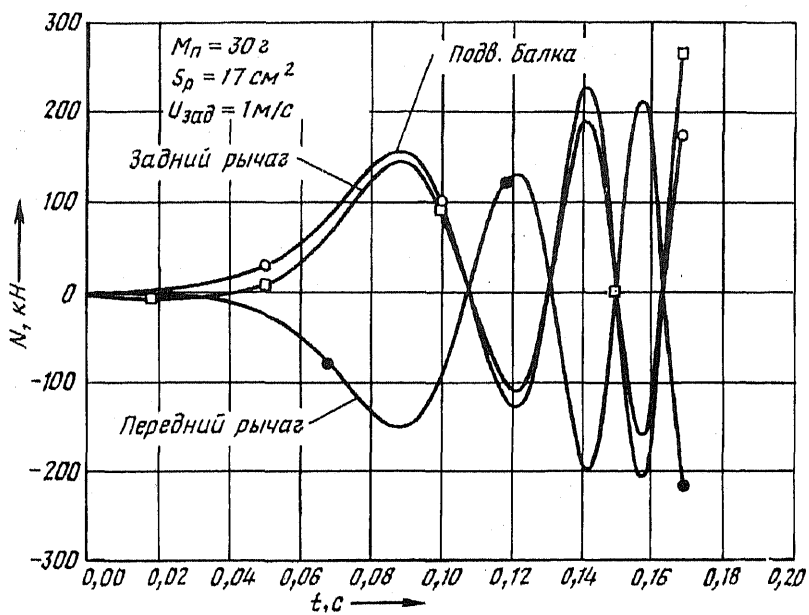


Рис. 20.33

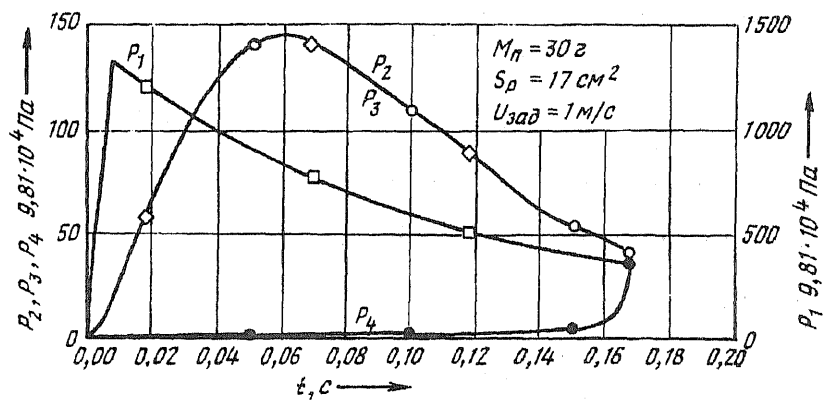


Рис. 20.34

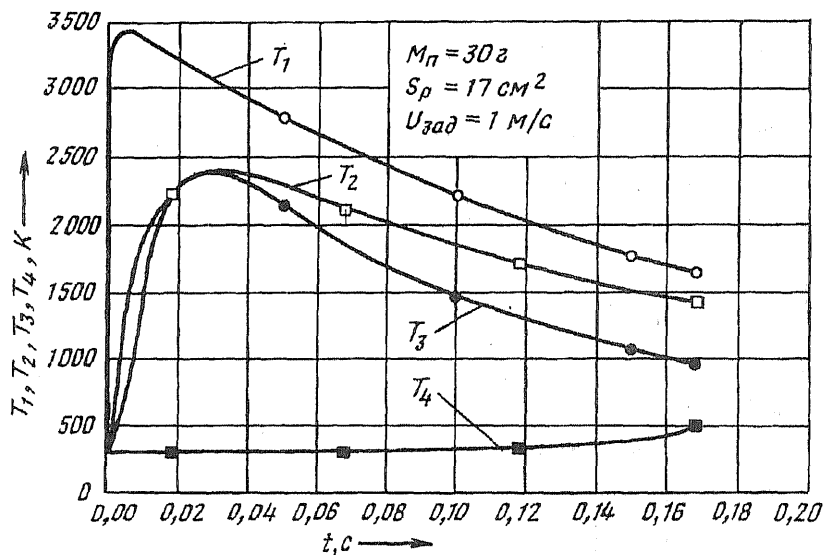


Рис. 20.35

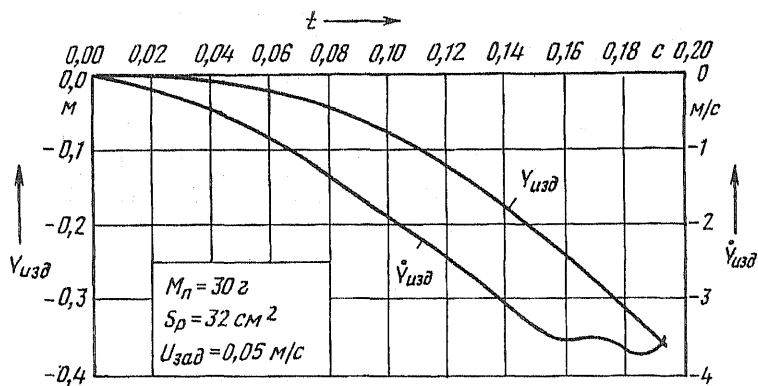


Рис. 20.36

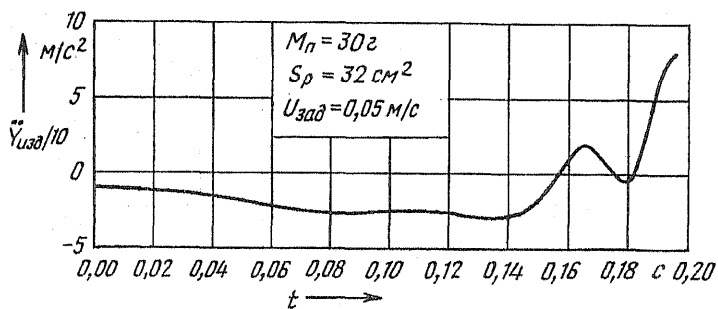


Рис. 20.37

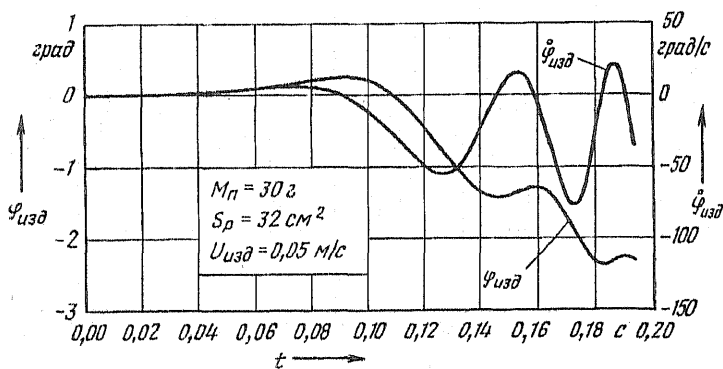


Рис. 20.38

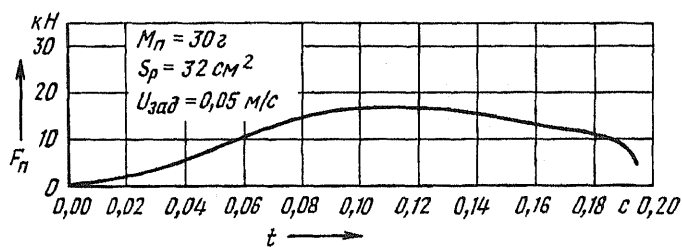


Рис. 20.39

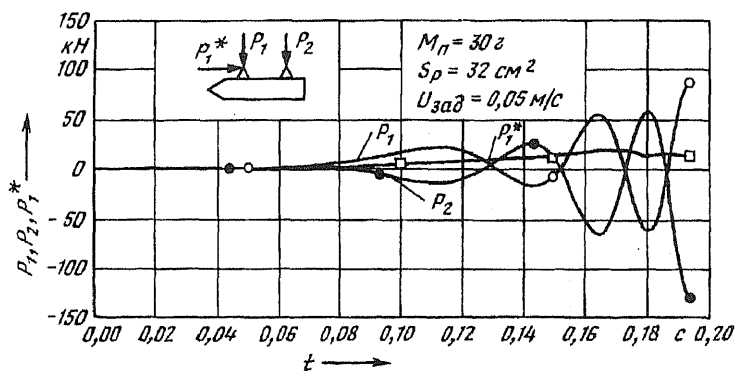


Рис. 20.40

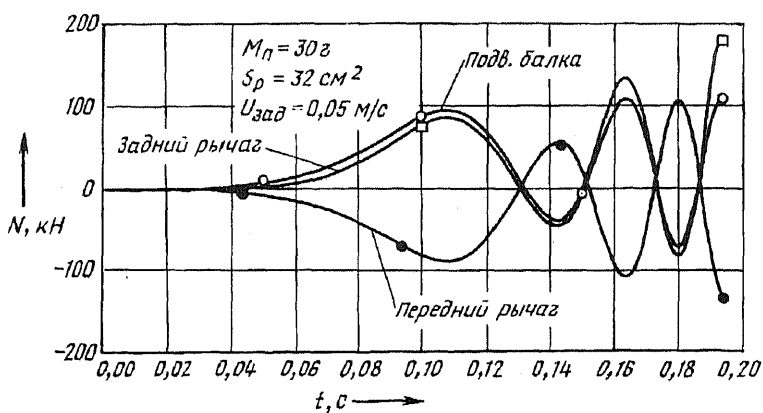


Рис. 20.41

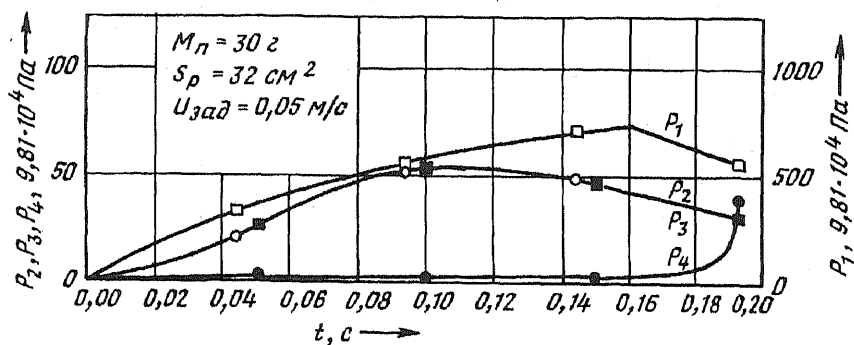


Рис. 20.42

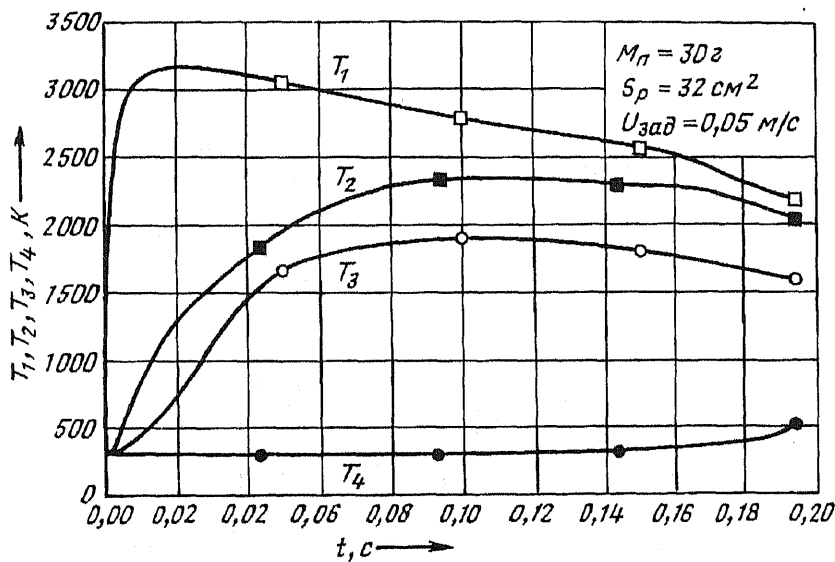


Рис. 20.43

На рис. 20.44 — 20.51 — вариант для случая $M_n = 20 \text{ г}$, $S_p = 36,5 \text{ см}^2$, $U_{\text{зад}} = 1 \text{ м/с}$;

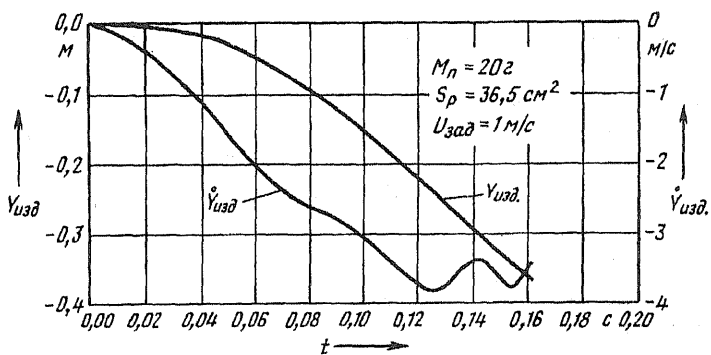


Рис. 20.44

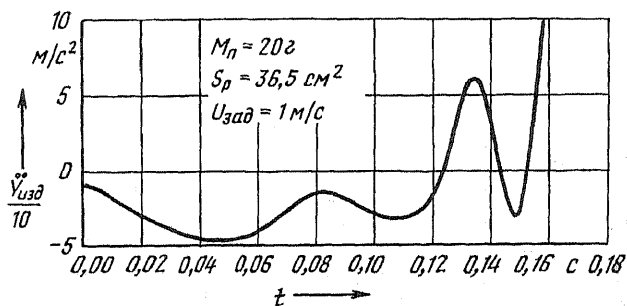


Рис. 20.45

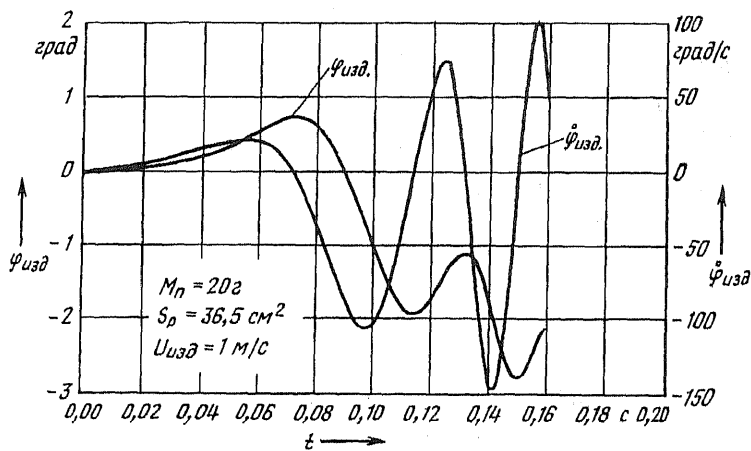


Рис. 20.46

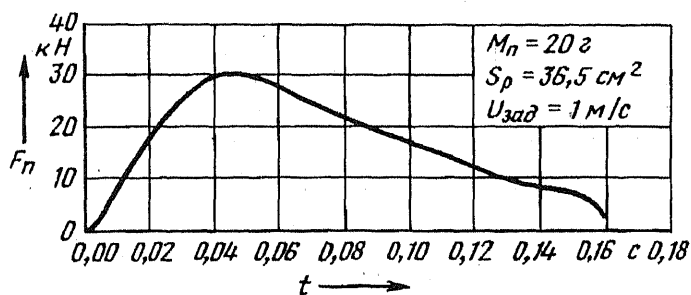


Рис. 20.47

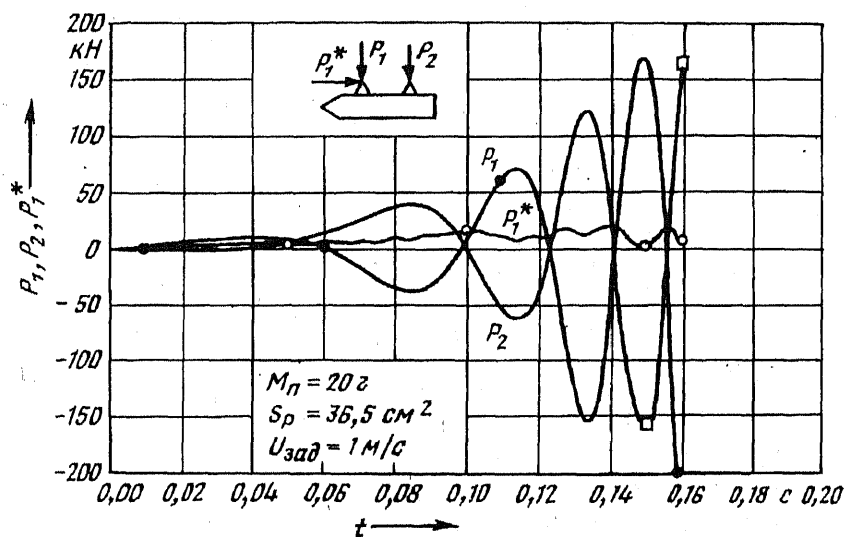


Рис. 20.48

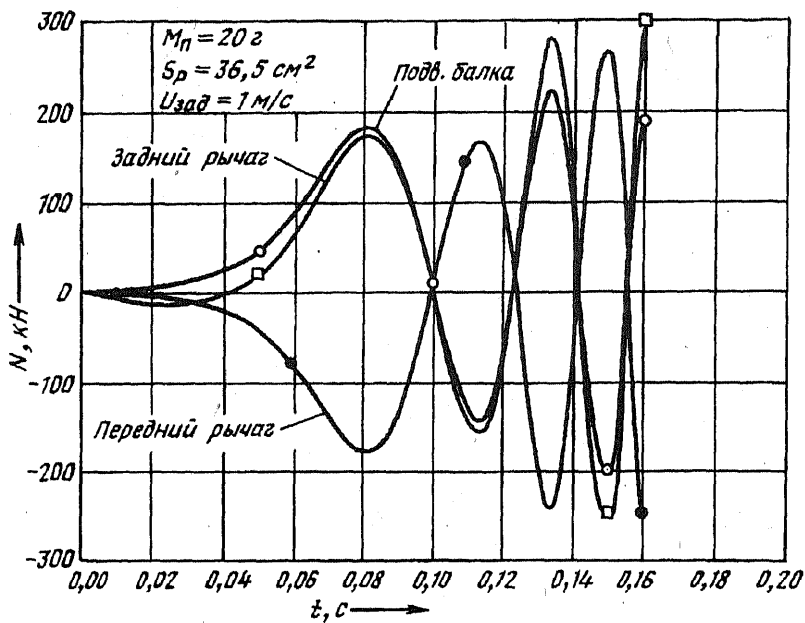


Рис. 20.49

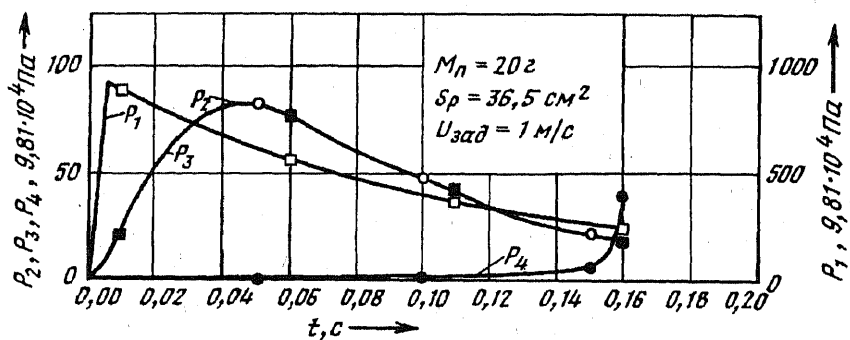


Рис. 20.50

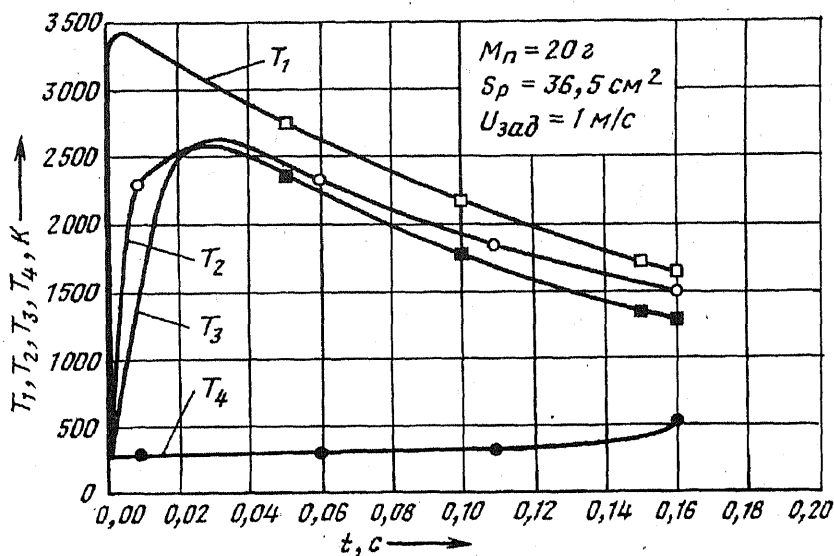


Рис. 20.51

На рис. 20.52 — 20.59 — вариант для случая $M_n = 20 \text{ г}$, $S_p = 50 \text{ см}^2$, $U_{зад} = 0,05 \text{ м/с}$.

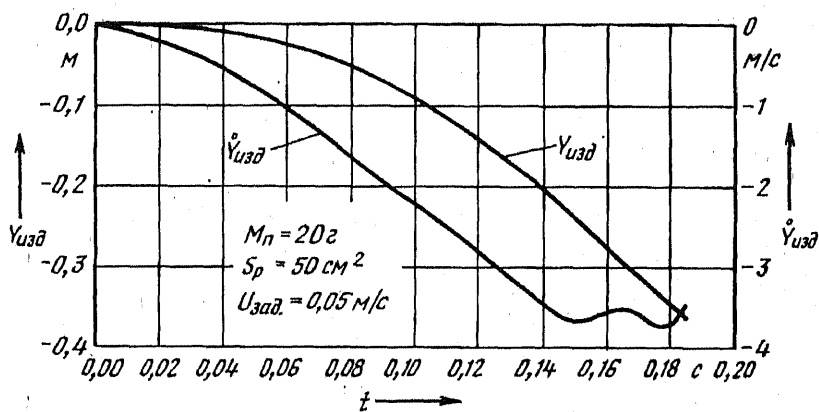


Рис. 20.52

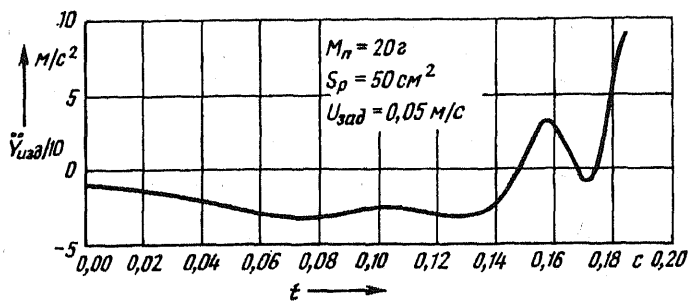


Рис. 20.53

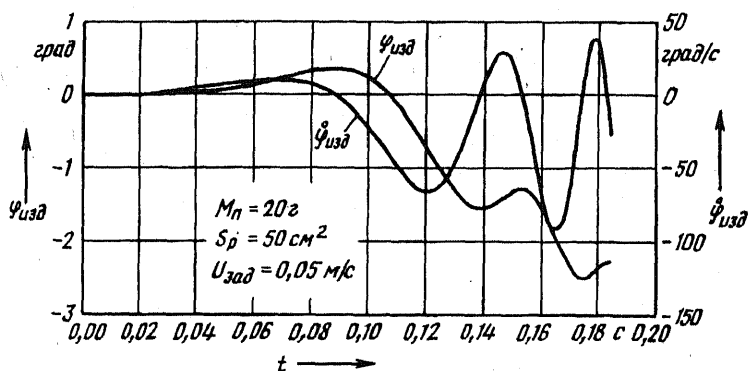


Рис. 20.54

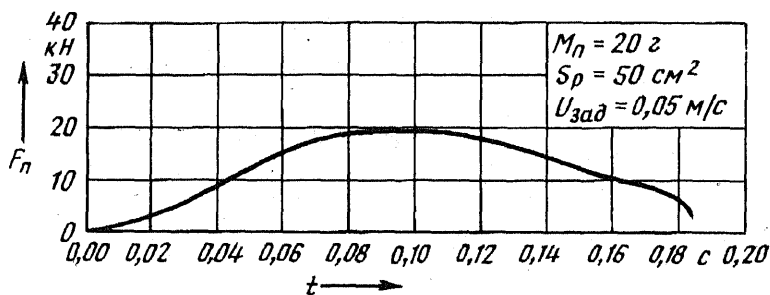


Рис. 20.55

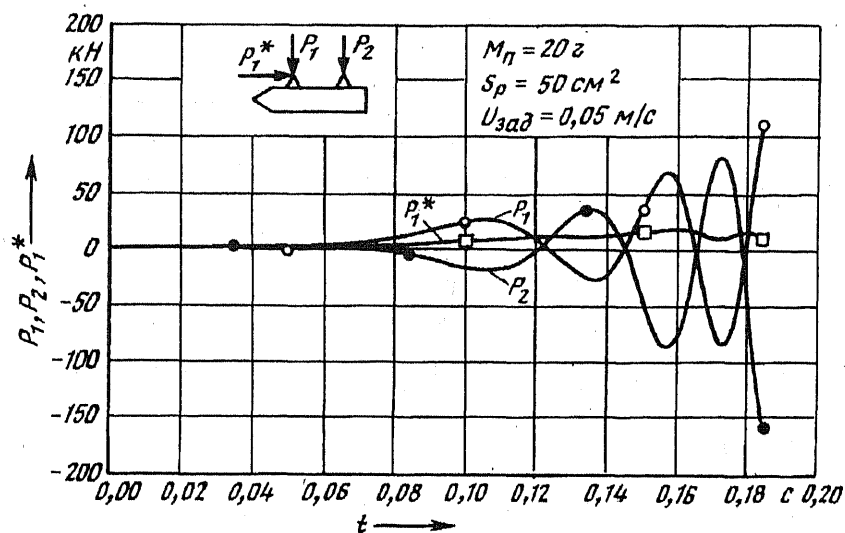


Рис. 20.56

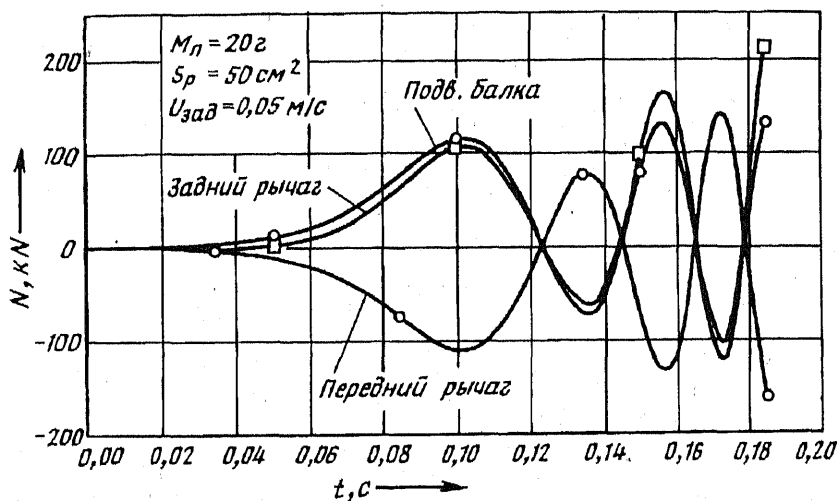


Рис. 20.57

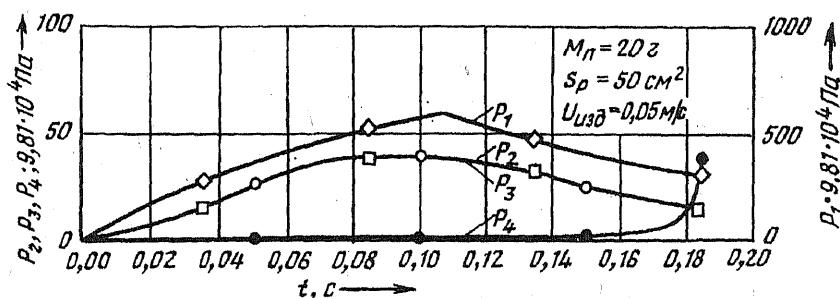


Рис. 20.58

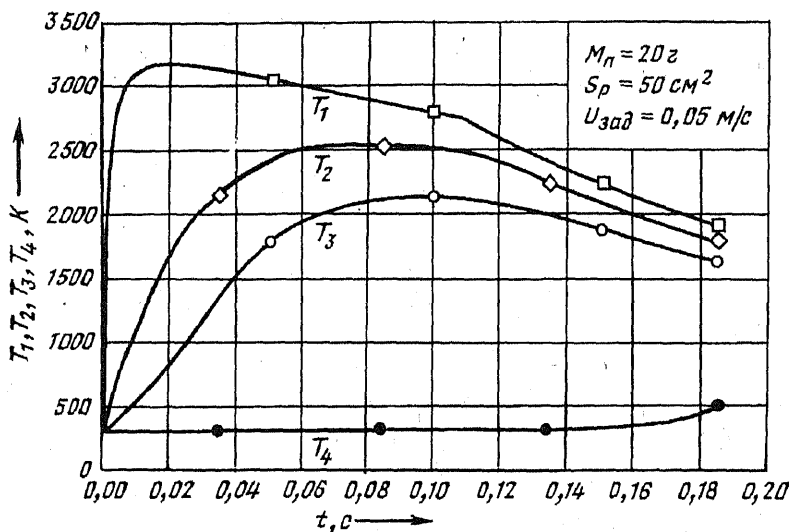


Рис. 20.59

Результаты динамического анализа использованы в дальнейшем при оптимизационном динамическом синтезе параметров упругого механизма АКУ и привода (см. главу 21).

Наряду с динамическим анализом упругих свойств механизма АКУ и оценкой их влияния на параметры отделения, проверено математическое моделирование на ЭВМ динамики отделения упругого изделия с последующим анализом, оценкой упругих свойств изделия и их влияния на параметры отделения.

При расчетах на ЭВМ были приняты следующие исходные данные по отделяемому изделию:

- длины участков: $l_1 = 2,22$ м; $l_2 = 1,07$ м; $l_3 = 0,860$ м;
- плотности единицы участков: $\rho_1 F_1 = 88$ кг/м; $\rho_2 F_2 = 210$ кг/м; $\rho_3 F_3 = 120$ кг/м;
- жесткости участков на изгиб: $E_1 J_1 = 6,5 \cdot 10^6$ Н · м²; $E_2 J_2 = 1,1 \cdot 10^7$ Н · м²; $E_3 J_3 = 4,7 \cdot 10^6$ Н · м²;
- расстояния до бугелей от носовой части изделия: $l_{S1} = 0,4$ м; $l_{S2} = 0,67$ м;
- расстояние до центра масс: $l_{ц.м} = 2,55$ м;
- масса изделия: $m = 528$ кг;
- моменты инерции вокруг центра масс: $J = 600$ кг · м².

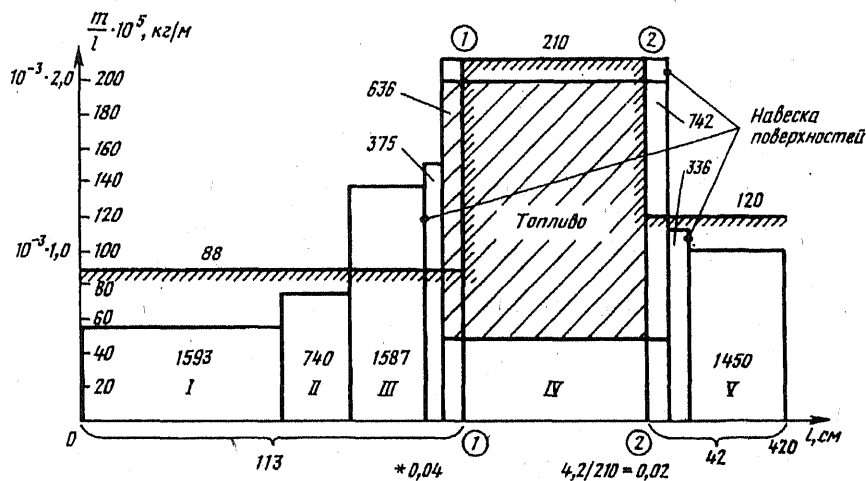


Рис. 20.60

Распределение массы по длине изделия показано на рис. 20.60, а распределение жесткостей по длине изделия показано на рис. 20.61.

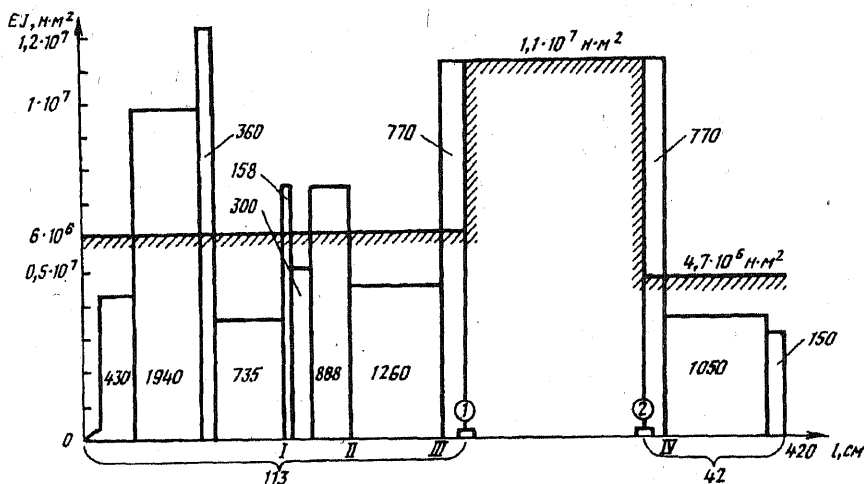


Рис. 20.61

Исходные данные по механизму АКУ:

— жесткости рычагов: $C_1 = 1,67 \cdot 10^8$ Н/м; $C_2 = 0,3 \cdot 10^8$ Н/м;
 $C_3 = 0,547 \cdot 10^8$ Н/м; $C_6 = 1,67 \cdot 10^8$ Н/м; $C_8 = 1,67 \cdot 10^8$ Н/м;

— геометрические размеры звеньев: длины рычагов $a_1 = 0,6004$ м; $a_2 = 0,4855$ м; $a_5 = 0,45028$; $a_1^* = 0,11166$ м; $|AD| = 0,955$ м;

$\alpha = 1,1869$ рад; $\varphi_{10} = 0,03665$ рад; $\varphi_{20} = 0,04533$ рад;
 $\varphi_{30} = 0$; $\varphi_{50} = 0,286$ рад.

Результаты расчета и динамического исследования представлены на рис. 20.62 — 20.85.

На рис. 20.62 приведены графики, иллюстрирующие изменение собственных частот колебаний изделия ω_i в зависимости от времени отделения T . Графики построены для первых трех собственных частот $\omega_i = 1, 2, 3$.

Из рис. 20.62 видно, что изменение упругих свойств механизма АКУ при раскрытии рычагов оказывает наибольшее влияние на вторую и третью собственные частоты ω_2, ω_3 .

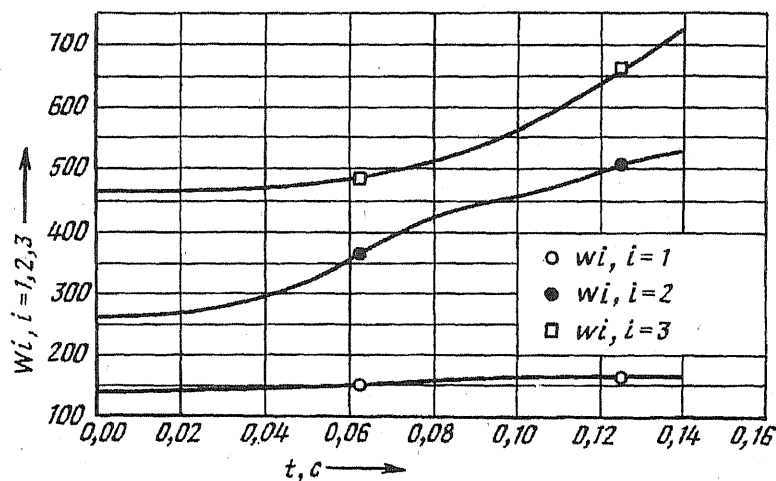


Рис. 20.62

На рис. 20.63 — 20.65 изображены собственные функции системы, вычисляемые в узлах подвеса изделия: $\chi_{1i}(l_1)$ — в переднем, $\chi_{2i}(l_2)$ — в заднем узлах. На рис. 20.63 даны собственные функции первой гармоники колебаний $i = 1$, на рис. 20.64 — второй $i = 2$, а на рис. 20.65 третьей $i = 3$. Из ри-

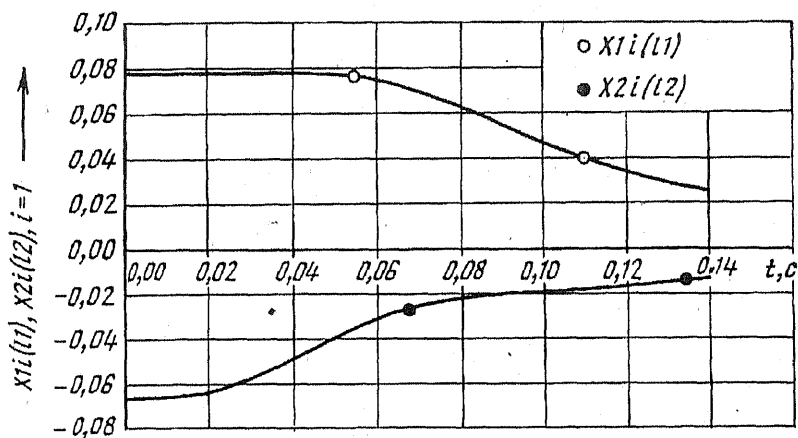


Рис. 20.63

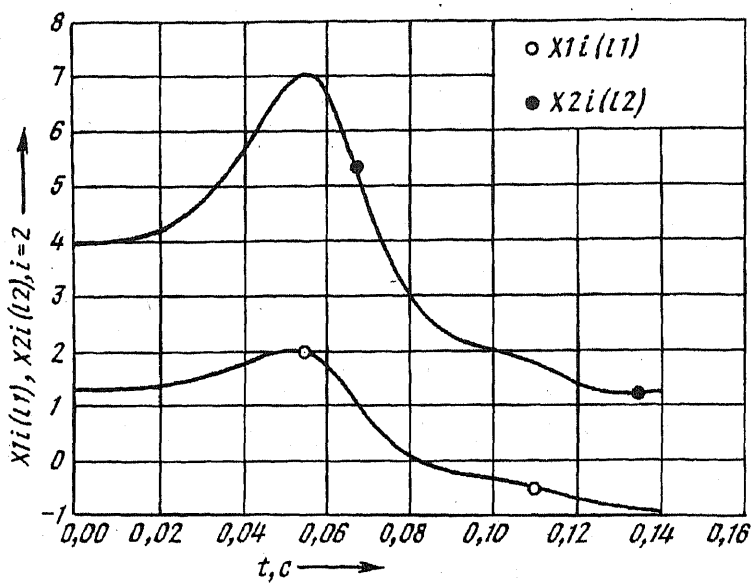


Рис. 20.64

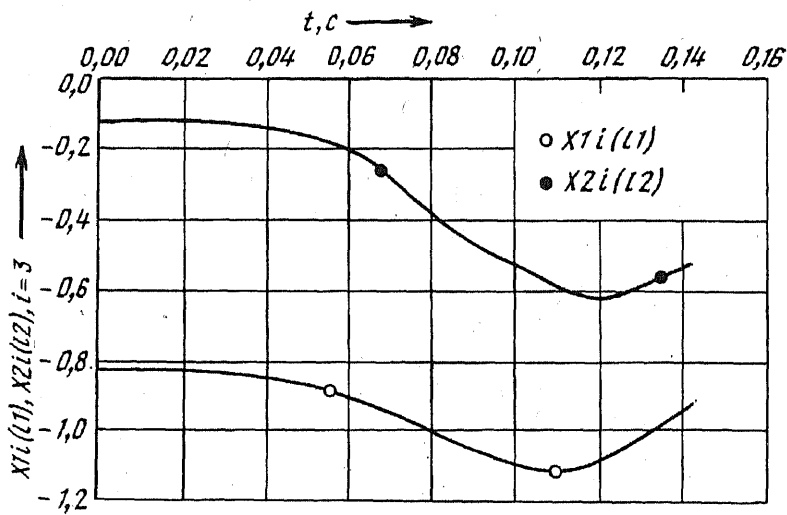


Рис. 20.65

сунков видно, что собственные колебательные свойства системы изменяются при отделении в значительной степени, и этими изменениями пренебречь нельзя.

На рис. 20.66 показано распределение амплитуд колебаний изделия по длине корпуса. При этом маркерами выделены значения, соответствующие собственным функциям в узлах подвеса изделия. Каждая кривая построена для i -й гармонике колебаний, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Первые 3 гармоник указаны на рисунке.

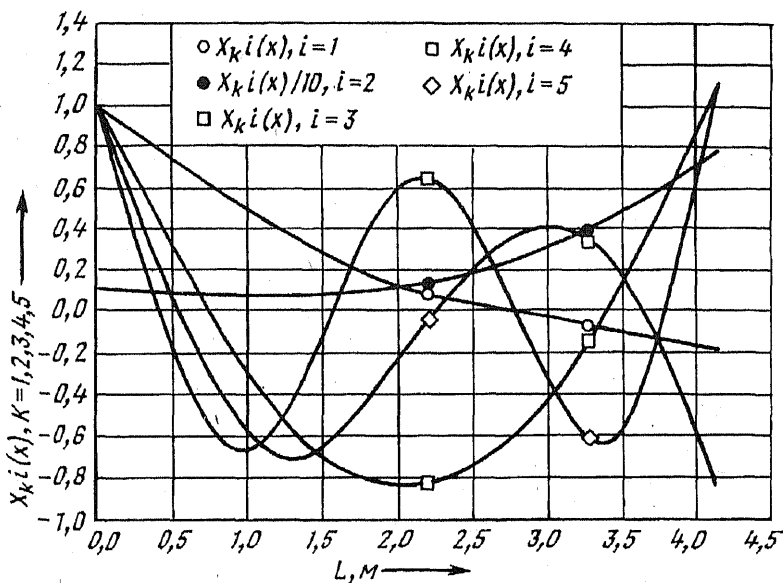


Рис. 20.66

На рис. 20.67 иллюстрируется характер собственной функции 2-й гармоник колебаний в различные моменты времени T .

На рис. 20.68 выведены 3 первых гармоник функции $U_i(t)$ $i = 1, 2, 3$ (на графике обозначены $UN(1)$ — первая гармоника, $UN(2)$ — вторая, $UN(3)$ — третья). Из графиков видно, что основной вклад в колебательное движение вносит первая гармоника.

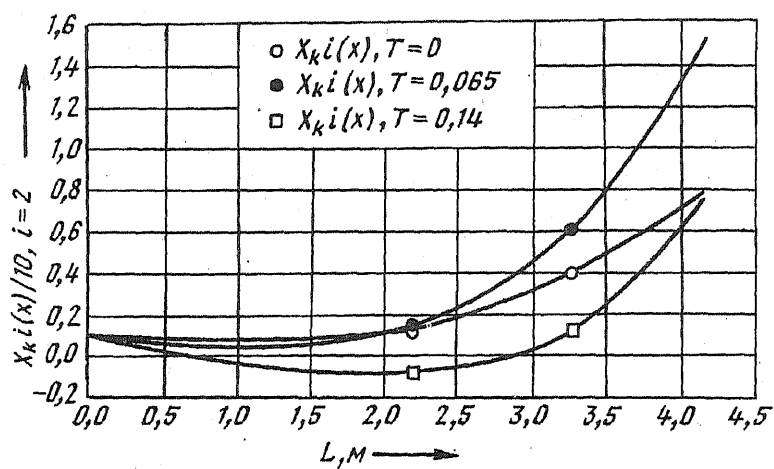


Рис. 20.67

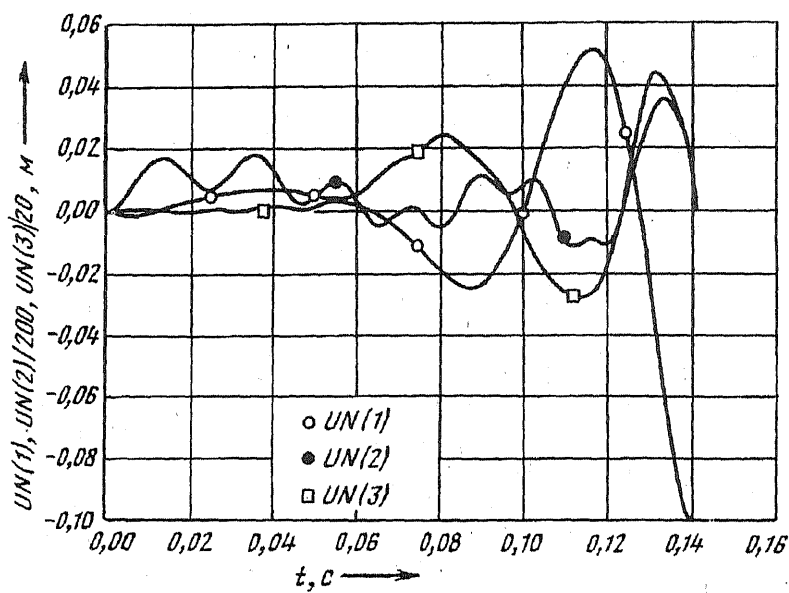


Рис. 20.68

На рис. 20.69 даны графики перемещения узлов подвеса $U1N$ — переднего, $U2N$ — заднего) в процессе колебаний изделия.

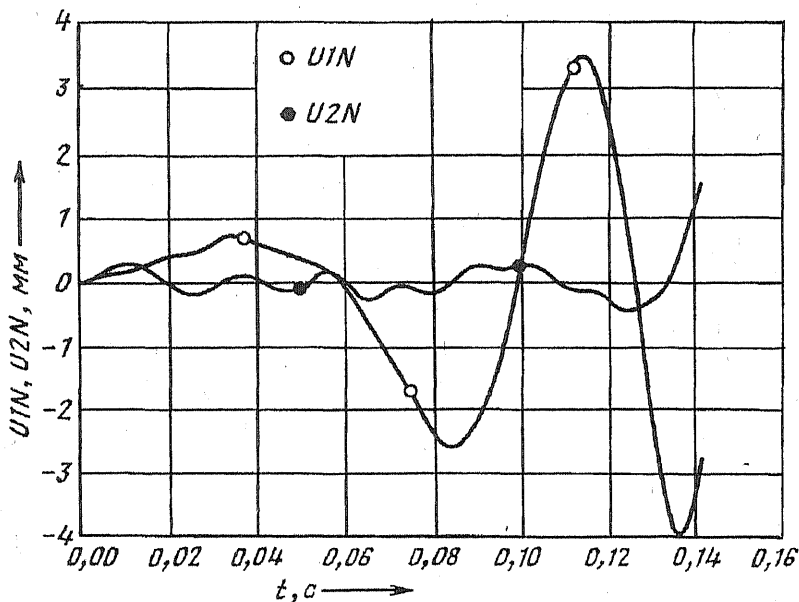


Рис. 20.69

Здесь видно, что максимальных значений перемещения достигают в переднем узле подвеса.

Рис. 20.70 свидетельствует о том, что достаточно учитывать лишь первые три гармоники колебаний. Вклад четвертой гармоники $UN 10$ (4) и пятой гармоники $UN 10$ (5) сравнительно мал. Об этом свидетельствует практически полное совпадение кривых перемещений, одна из которых построена с учетом пяти первых гармоник — $U1N$, а другая — трех.

На рис. 20.71 показаны графики скоростей колебательных движений в переднем $U1NT$ и заднем $U2NT$ узлах подвеса.

На рис. 20.72 — 20.77 дается сравнение выходных параметров отделения изделия, вычисляемых с учетом и без учета упругих свойств изделия.

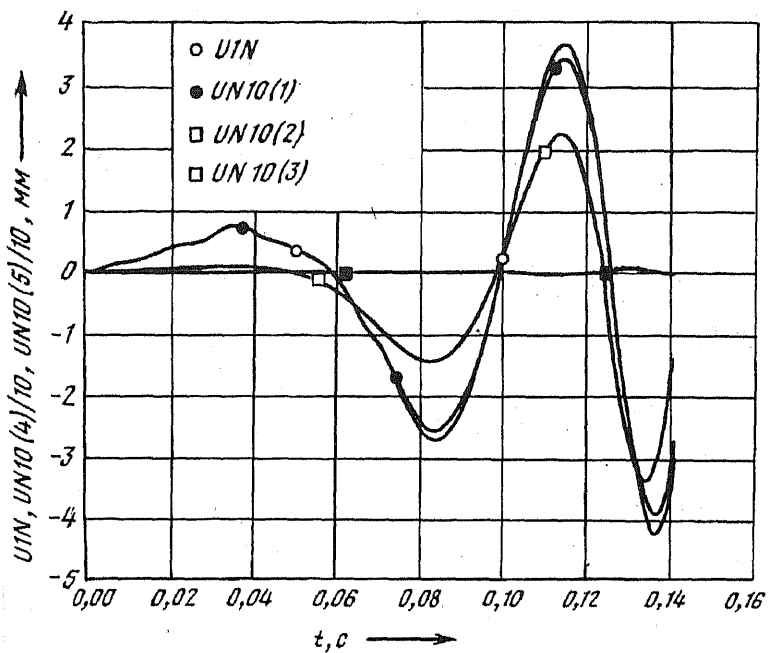


Рис. 20.70

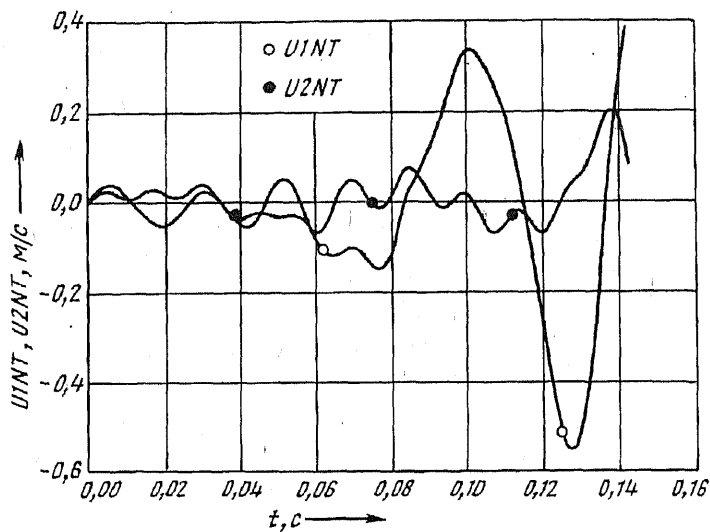


Рис. 20.71

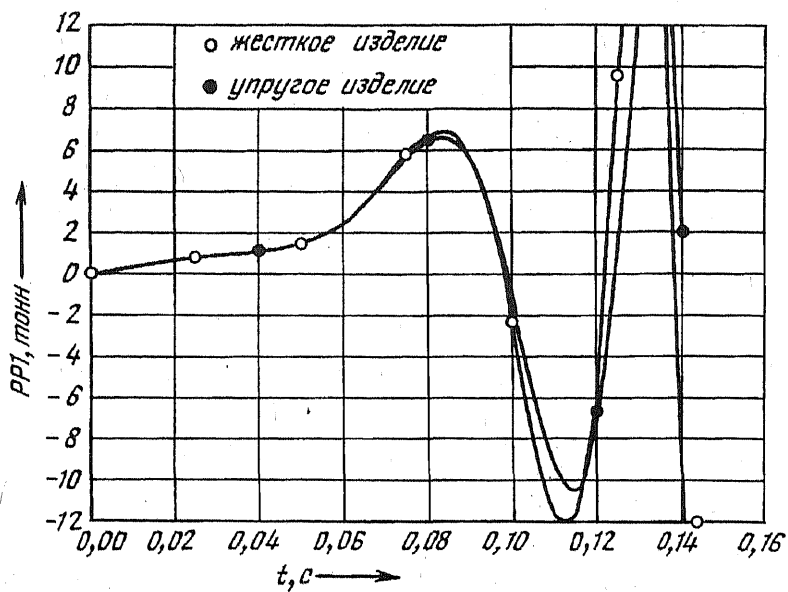


Рис. 20.72

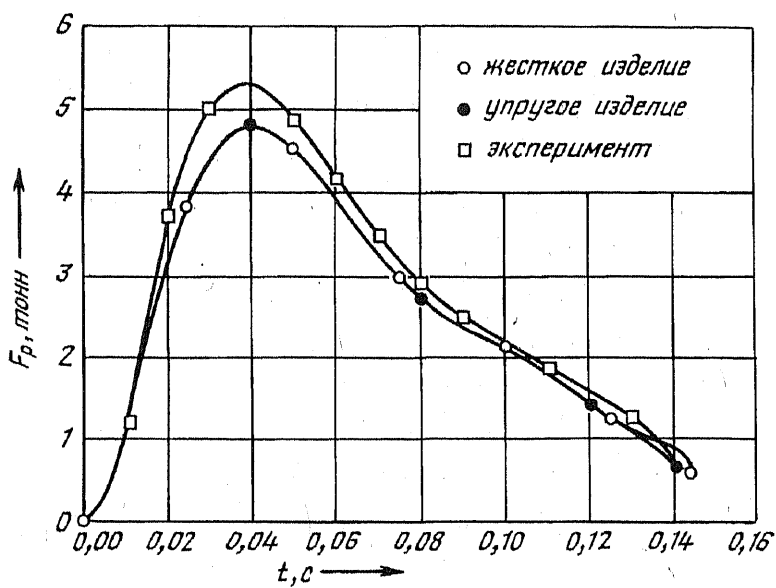


Рис. 20.73

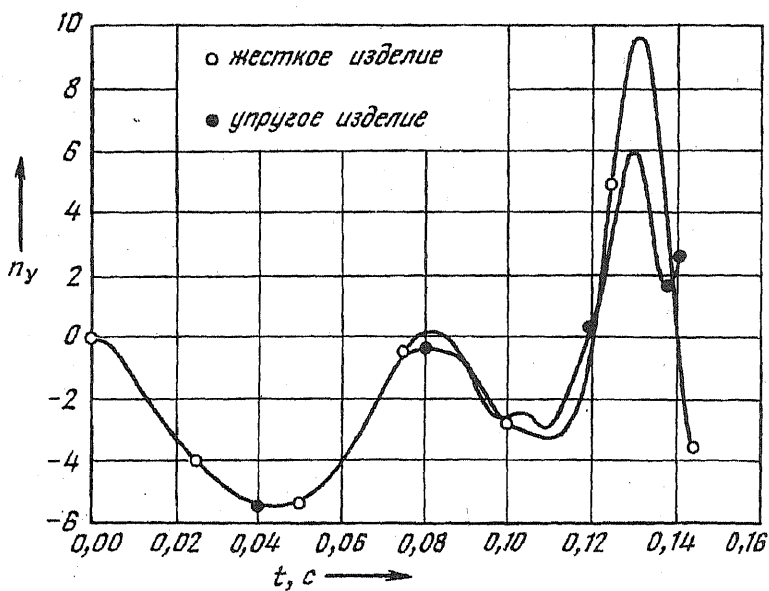


Рис. 20.74

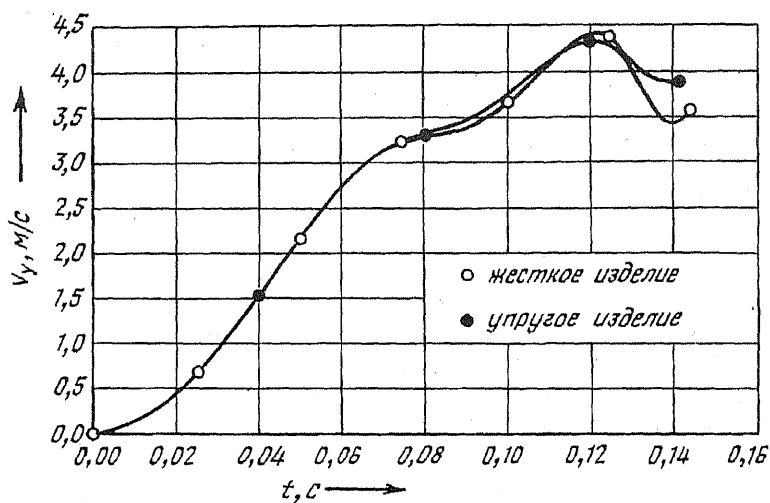


Рис. 20.75

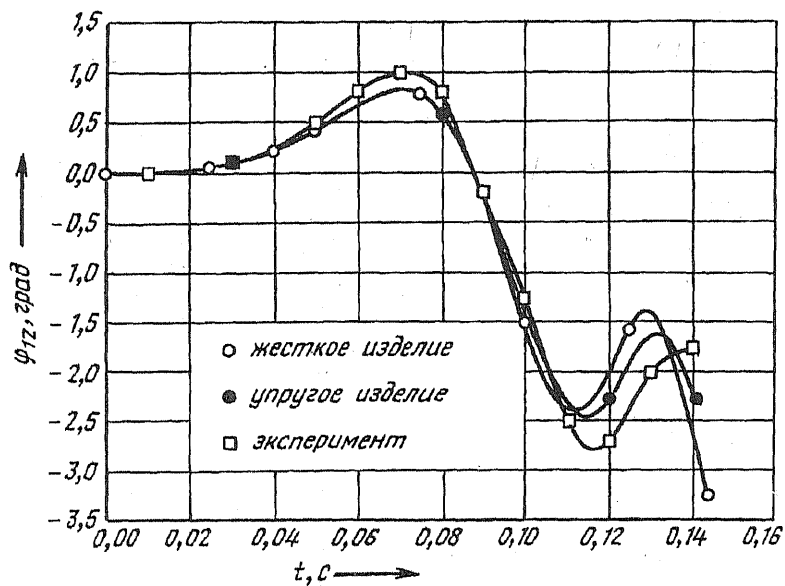


Рис. 20.76

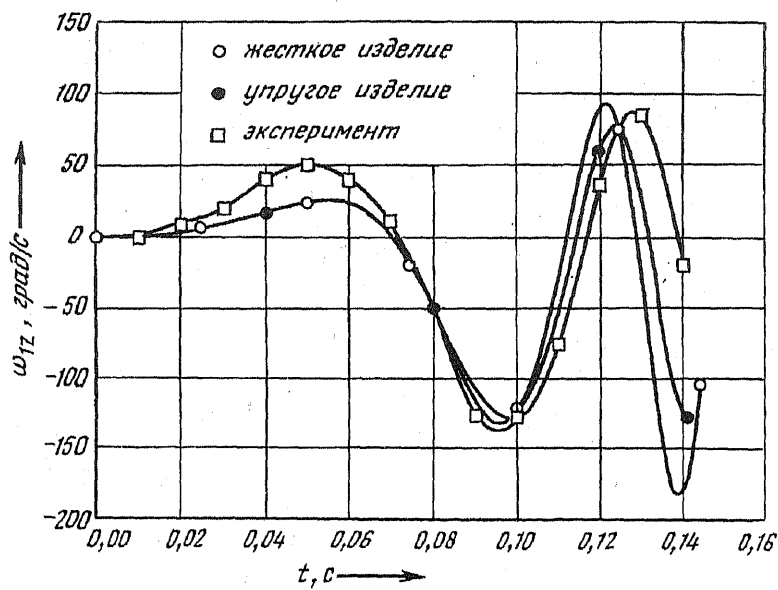


Рис. 20.77

На рис. 20.78 — 20.85 приведены эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил по длине изделия для разных моментов времени. На рис. 20.84 — 20.85 эти эпюры построены для свободного изделия, не связанного с механизмом АКУ. Полученные результаты могут быть использованы при прочностном расчете и конструировании отделяемого изделия и его узлов подвески.

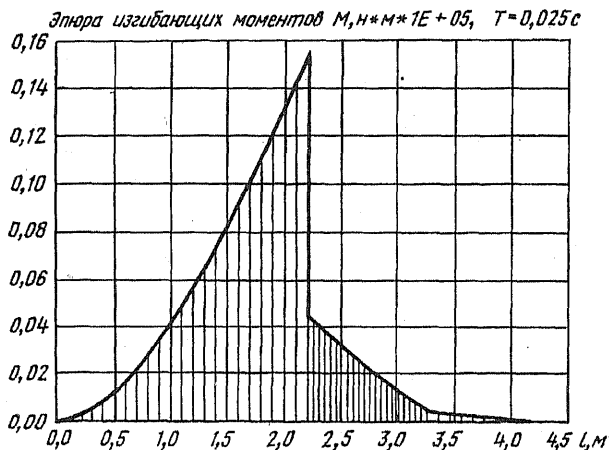


Рис. 20.78

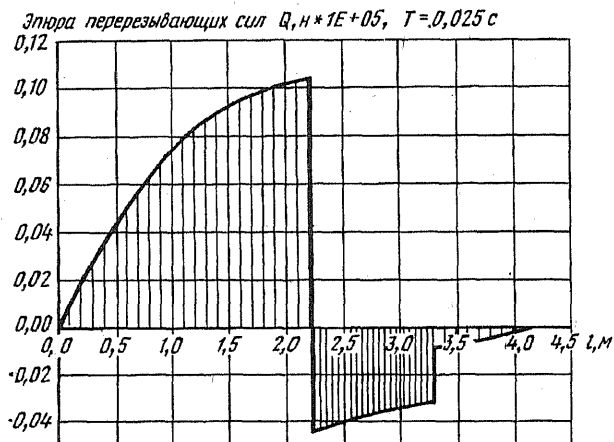


Рис. 20.79

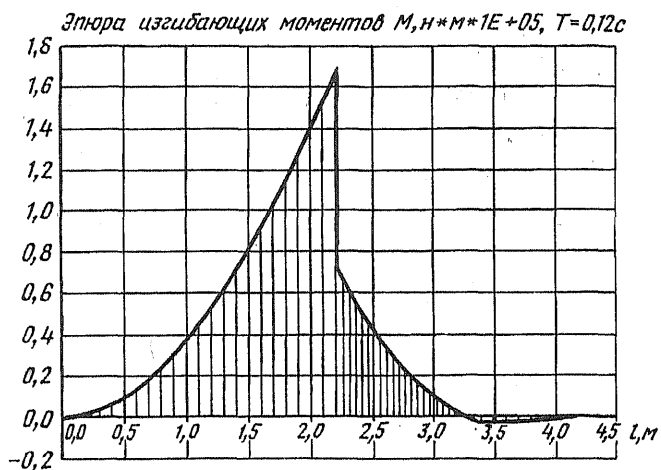


Рис. 20.80

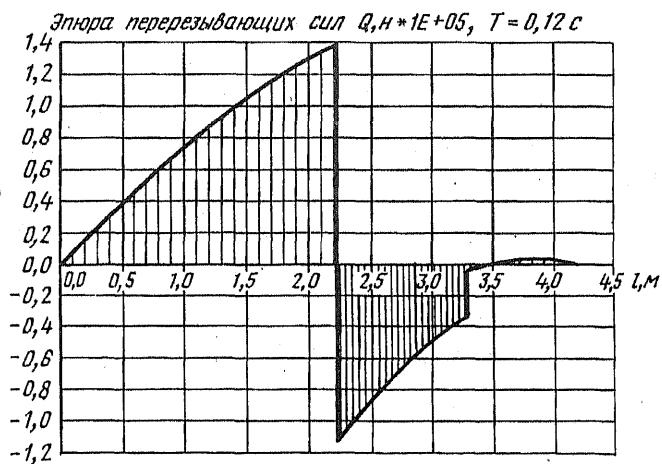


Рис. 20.81

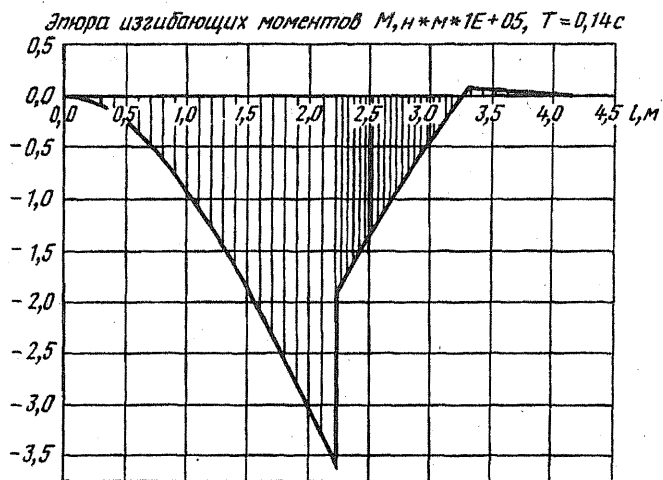


Рис. 20.82

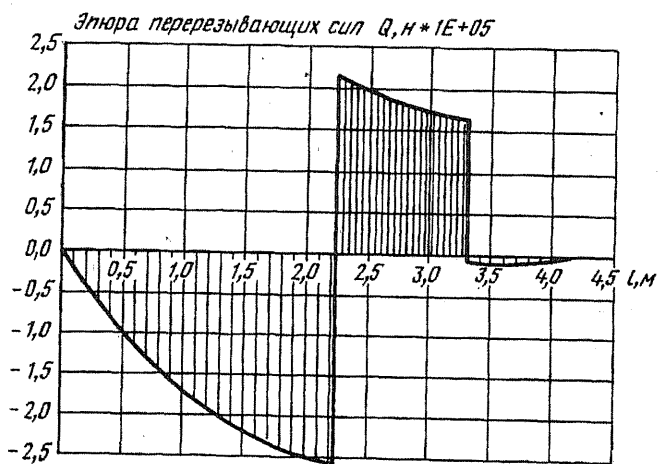


Рис. 20.83

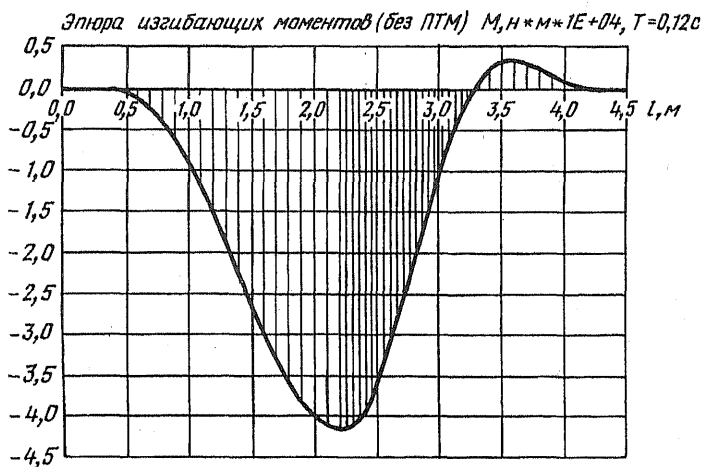


Рис. 20.84

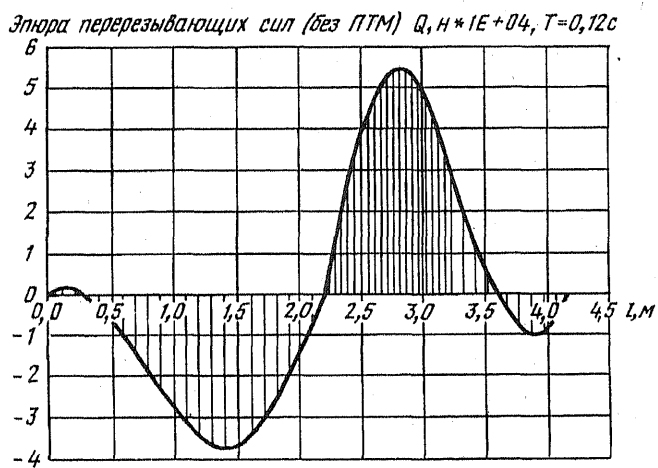


Рис. 20.85

Глава 21. СИСТЕМА ОПТИМИЗАЦИОННОГО ДИНАМИЧЕСКОГО СИНТЕЗА МЕХАНИЗМОВ АКУ

Исследование динамических процессов в системе: «упругое крыло самолета-носителя — упругий механизм установки (АКУ) — упругое изделие — силовой привод» приобретает все большее значение как для расчета системы на прочность, жесткость и надежность, так и для определения возмущенного состояния системы в конечный момент отделения, характеризующегося условиями нормального старта. Конечным результатом решения указанной задачи является оптимизация параметров составляющих систему частей. Для установли (АКУ) это означает разработку и создание конструкции минимальной массы при условии выполнения всех требований к процессу отделения, обеспечивающих нормальный старт.

Поставленная задача относится к задачам оптимизационного динамического синтеза установок ЛА (см. табл. 0.2).

Задача оптимизации в общем виде заключается в нахождении таких значений параметров системы, которые делают оптимальным какое-либо свойство системы. Для этого строится так называемая целевая функция, которая выражает данное свойство. Целевая функция зависит от оптимизируемых параметров, и задача оптимизации заключается в нахождении таких значений параметров, при которых целевая функция приобретает минимальное (максимальное) значение.

Блок-схема оптимизационного динамического синтеза механизмов АКУ приведена на рис. 21.1. На схеме буквами обозначено: φ — угол закрутки крыла; Y — вертикальное смещение крыла; N_1 , N_1^* , N_2 , N_2^* — усилия на крыло со стороны механизма АКУ; P_1 , P_2 , P_1^* — усилия на изделие со стороны механизма; U_1 , U_2 , U_1^* — перемещение точек подвески изделия; X_{Π} , $\dot{X}_{\Pi}$ — перемещение и скорость перемещения штока привода; F_{Π} — усилие, развиваемое приводом; Y , ω_z — ограничения на параметры отделения изделия. Как видно из блок-схемы, рассмотрена сложная динамическая система: «упругое крыло самолета-носителя — упругий механизм установки (АКУ) — упругое изделие — силовой привод», каждый из элементов которой

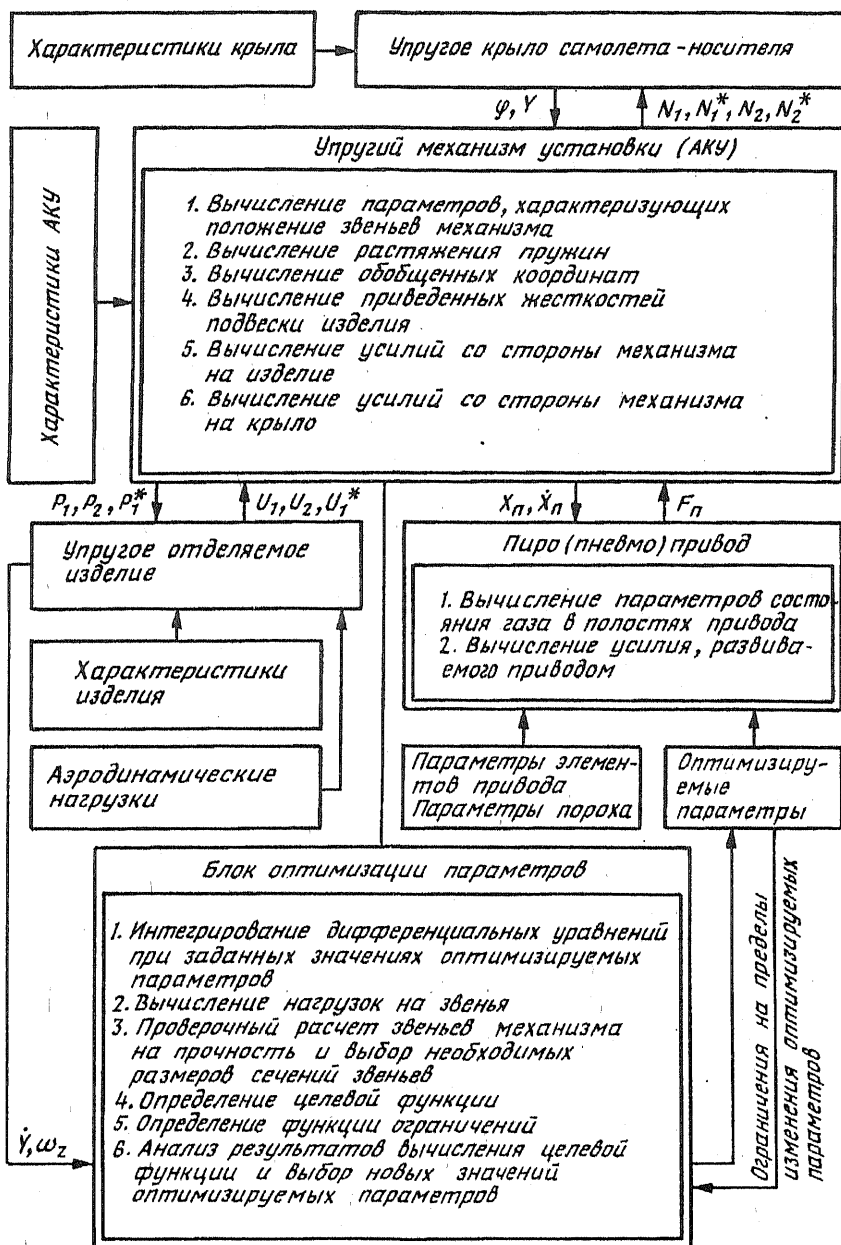


Рис. 21.1

связан с блоком оптимизации параметров. Схема реализована в виде системы алгоритмов, пакета прикладных программ для ЭВМ, построенного по модульному принципу и являющегося основой системы автоматизированного проектирования механизмов АКУ. Материалы по оптимизационному динамическому синтезу механизмов АКУ излагаются здесь впервые, поскольку другие аналогичные разработки отсутствуют или недостаточно проработаны.

Настоящая глава состоит из двух частей, соответствующих двум подходам к решению задачи оптимизационного динамического синтеза.

В первой части (см. § 21.1) на основе метода динамического программирования решена краевая задача по оценке области возможных значений вектора возмущенного состояния динамической системы [24]. Здесь под вектором возмущенного состояния динамической системы понимается вектор, компонентами которого являются случайные составляющие обобщенных координат, определяющих положение тел системы в пространстве и их первые производные. В нашем случае это угол и угловая скорость отделяемого изделия в конце катапультирования.

Рациональный выбор параметров конструкции динамической системы позволяет создать такую оптимальную динамическую систему, которая обеспечивает минимальное значение компонент вектора возмущенного состояния в конечный момент времени при условии выполнения ограничений на параметры отделения.

Предложенный подход позволяет «стянуть исследуемую систему в точку», т.е. найти такие параметры системы, которые, обеспечивая минимум целевой функции, строго соответствуют установленным выходным параметрам в конце катапультирования.

Разработанные принципы, метод, алгоритм программное обеспечение оптимизационного динамического синтеза носят общий характер и могут быть применены к любой сложной динамической системе.

Во второй части (§ 21.2) решена задача оптимизационного динамического синтеза механизмов АКУ как составной части сложной динамической системы: «упругое крыло самолета-носителя — упругий механизм установки — упругое изделие — си-

ловой привод” (рис. 21.1) [26.27]. В качестве целевой функции принята суммарная масса элементов установки. Рациональным выбором параметров механизма установки и силового привода обеспечивается минимизация целевой функции при условии соблюдения требований к параметрам отделения, обеспечивающим условия нормального старта. В качестве метода оптимизации выбран метод сопряженных градиентов с изменением масштабов переменных.

На основе разработанных принципов и метода оптимизационного динамического синтеза механизмов АКУ составлена система алгоритмов, создана единая программа динамического синтеза, включающая в себя программы динамического анализа механизмов установок, термогазодинамических процессов в силовом приводе и собственно программы оптимизационного динамического синтеза. На ЭВМ получена большая серия результатов динамического синтеза, проведен анализ результатов моделирования и сделаны практические выводы.

§ 21.1. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТИ СОСТОЯНИЙ СЛОЖНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ АКУ

Как уже было сказано, при исследовании сложных динамических систем возникает необходимость оценить область возможных значений вектора возмущенного состояния системы. Для случая исследования процесса катапультирования отделяемых изделий компонентами вектора возмущенного состояния могут служить угол и угловая скорость отделяемого изделия в конце катапультирования, являющиеся одними из важнейших параметров отделения и определяющих условия нормального старта. В принципе компонентами вектора возмущенного состояния могут служить и другие сочетания параметров отделения.

В том случае, если за счет рационального выбора параметров конструкции исследуемой динамической системы будет выбран такой, которая обеспечивает минимальное значение компонент вектора возмущенного состояния в конечный момент времени при условии выполнения требуемых ограничений, то такую динамическую систему можно считать оптимальной.

Разработке методов, алгоритма и программного обеспечения описанной задачи и посвящен данный раздел.

Для динамической системы второго порядка удалось получить решение в аналитическом виде. Проведенное затем моделирование на ЭВМ позволило сформировать требования к облик динамической системы (АКУ) и силового привода.

Полученные результаты следует рассматривать как первый этап формирования оптимальной динамической системы (этап формирования требований к системе). Завершающий этап рассмотрен в § 21.2

21.1.1. Постановка задачи

Исследуется динамическая система [24]:

$$\dot{\varphi} = A(t)\varphi + Bf = \Phi(\varphi, f, t), \quad (21.1)$$

где $\varphi(t_0) = \varphi^0$; $a_{ij}(t)$, $j = 1, 2$ — непрерывные в классе C^1 функции; $a_{ij}(t) \in A \subset R^n$; A — замкнутое ограниченное множество; $t \in [t_0, T]$, $T = t_k$ — заданный конечный момент времени; B — постоянная размера 2×2 матрица.

Функция $f(\varphi)$ определена на отрезке $[t_0, T]$, интегрируемая и непрерывная в точках разрыва справа, удовлетворяет условию Липшица с постоянной $M > 0$: $||f(\varphi) - f(\varphi')|| < M ||\varphi - \varphi'||$, где $\varphi, \varphi' \in \Phi \subset R^n$; φ — n -мерный вектор выхода; Φ — заданное множество; $f(\varphi) \in F \subset R^m$, $m < n$; F — замкнутое ограниченное множество.

Требуется найти оптимальную пару (f^*, φ^*) из условия минимума функционала:

$$V = \int_{t_0}^T \psi(\varphi, f, t) dt \quad (21.2)$$

при граничных условиях:

$$V(\varphi(T), f, T) = \Theta(\varphi(T), T). \quad (21.3)$$

Решение задачи отыскивается методом динамического программирования.

21.1.2. Применение метода динамического программирования

Уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана (Г-Я-Б):

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \min_{f \in F} \left[\psi(\varphi, f, t) + \left[\frac{\partial S(\varphi, t)}{\partial \varphi} \right]^T \Phi(\varphi, f, t) \right], \quad (21.4)$$

при заданном оптимальном f^* принимает вид:

$$-\frac{\partial S(\varphi(t), t)}{\partial t} = \psi(\varphi^*, f^*, t) + \left[\frac{\partial S(\varphi^*, t)}{\partial \varphi^*} \right]^T f(\varphi^*, U^*, t), \quad (21.5)$$

причем выполняется:

$$\lambda(t) = \frac{\partial S(\varphi, t)}{\partial \varphi}, \quad (21.6)$$

$\lambda(t)$ — множители Лагранжа в функционале:

$$S(\varphi, t) = \Theta(\varphi, t) \left|_{t_0}^{t_k=T} + \int_{t_0}^T [\psi(\varphi, f, t) + \lambda^T(t) (\Phi(\varphi, f, t) - \dot{\varphi})] dt. \quad (21.7)$$

Условие оптимальности (необходимое условие слабого экстремума) для рассматриваемой системы имеет вид:

$$S(\varphi(t), t) = \min_{f \in F} \left\{ \Theta(t_k) + \int_{t_0}^{T=t_k} \psi(\varphi, f, t) dt, \quad t_0 \leq t \leq T; \quad (21.8) \right.$$

$$\Theta(t_k) = T - t_k = 0;$$

F — класс кусочно-непрерывных функций;

$$B^T = (b_1, b_2);$$

$$\psi(\varphi, f, t) = C_0 + C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \frac{1}{2} \mu f^2,$$

где C_0, C_1, C_2, μ — числа.

Уравнение Г-Я-Б принимает следующий вид:

$$0 = \min \left[C_0 + C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \frac{1}{2} \mu f^2 + \frac{\partial s}{\partial \varphi_1} (a_{11} \varphi_1 + a_{12} \varphi_2 + b_1 f) + \frac{\partial s}{\partial \varphi_2} (C_{21} \varphi_1 + a_{22} \varphi_2 + b_2 f) \right], \quad (21.9)$$

откуда $f^* = -\frac{b_1}{\mu} \frac{\partial s}{\partial \varphi_1} - \frac{b_2}{\mu} \frac{\partial s}{\partial \varphi_2}$.

Подстановка f^* в (21.5) дает уравнение:

$$C_0 + C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \frac{1}{2} \mu f^{*2} + \frac{\partial s}{\partial \varphi_1} (a_{11} \varphi_1 + a_{12} \varphi_2 + b_1 f^*) + \frac{\partial s}{\partial \varphi_2} (a_{21} \varphi_1 + a_{22} \varphi_2 + b_2 f^*) = 0. \quad (21.10)$$

Выбирая

$$S = q_{11} \varphi_1^2 + q_{22} \varphi_2^2 - q_{12} \varphi_1 \varphi_2 + q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2,$$

перепишем уравнение (21.10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} C_0 + C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \frac{1}{2} \mu \left\{ \frac{b_1^2}{\mu^2} (2 q_{11} \varphi_1 + q_1 - q_{12} \varphi_2)^2 + \right. \\ \left. + \frac{b_1 b_2}{\mu^2} \left(4 q_{11} q_{22} \varphi_1 \varphi_2 + 2 q_1 q_{22} \varphi_2 - 2 q_{22} q_{12} \varphi_2^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{b_2^2}{\mu^2} \left(2 q_{22} \varphi_2 - q_{12} \varphi_1 + q_2 \right)^2 + \frac{b_1 b_2}{\mu^2} \left(- 2 q_{11} q_{12} \varphi_1^2 - \right. \right. \\ \left. - q_1 q_{12} \varphi_1 + q_{12}^2 \varphi_1 \varphi_2 - 2 q_{22} q_{12} \varphi_2^2 + q_{12}^2 \varphi_1 \varphi_2 - q_2 q_{12} \varphi_2 \right) \left. \right\} + \\ + 2 q_{11} a_{11} \varphi_1^2 + q_1 a_{11} \varphi_1 - q_{12} a_{11} \varphi_1 \varphi_2 + 2 q_{11} a_{12} \varphi_1 \varphi_2 + \\ + q_1 a_{12} \varphi_2 - q_{12} a_{12} \varphi_2^2 + b_1 (2 q_{11} \varphi_1 + q_1 - q_{12} \varphi_2) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[-\frac{b_1}{\mu} (2 q_{11} \varphi_1 + q_1 - q_{12} \varphi_2) - \frac{b_2}{\mu} (2 q_{22} \varphi_2 - q_{12} \varphi_1 + q_2) \right] + \\ & + (2 q_{22} \varphi_2 - q_{12} \varphi_1 + q_2) \cdot \left\{ a_{21} \varphi_1 + a_{22} \varphi_2 + b_2 \left(-\frac{b_1}{\mu} (2 q_{11} \varphi_1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + q_1 - q_{12} \varphi_2) - \frac{b_2}{\mu} (2 q_{22} \varphi_2 - q_{12} \varphi_1 + q_2) \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (21.11)$$

Решение (21.11) определим для частного случая: $q_{11} = q_{12} = q_{22} = 0$, что означает отыскание решения среди допустимых траекторий (экстремалей), удовлетворяющих лишь необходимым условиям оптимальности. В этом случае условием выполнения (21.11) является справедливость следующей системы:

$$\begin{aligned} C_0 + \frac{1}{2\mu} (b_1 q_1 + b_2 q_2) &= 0; \\ C_1 + q_1 a_{11} + q_2 a_{21} &= 0; \\ C_2 + q_1 a_{12} + q_2 a_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (21.12)$$

Решением системы уравнений (21.12) является $\bar{q}^T$ — оптимальный вектор: $\bar{q}^T = (q_1^*, q_2^*)$, а первое уравнение системы (21.12) ограничивает выбор коэффициентов b_1^*, b_2^* .

Для вещественных и различных собственных чисел матрицы A : λ_1, λ_2 решение системы (21.1) с учетом принятых упрощений для $S(\varphi(t), t)$, приводящих к условию $f^* = \text{const}$ записывается в виде:

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^2 C_{i,j}^0 \vartheta_i e^{\lambda_i t} + d_j; \quad j = 1, 2; \quad (21.13)$$

где ϑ_j — собственный вектор матрицы A для собственного числа λ_i ; d_j — частные решения (числа).

Рассмотрим уравнение (21.1) в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= -\varphi_1 + 2\varphi_2 + b_1 f^*, \\ \dot{\varphi}_2 &= -\varphi_1 - 4\varphi_2 + b_2 f^*,\end{aligned}\tag{21.14}$$

где в f^* значения q_{11} , q_{12} и q_{22} примем в частном случае равными нулю. Тогда собственные числа A : $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = -3$; выбирая $C_1 = 2$, $C_2 = -1$, из (21.12) получаем $q_1^* = 1$, $q_2^* = -0,5$; $b_1^* = 1$, $b_2^* = 4$, $C_0 = -\frac{1}{2}$ при $\mu = 1$.

Собственные векторы ϑ_i соответственно здесь принимают значения:

$$\vartheta_1^T = (1, -2); \quad \vartheta_2^T = (1, -1).$$

$$\text{Тогда } f^* = -\frac{b_1}{\mu} q_1^* - \frac{b_2}{\mu} q_2^* = -1 + \frac{4}{1} \cdot 0,5 = 1;$$

$$(q_{11} = q_{12} = q_{22} = 0).$$

Решения (21.13) при этом записываются в виде:

$$\begin{aligned}\varphi_1^*(t) &= C_1^0 e^{-2t} + C_2^0 e^{-3t} + d_1; \\ \varphi_2^*(t) &= -2C_1^0 e^{-2t} - C_2^0 e^{-3t} + d_2,\end{aligned}\tag{21.15}$$

где $C_{1,2}^0$ — постоянные, определяемые из начальных условий; d_1 , d_2 — частные решения (постоянные).

Значение функционала (21.8) при $t = t_k, t_0$ составляет:

$$S(t_k, \varphi(t_k)) = q_1 \varphi_1^k + q_2 \varphi_2^k + q_{11} \varphi_1^{k^2} + q_{22} \varphi_2^{k^2} - 2q_{12} \varphi_1^k \varphi_2^k;$$

$$S(t_0, \varphi^0) = q_1 \varphi_1^0 + q_2 \varphi_2^0 + \dots - 2q_{12} \varphi_1^0 \varphi_2^0.$$

В работе [24] представлена структурная блок-схема программы расчета, с помощью которой удастся оценить область возможных значений вектора возмущенного состояния системы и кратко описаны основные элементы программы.

В соответствии с разработанной программой на ЭВМ был рассчитан числовой пример. На рис. 21.2 построена область оптимальных отклонений координат φ_1 и φ_2 , характеризующих соответственно угол и угловую скорость вектора возмущенного состояния динамической системы для различных значений конечного момента времени t_k (показаны точками на кривых). Кривые N1 — N9 различаются начальными условиями φ_1^0 и φ_2^0 (указаны в скобках).

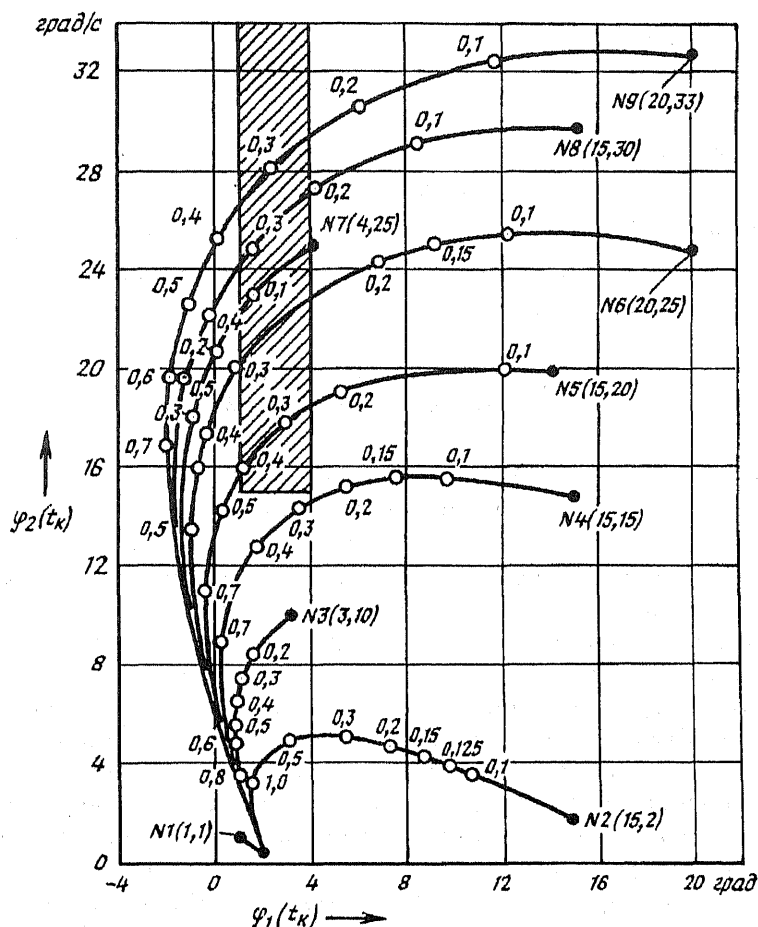


Рис. 21.2

Заштрихованной зоной отмечена область допустимых значений $\varphi_1(t_k)$ и $\varphi_2(t_k)$. Точки пересечения кривых с областью допустимых значений соответствуют вариантам оптимальных динамических систем при соответствующих данному числовому примеру ограничениях.

Таким образом, методом динамического программирования решена краевая задача. Выбор метода обусловлен необходимостью получать решение в функции координат (состояния) возмущаемой системы. Метод реализует необходимые условия слабого экстремума функционала (21.8), которые вместе с выполнением условий

$$q_{11} > 0; \quad q_{11}q_{22} - q_{12}^2 > 0$$

представляют достаточные условия слабого минимума, т.е. минимума в малой окрестности экстремалей φ_1^* , φ_2^* .

Следует отметить, что при синтезе оптимального возмущающего воздействия $f^*(\varphi_1, \varphi_2)$ необходимы отдельные исследования устойчивости возмущенных движений.

§ 21.2. ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ АКУ

21.2.1. Постановка задачи оптимизационного синтеза

Как известно, задача оптимизации в общем виде заключается в нахождении таких значений параметров системы, при которых целевая функция приобретает минимальное (максимальное) значение.

Существует два типа задач оптимизации: безусловной и условной. Задачи безусловной оптимизации — это такие, когда на область изменения параметров не накладывается никаких ограничений, а задачи условной оптимизации — такие, когда входные параметры должны удовлетворять каким-либо ограничениям или условиям.

Наиболее просты в решении задачи безусловной оптимизации. В настоящее время разработано большое число методов для их решения. Однако, если ограничения на область измене-

ния параметров выражены в виде неравенств, то существуют методы, позволяющие свести более сложную задачу условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации. Одним из таких методов является метод штрафных функций.

Сводя решение задач условной оптимизации к последовательному решению задачи безусловной оптимизации, метод штрафных функций дает исследователю весь тот богатый аппарат, который существует для решения задач безусловной оптимизации.

Общую схему построения алгоритмов поиска поясним на задаче минимизации функции $F(x)$ на некотором множестве X [22]. Формально эта задача эквивалентна задаче безусловной минимизации суммы:

$$F(x) + \delta(x), \quad \text{где} \quad \delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in X; \\ \infty, & \text{если } x \notin X. \end{cases}$$

По сути функция $\delta(x)$ является функцией штрафов. Поскольку она неприемлема при проведении расчетов, вместо нее могут быть использованы такие штрафные функции, которые удовлетворяют условию:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \delta(x, \alpha) = \delta(x) \quad \text{для всех } x.$$

Здесь α — весовой коэффициент.

Один из способов построения штрафов заключается в том, чтобы значения преобразований целевой функции в допустимой области точно или приближенно равнялись значениям исходной целевой функции $F(x)$, а вне допустимой области существенно превосходили значения $F(x)$.

Если рассматривается задача минимизации функции $F(x)$ при ограничениях $q_i(x) \leq 0$, то в качестве штрафов могут быть использованы функции вида:

$$\delta(x, \alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[\max \left(0, q_i(x) \right) \right]^2,$$

где m — количество ограничений.

Решение задачи, полученное с помощью метода штрафных функций, будет тем точнее, чем больше весовой коэффициент

α . Однако с увеличением α задача безусловной минимизации функции $F(x, \alpha) = F(x) + \delta(x, \alpha)$ усложняется из-за того, что последняя приобретает все более выраженную овражную структуру. Кроме того, при больших α возрастает роль ошибок счета.

Поэтому целесообразно задавать α некоторой ограниченной величиной исходя из необходимой точности нахождения минимума.

Основываясь на вышеизложенном, построим целевую функцию для исследуемой динамической и математической модели (см. разд. гл. 20).

В качестве исходной целевой функции возьмем суммарную массу элементов установки. Суммарная масса складывается из масс рычагов, корпуса механизма АКУ и силового привода. Масса каждого отдельного элемента рассчитывается исходя из нагрузок, действующих на элемент в процессе отделения. Нагрузки на элементы определяются при решении задачи динамического анализа, относящейся к этапу внешнего проектирования.

Таким образом, при проектировании необходимо найти вектор функциональных и конструктивных параметров, характеризующих конфигурацию, структуру, геометрию и законы управления АКУ, удовлетворяющих требованиям технического задания и обеспечивающих минимум целевой функции — массы АКУ при выполнении условий нормального старта.

Под функциональными параметрами понимается совокупность параметров отделения, основными из которых являются угол бросания изделия, модуль линейной скорости, перемещение изделия, угловая скорость тангажа, приращение угла тангажа и время задержки запуска двигательной установки.

Под конструктивными параметрами понимается тип, количество и геометрические характеристики звеньев (длины, поперечные сечения), образующих кинематическую схему выводного механизма, их взаимное расположение в пространстве, геометрические характеристики силового привода (диаметр поршня, объемы полостей, размеры дюз), характеристики пороха (масса навески, скорость горения и пр.).

Как было сказано, в качестве критерия эффективности при проектировании конструкции АКУ, относящемуся к этапу внутреннего проектирования, выбрана масса АКУ. Снижение массы

определяет повышение дальности скорости, маневренности самолета.

Задача оптимизации параметров и управления АКУ формируется следующим образом: требуется найти вектор конструктивных параметров (жесткостей, длин звеньев, диаметров поршней, дюз, массу навески пороха и т.д.) и управлений, минимизирующих целевую функцию — массу АКУ при существующих ограничениях на эти параметры, а также при ограничениях на фазовые координаты — параметры отделения (катапультирования).

На основе проверочного расчета на прочность запишем зависимости для нахождения массы звеньев механизма АКУ (см. гл. 20).

1. Подвижная балка выполнена в виде тонкостенной трубы. Произведем расчет подвижной балки на статическую устойчивость и на сжатие — растяжение. При расчетах примем следующие обозначения:

D — внешний диаметр балки;

d — внутренний диаметр балки;

S — толщина стенок балки.

Массу подвижной балки можно определить как

$$M_{\text{подв}} = \rho F l,$$

где ρ — плотность материала балки; F — площадь поперечного сечения; l — длина балки.

Площадь сечения балки (трубы):

$$F = 0,25\pi (D^2 - d_{\text{расч}}^2),$$

где $d_{\text{расч}}$ — расчетное значение внутреннего диаметра балки. Внешний диаметр балки полагаем постоянным.

Итак:

$$d_{\text{расч}} = 2D - S_{\text{расч}},$$

а

$$S_{\text{расч}} = \max (S_{\text{уст}}, S_{\text{сж}}) + \Delta_{\text{доп}}.$$

Расчетная толщина стенок балки определяется как максимальная из полученных $S_{уст}$ и $S_{сж}$, рассчитанных на устойчивость и на сжатие — растяжение с учетом допуска $\Delta_{доп}$:

$$S_{уст} = \frac{D - d_{уст}}{2} ; \quad S_{сж} = \frac{D - d_{сж}}{2} .$$

Расчет на устойчивость проведем по формуле:

$$d_{уст} = \sqrt[4]{\frac{D^4 - 64 N_{уст} (\mu \cdot l)^2 \cdot k}{\pi^3 \cdot E}} ,$$

где коэффициенты $\mu = 1$, $k = 1,5$; E — модуль упругости материала балки; $N_{уст}$ — расчетная нагрузка на устойчивость, определяемая как максимальное усилие сжатия, действующее на подвижную балку в процессе отделения.

Расчет на сжатие — растяжение проведем по формуле:

$$d_{сж} = \sqrt{D^2 - \frac{4 N_{сж} \cdot k}{\pi [\sigma]}} ,$$

где $[\sigma]$ — предел прочности на растяжение — сжатие; $N_{сж}$ — расчетная нагрузка растяжения-сжатия, определяемая как максимальное усилие растяжения или сжатия, действующее на подвижную балку.

2. Задний рычаг рассчитаем на сжатие-растяжение по формуле:

$$S_2 = \frac{N_2 \cdot k}{[\sigma]} ,$$

где N_2 — расчетное усилие растяжения-сжатия, действующее на задний рычаг.

Масса заднего рычага:

$$M_2 = S_2 l_2 ,$$

где l_2 — длина рычага (в расчетах принимаем рычаг за балку постоянного сечения).

Оптимизируемые в данном примере параметры пиропривода:

m_n — масса навески пороха;

f_{12}, f_{23} — площади дюз;

S_p — площадь поршня.

Ограничения на параметры пиропривода:

$$m_n \leq 0,03 \text{ кг}; \quad f_{12}, f_{23} \leq 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$S_p \leq 64 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Ограничения на параметры отделения (катапультирования):

$$\dot{Y}_k \geq 3 \text{ м/с}; \quad |\omega_z|_k \leq 100 \text{ }^\circ/\text{с}.$$

Таким образом, выражение для целевой функции с учетом введенных ограничений, имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi = & M_{\text{подв}} + M_2 + \alpha \left\{ \left[\max(0, m_n - 0,03) \right]^2 + \right. \\ & + \left[\max(0, f_{12} - 3 \cdot 10^{-4}) \right]^2 + \left[\max(0, f_{23} - 3 \cdot 10^{-4}) \right]^2 + \\ & + \left[\max(0, S_p - 64 \cdot 10^{-4}) \right]^2 + \left[\max(0, 3 - \dot{Y}_k) \right]^2 + \\ & \left. + \left[\max(0, \omega_z - 100) \right]^2 + \left[\max(0, -\omega_z - 100) \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

21.2.2. Выбор метода оптимизации целевой функции

Задача минимизации целевой функции решается посредством того или иного метода оптимизации [22]. Сущность всех численных методов оптимизации состоит в построении такой последовательности векторов $\{X^k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, которая удовлетворяет условию:

$$F(X^{k+1}) < F(X^k),$$

т.е. на следующем шаге оптимизации значение целевой функции должно быть меньше, чем на предыдущем.

Поскольку задача оптимизации с ограничениями (в частности, с ограничениями типа неравенств) часто может быть при-

ведена к задаче оптимизации без ограничений, рассмотрим здесь только методы безусловной оптимизации.

Методы безусловной оптимизации принято делить на классы в зависимости от максимального порядка производных минимизируемой функции, вычисление которых предполагается. Так, методы, использующие только значения самой целевой функции, называются методами нулевого порядка. Если, кроме того, требуется вычисление первых производных целевой функции, то мы имеем дело с методами первого порядка. Методы второго порядка требуют для своей реализации вычисления вторых производных. Выбор того или иного метода оптимизации зависит от характера целевой функции и способа ее задания.

Поскольку в нашем случае целевая функция имеет ярко выраженную овражную структуру, то при оптимизации использовался метод сопряженных градиентов с изменением масштабов переменных.

Один из возможных путей преодоления «овражных эффектов» состоит в переходе к методам второго порядка, использующим вторые производные минимизируемой функции, которые как раз и реагируют на кривизну линий уровня. Метод сопряженных градиентов выгодно отличается от обычных градиентных методов тем, что, обладая достоинствами методов второго порядка, он является методом первого порядка (использующим при своей реализации информацию только о первых производных) и практически не сложнее в реализации, чем метод наискорейшего спуска.

Изменение масштабов независимых переменных также призвано сгладить основной недостаток градиентных методов — «эффект оврагов». Этот эффект хорошо интерпретируется геометрически и означает, что топография поверхностей уровня целевой функции $F(x) = \text{const}$ имеет овражную структуру. Траектории градиентных методов в таких случаях характеризуется достаточно быстрым спуском на «дно» оврага и затем медленным зигзагообразным движением вдоль «дна» к точке минимума.

21.2.3. Анализ результатов оптимизационного динамического синтеза механизмов АКУ

Программа оптимизационного динамического синтеза механизмов АКУ снабжена всеми необходимыми комментариями и включает в себя:

- блок ввода исходных данных;
- программу динамического анализа параметров механизма установок и параметров отделения изделия;
- подпрограмму графической интерпретации результатов динамического анализа;
- подпрограммы интегрирования уравнений;
- подпрограмму, описывающую работу силового пиропривода;
- подпрограммы вывода на печать;
- подпрограмму построения графиков;
- подпрограмму вычисления целевой функции;
- подпрограмму построения функции ограничений;
- подпрограммы, реализующие различные методы оптимизации.

На рис. 21.3 и 21.4 представлены блок-схемы программ оптимизационного динамического синтеза и ее подпрограммы АКУ.

На рис. 21.5 — 21.19 представлены результаты оптимизационного динамического синтеза АКУ рычажного типа. Исследовалось, в частности, поведение целевой функции при изменении основных параметров пиропривода АКУ.

Как указывалось ранее (см. п. 21.2.1), целевая функция представляет собой суммарную массу отдельных элементов механизма АКУ и пиропривода, а именно:

- массу заднего толкающего рычага;
- массу подвижной балки АКУ;
- массу дна пиропривода;
- массу стенок пиропривода.

Масса отдельных элементов установки рассчитывалась путем проверочного расчета и получения необходимых по условиям прочности размеров элементов. В качестве расчетных нагрузок использовались максимальные значения усилий, действующих на каждый элемент в процессе катапультирования. Алгоритм расчета целевой функции был описан ранее (см. п. 21.2.1).

В качестве оптимизируемых параметров пиропривода были выбраны следующие:

- f_{12} — площадь проходного сечения камеры сгорания;
- S_{Π} — площадь поршня пиропривода;

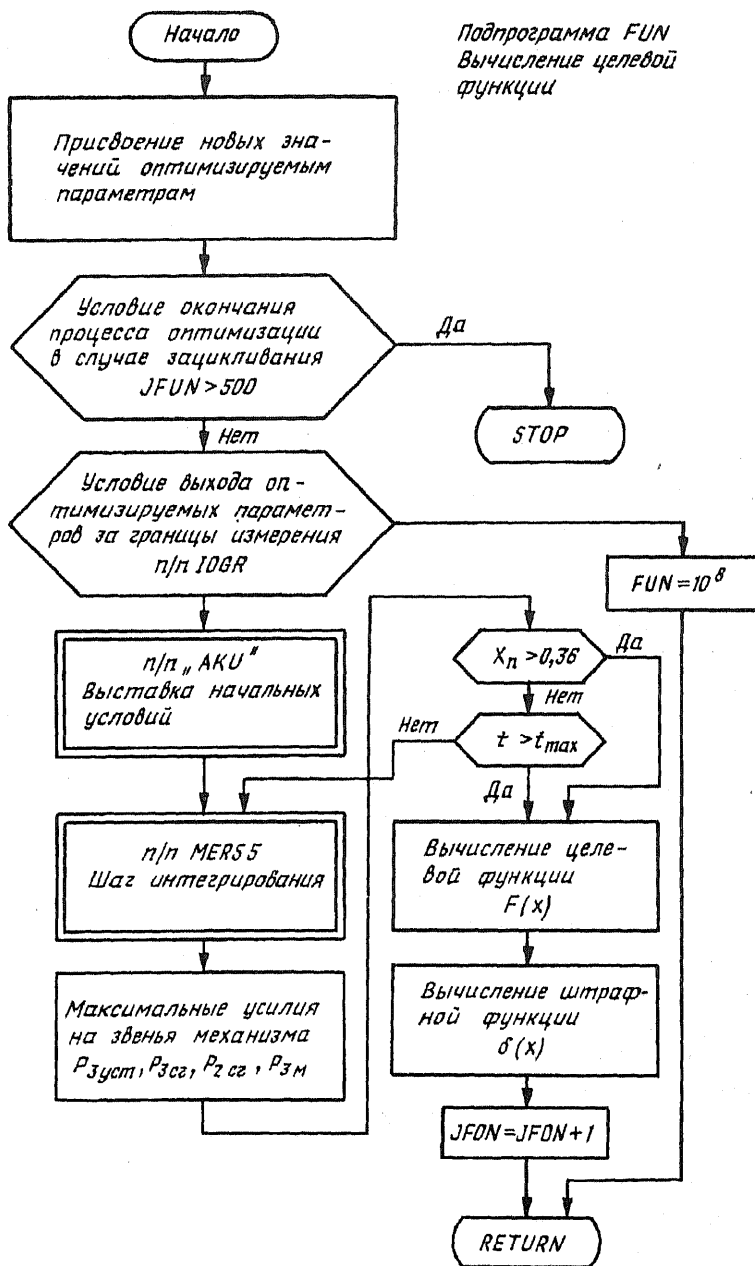


Рис. 21.3

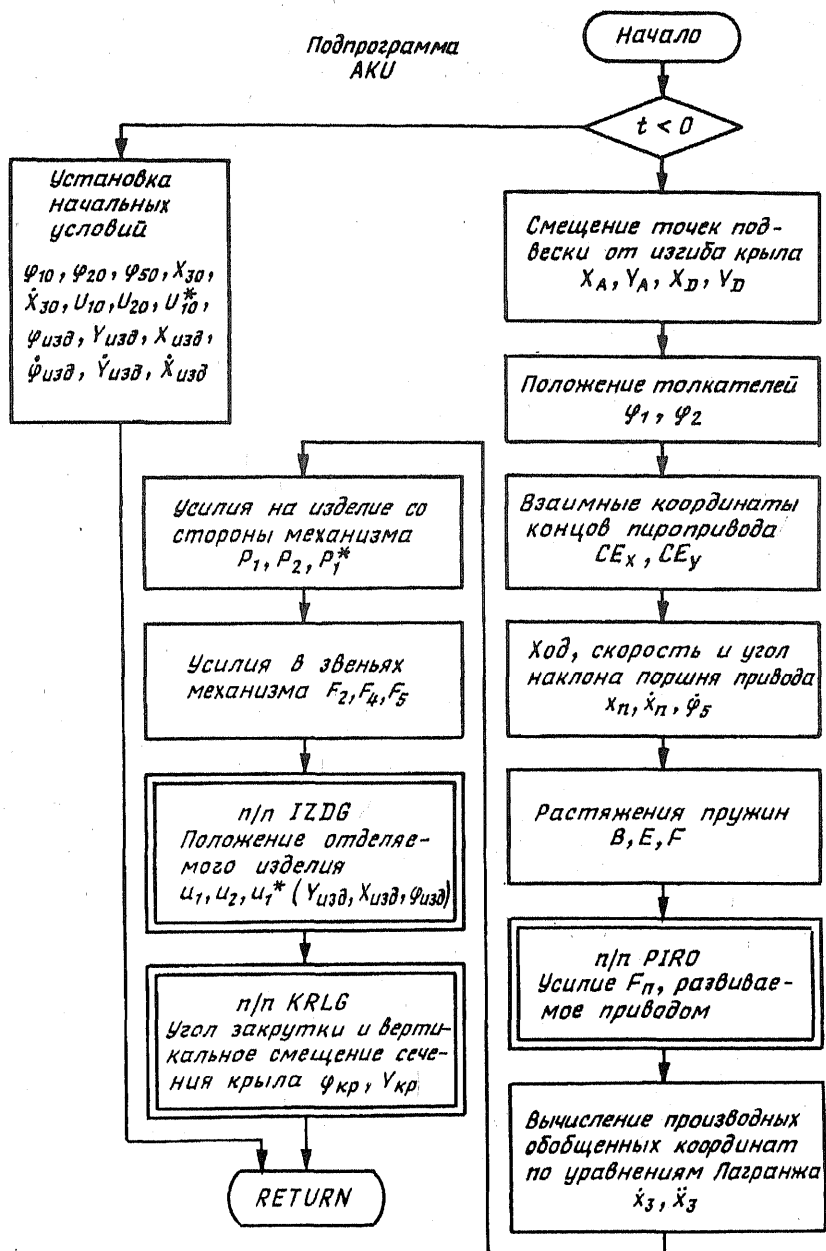


Рис. 21.4

m_{Π} — масса навески пороха;

$u_{\text{зад}}$ — скорость горения пороха.

Скорость горения пороха U м/с бралась в условных единицах [м/с], так что скорость $U = 1$ м/с соответствует практически мгновенному сгоранию пороха (за время $< 0,005$ с).

Массовую скорость горения пороха можно получить как произведение:

$$U_m = U S_0 \gamma,$$

где S_0 — площадь торца порохового заряда; γ — удельный вес пороха.

Полагаем, что S_0 и γ — постоянные величины. Кроме того, предполагалось, что скорость горения U не меняется в процессе отделения.

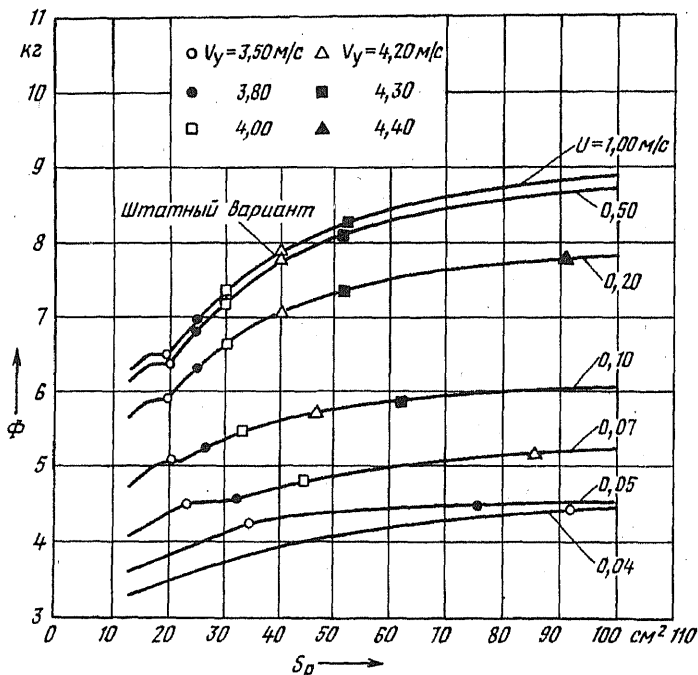


Рис. 21.5

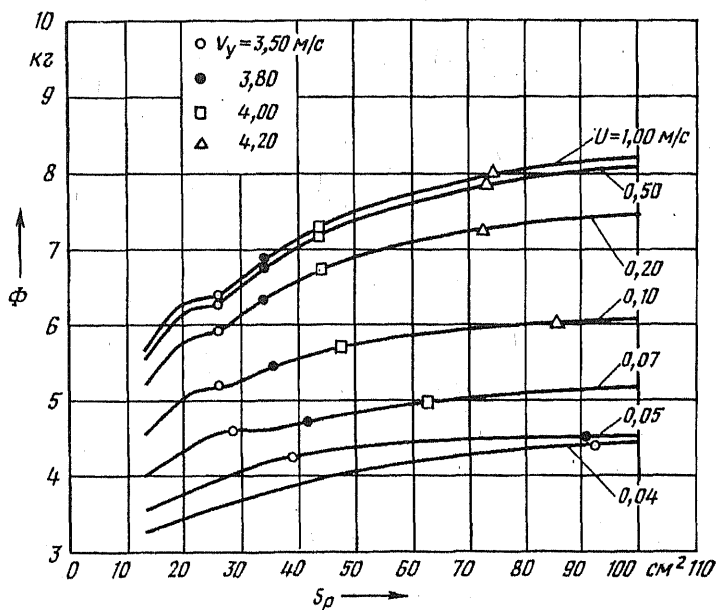


Рис. 21.6

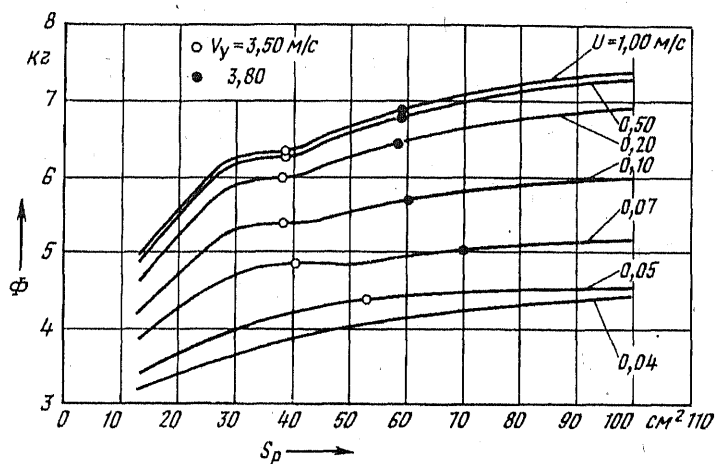


Рис. 21.7

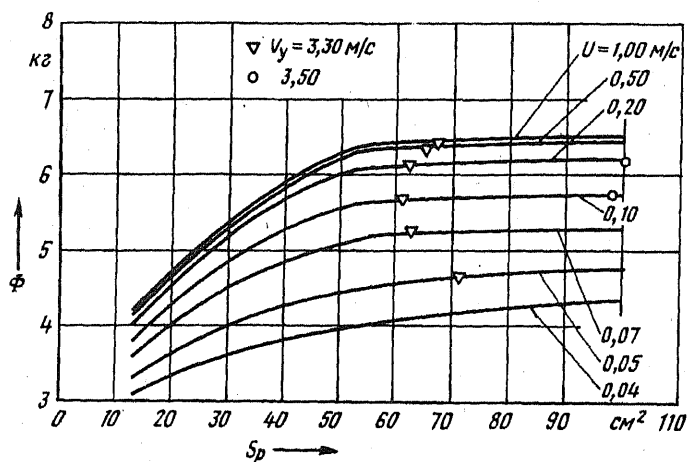


Рис. 21.8

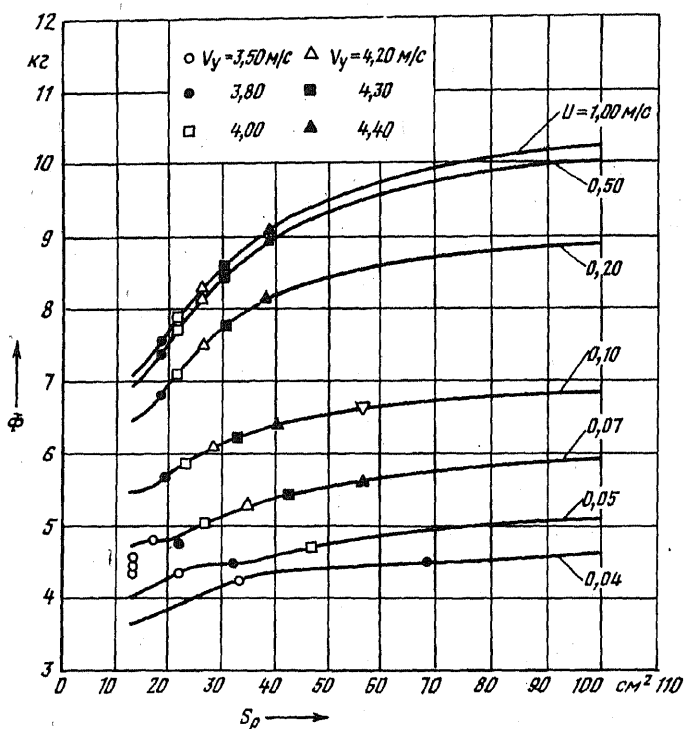


Рис. 21.9

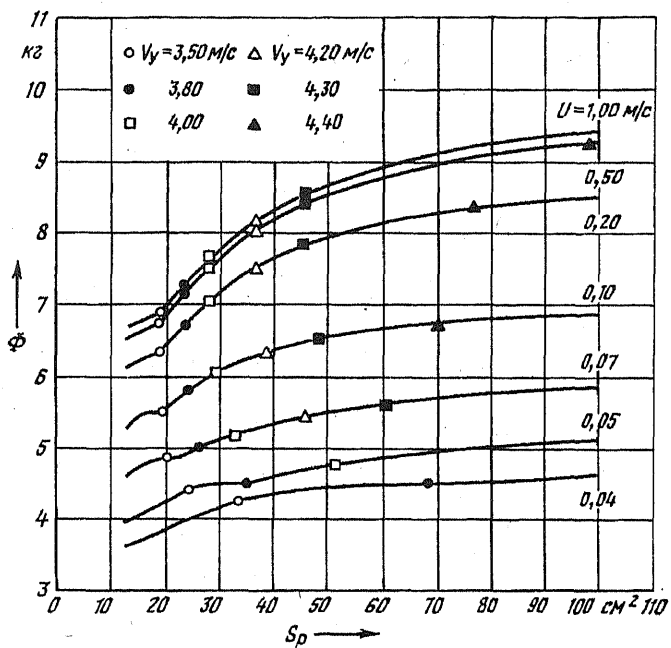


Рис. 21.10

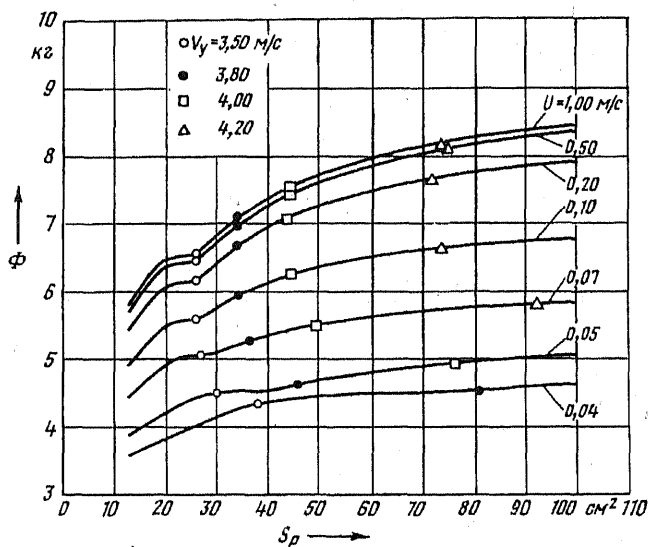


Рис. 21.11

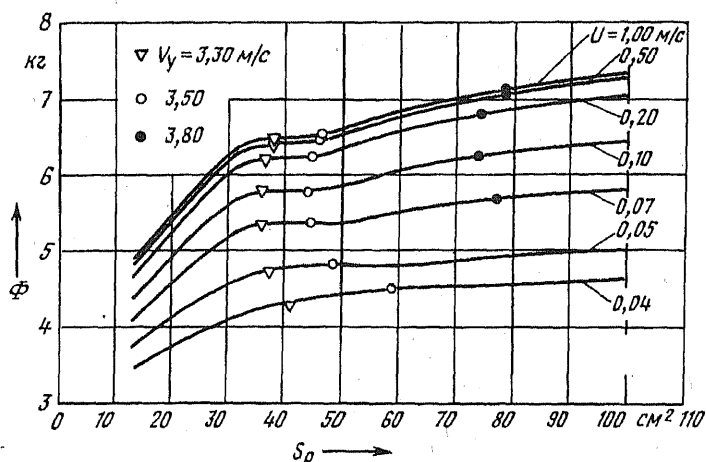


Рис. 21.12

На рис. 21.5 — 21.12 представлены графики изменения целевой функции в зависимости от площади поршня S_p при различных сочетаниях параметров U , M_p , f_{12} . На графиках одинаковыми маркерами отмечены точки, соответствующие одинаковым конечным условиям отделения, а именно одинаковым значениям конечной вертикальной скорости Ц.М. изделия. При этом на рис. 21.5 отмечена точка, соответствующая штатным значениям параметров пиропривода: $S_p = 40$ см²; $m_p = 30$ г; $U = 1$ м/с; $f_{12} = 1,7$ мм². В этом случае достигается скорость $\dot{Y}_{изд} = 4,2$ м/с, а значение целевой функции $FUN = 7,8$ кг.

Как видно из графиков, ту же самую конечную вертикальную скорость отделения, как и в штатном варианте, можно обеспечить и при других значениях параметров, но при этом целевая функция, а следовательно, и масса вышеуказанных элементов установки, будет меньше. Кроме того, видно, что существует некоторое минимальное значение целевой функции, которому соответствуют оптимальные значения параметров. Для конечной скорости $\dot{Y}_{изд} = 4,2$ м/с это значение $\sim 5,1$ кг. Более точно определить оптимальные значения параметров можно по рис. 21.13 — 21.24.

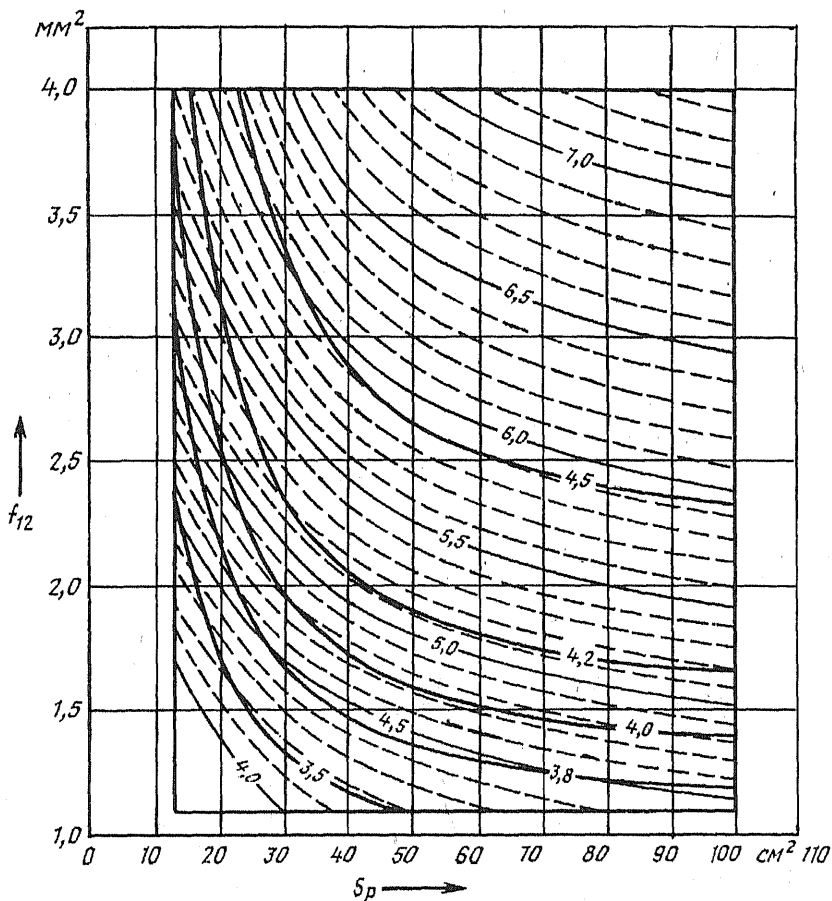


Рис. 21.13

На рис. 21.13, 21.14, 21.17 — 21.19, 21.22, 21.23 представлены линии уровня целевой функции в функции двух параметров при фиксированных других параметрах, а на рис. 21.15, 21.16, 21.20, 21.21, 21.24 — вид соответствующих поверхностей.

Кроме того, на рис. 21.14, 21.19, 21.23 нанесены линии, соответствующие определенным значениям конечной скорости отделения изделия, которые являются ограничениями на область изменения параметров. Нанесены также линии ограничений по конструктивным размерам привода и массе порохового

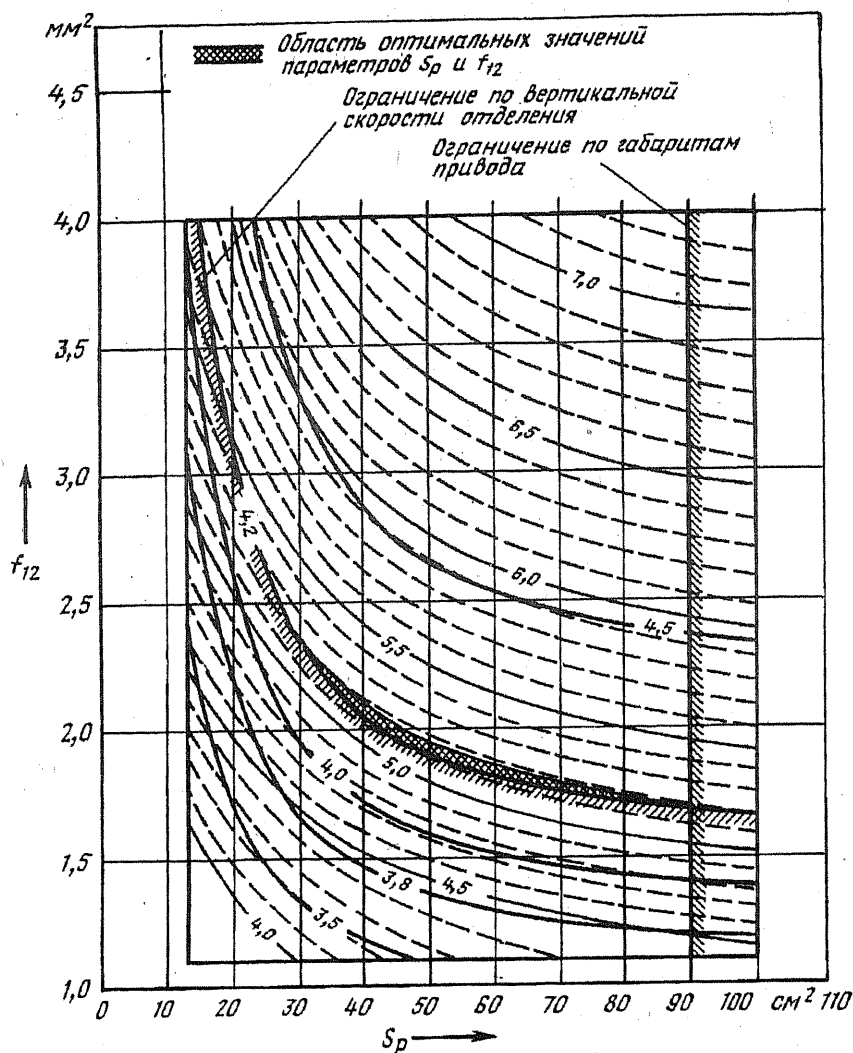


Рис. 21.14

заряда. Линии ограничений образуют области, внутри которых ищется оптимальное значение целевой функции.

Из анализа графиков видно, что целевая функция по всем координатам является монотонной и поэтому можно ожидать,

что оптимальные значения параметров будут лежать на границе допустимой области, т.е. на линии ограничений.

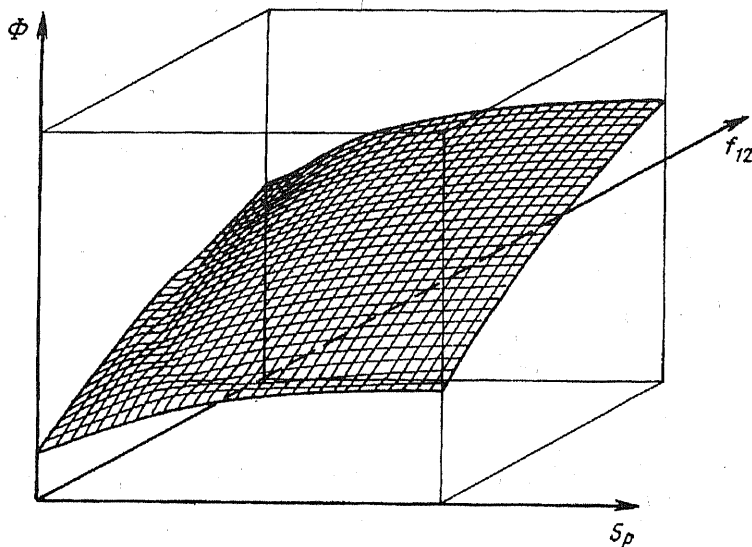


Рис. 21.15

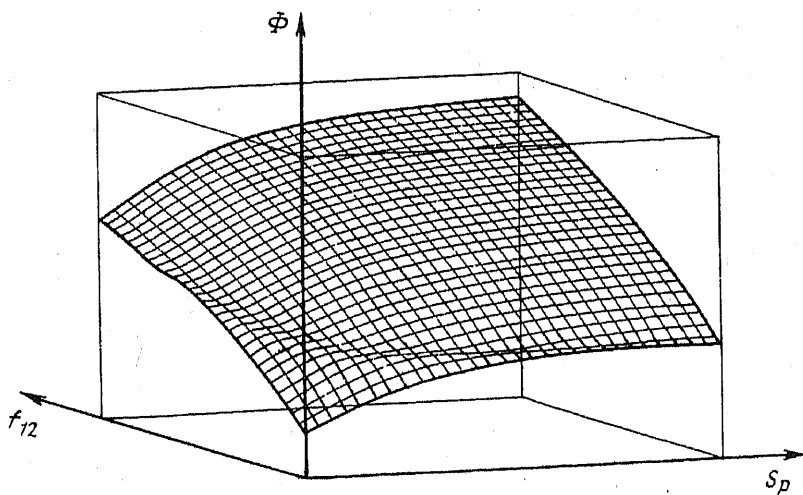


Рис. 21.16

На рис. 21.17 — 21.19 показаны линии уровня целевой функции как функции от проходного сечения камеры сгорания f_{12} и скорости горения пороха U . На рис. 21.17 отмечена точка, соответствующая штатному варианту. Как видно из рисунков, уменьшая скорость горения пороха U с соответствующим изменением площади f_{12} , можно значительно уменьшить значение целевой функции, получив при этом ту же конечную скорость отделения изделия. Причем оптимум достигается тогда, когда процесс горения пороха продолжается в течение всего процесса отделения ($\sim 0,18$ с), что соответствует $U = 0,04 \dots 0,07$ м/с.

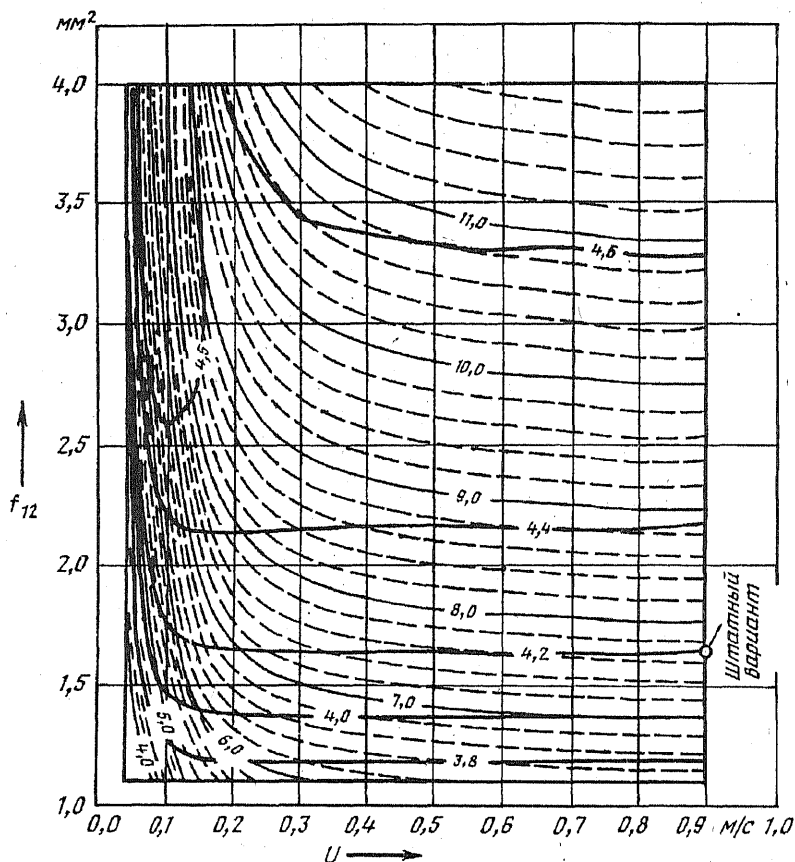


Рис. 21.17

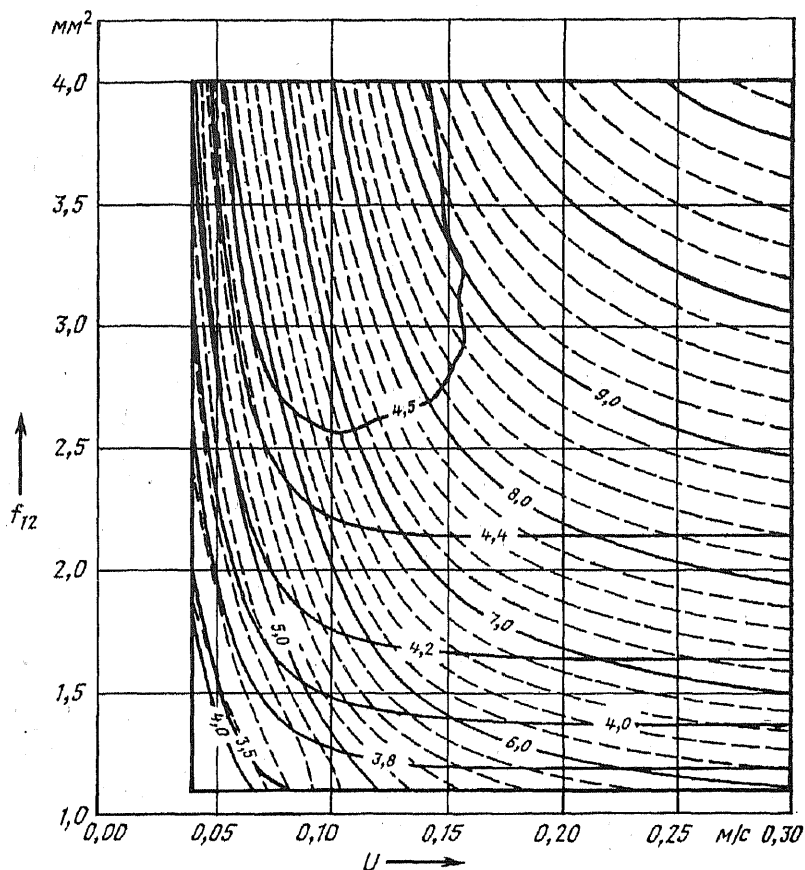


Рис. 21.18

На рис. 21.23 показаны линии уровня целевой функции f_{12} и массы пороха m_{Π} . Нанесено также ограничение по m_{Π} , соответствующее стандартному пороховому заряду.

Как видно из приведенных графиков, оптимальное значение массы пороха достигается на пересечении двух линий ограничений, т.е. оптимальным следует считать $m_{\Pi} = 30$ г, и этот параметр можно исключить из числа оптимизируемых.

На рис. 21.13 и 21.14 показаны линии уровня целевой функции в зависимости от f_{12} и площади поршня привода S_{Π} .

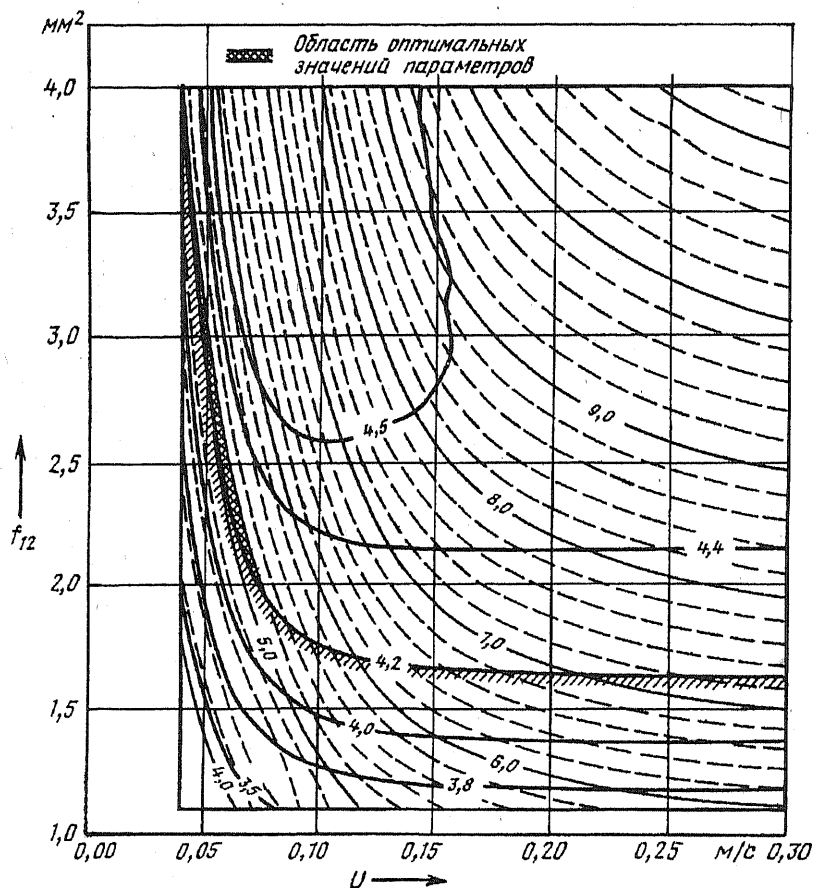


Рис. 21.19

Оптимальное значение $S_{\text{п}}$ и f_{12} здесь также должно находиться на границе допустимой области. Однако в области оптимума линии ограничений по конечной скорости изделия практически параллельны линиям уровня целевой функции и вместо оптимальной точки получается некоторая область оптимальных параметров, внутри которой имеем практически одинаковые значения целевой функции. Окончательное значение параметров можно выбрать, введя, например, ограничения конструктивного и технологического характера.

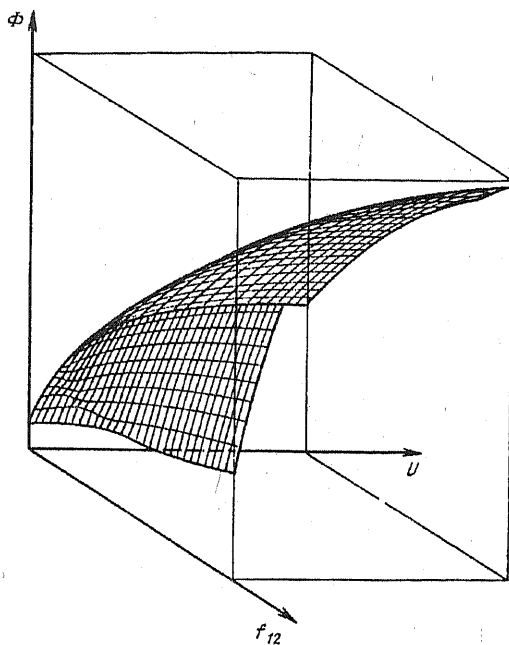


Рис. 21.20

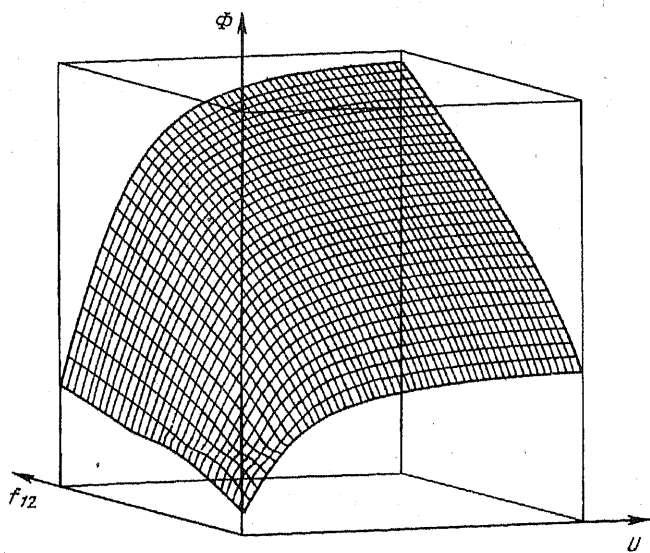


Рис. 21.21

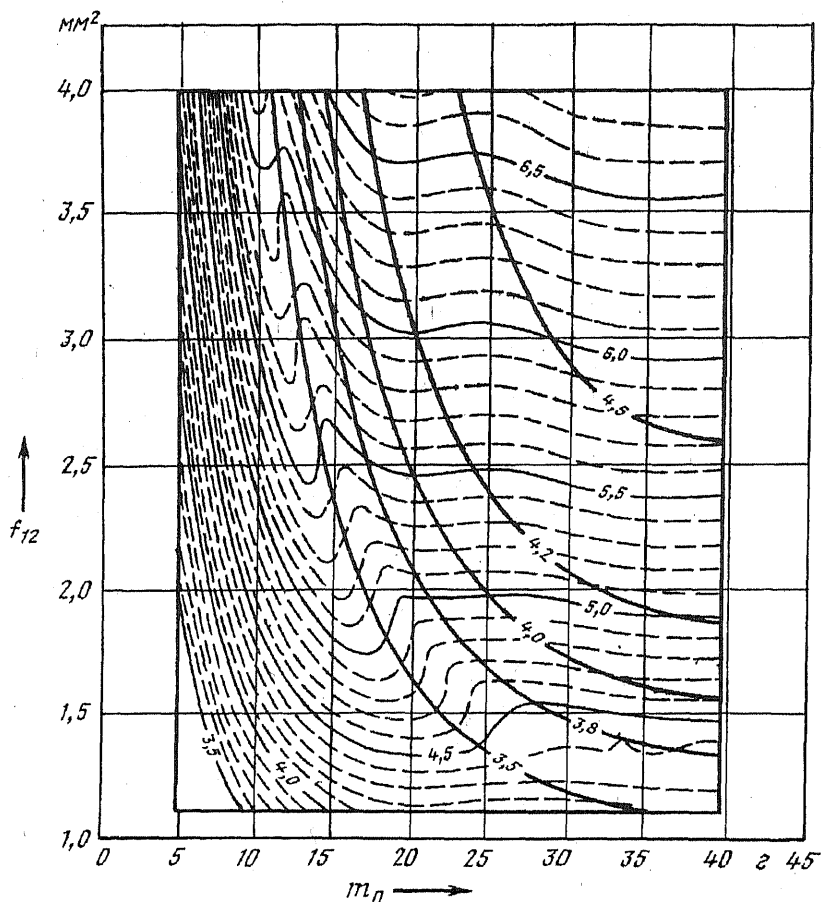


Рис. 21.22

На рис. 21.25 — 21.32 представлены графики изменения различных параметров механизма АКУ, отделяемого изделия и силового пиропривода в процессе отделения (штатный вариант). Исходные данные при расчете: $m_{\text{изд}} = 580 \text{ кг}$; $J_{\text{изд}} = 600 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$; $f_{12} = 1,9 \text{ мм}^2$; $C_8 = 0,84 \cdot 10^8 \text{ Н/м}$; $C_2 = 1,04 \cdot 10^8 \text{ Н/м}$; $C_3 = 0,447 \text{ Н/м}$.

Как видно из рис. 21.27, расчетные значения $\phi_{\text{изд}}$ и $\dot{\phi}_{\text{изд}}$ хорошо совпадают с экспериментальными данными.

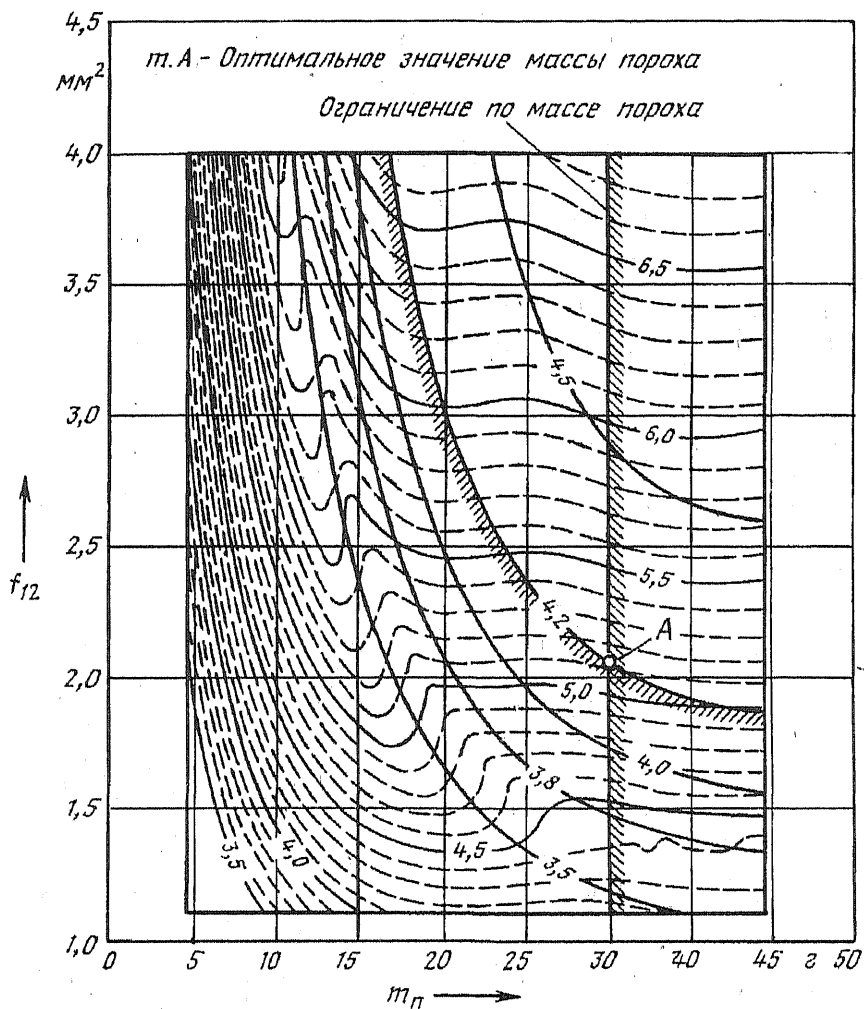


Рис. 21.23

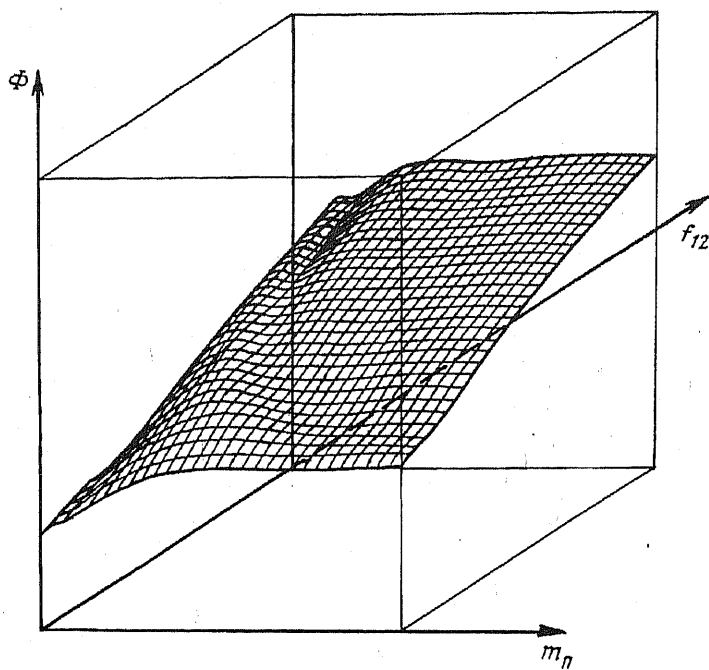


Рис. 21.24

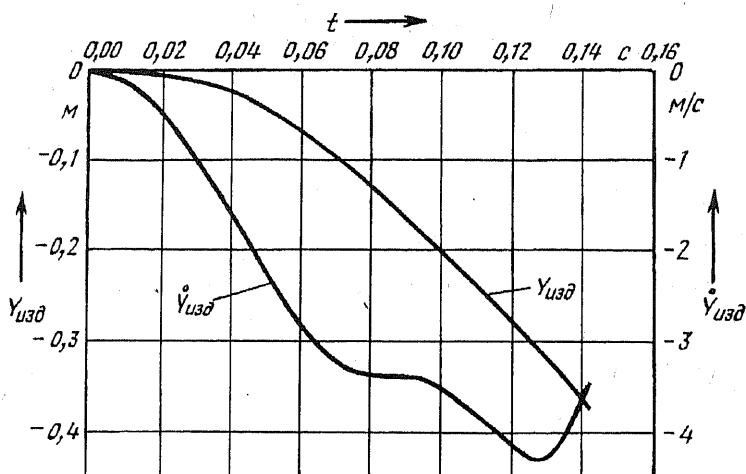


Рис. 21.25

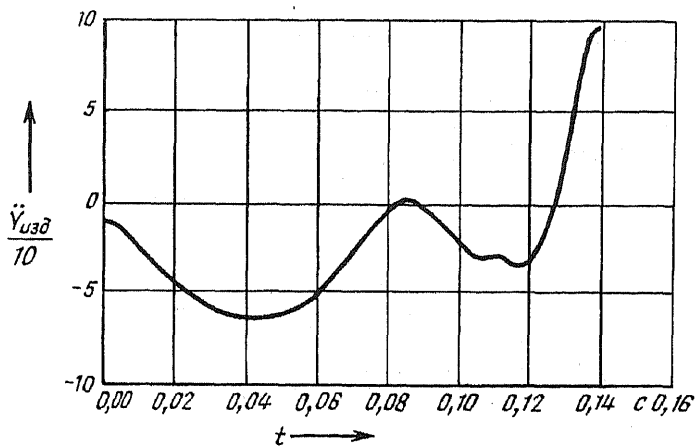


Рис. 21.26

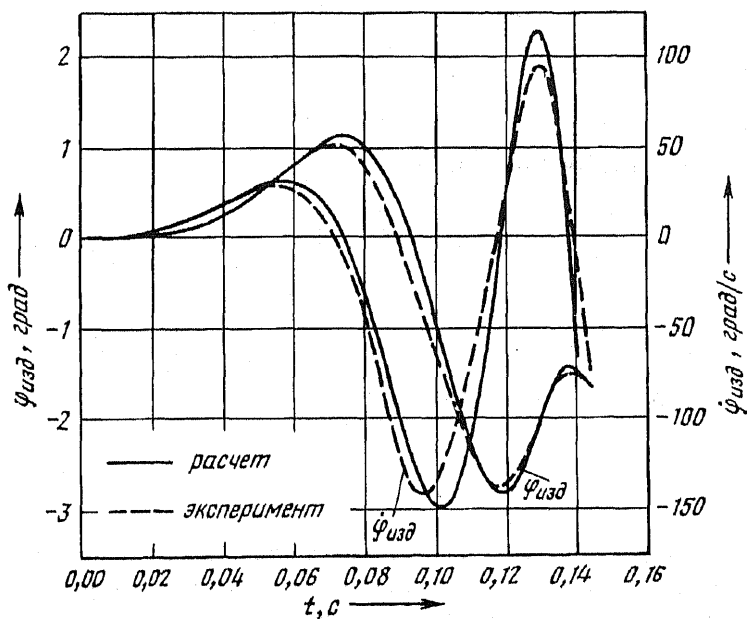


Рис. 21.27

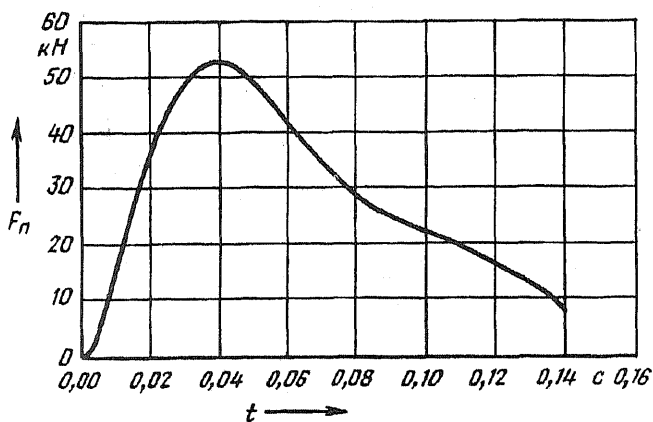


Рис. 21.28

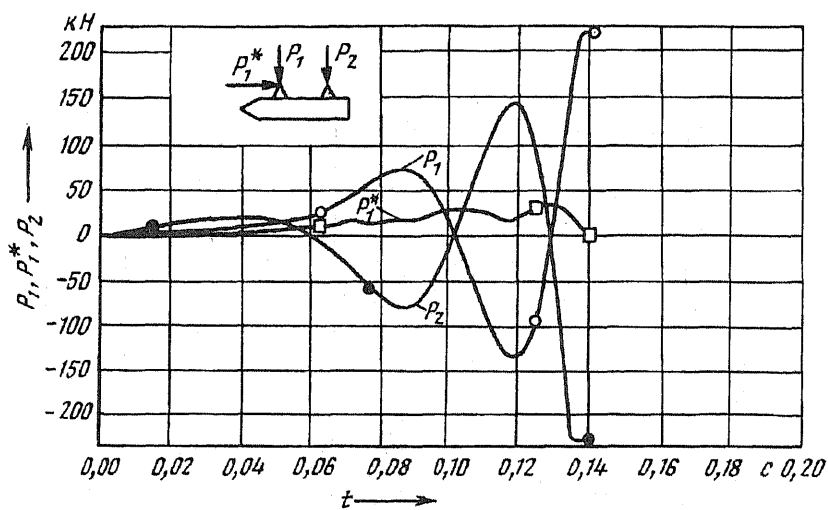


Рис. 21.29

Рассмотрим рекомендуемые с точки зрения обеспечения минимальной массы АКУ значения параметров пиропривода по сравнению со штатным вариантом.

Штатный вариант (рис. 21.25 — 21.32): $S_p = 40 \text{ см}^2$; $f_{12} = 1,9 \text{ мм}^2$; $U = 1 \text{ м/с}$; $M_{\Pi} = 30 \text{ г}$.

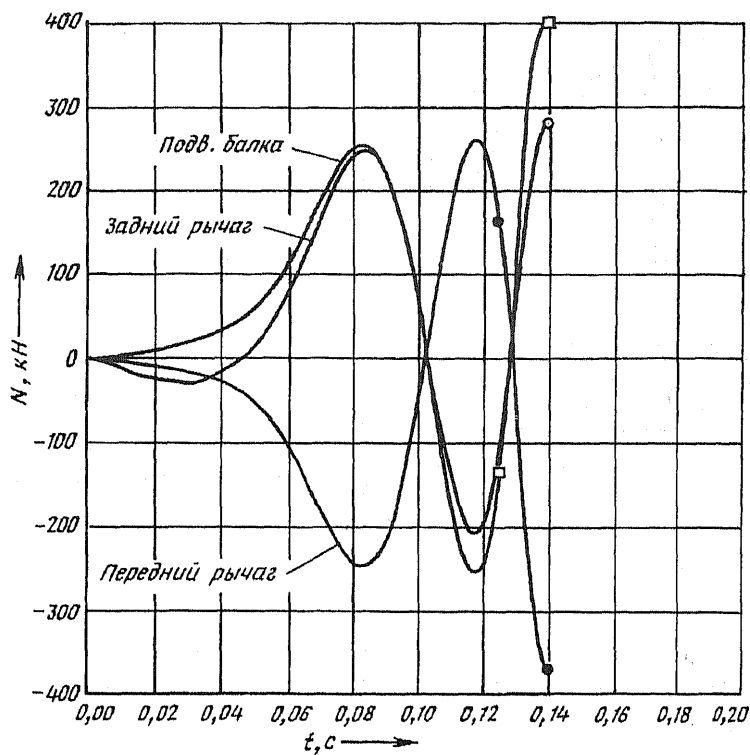


Рис. 21.30

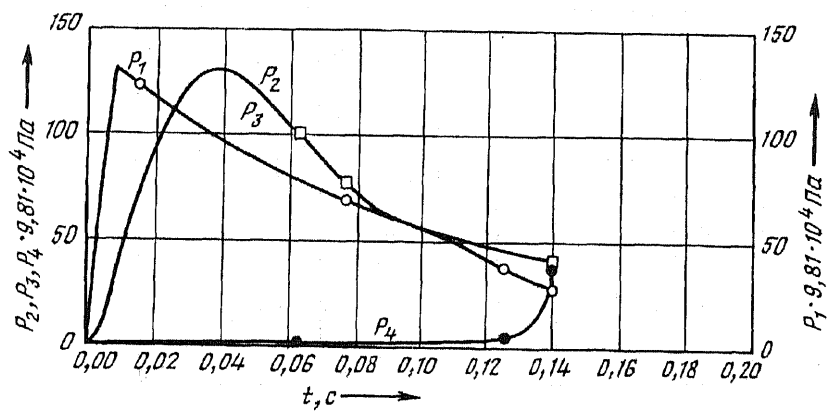


Рис. 21.31

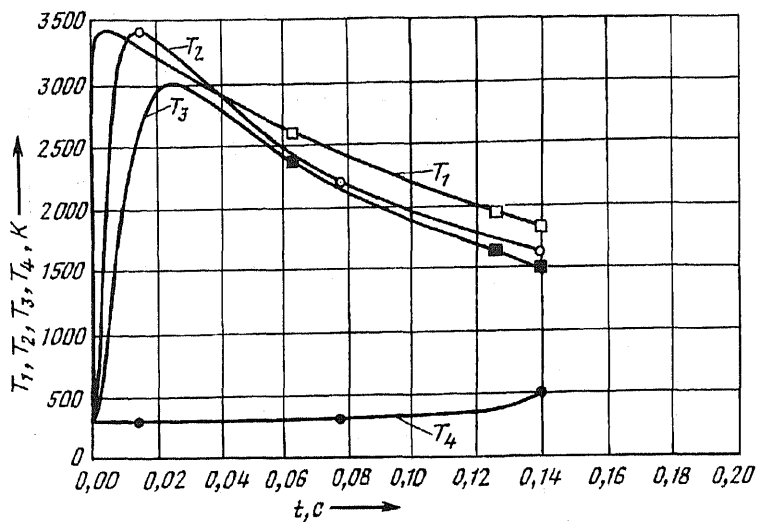


Рис. 21.32

Вариант из области оптимальных значений параметров (рис. 21.33 — 21.40): $S_p = 40 \text{ см}^2$; $f_{12} = 2,07 \text{ мм}^2$; $U = 0,07 \text{ м/с}$; $M_{\Pi} = 30 \text{ г}$.

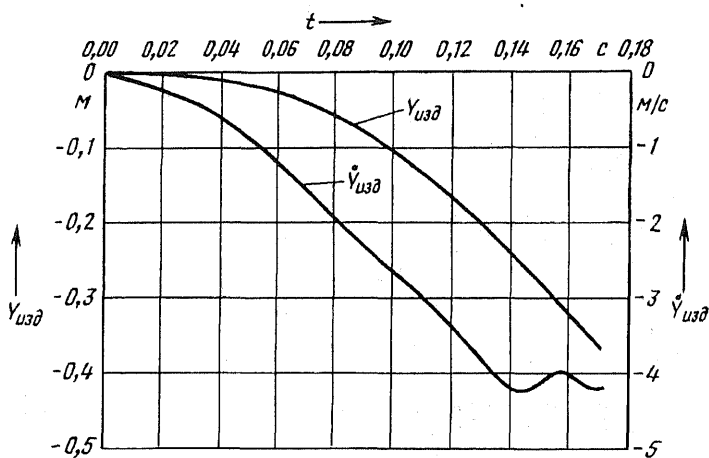


Рис. 21.33

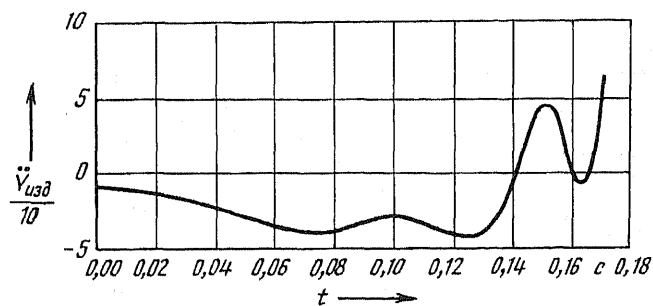


Рис. 21.34

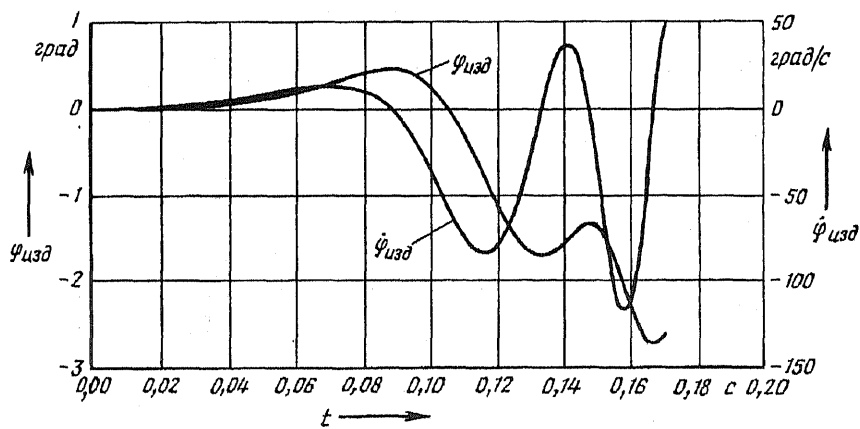


Рис. 21.35

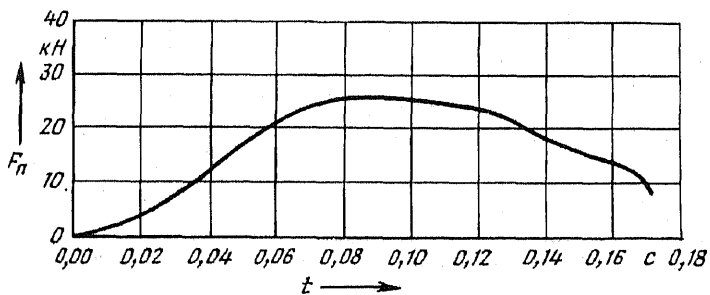


Рис. 21.36

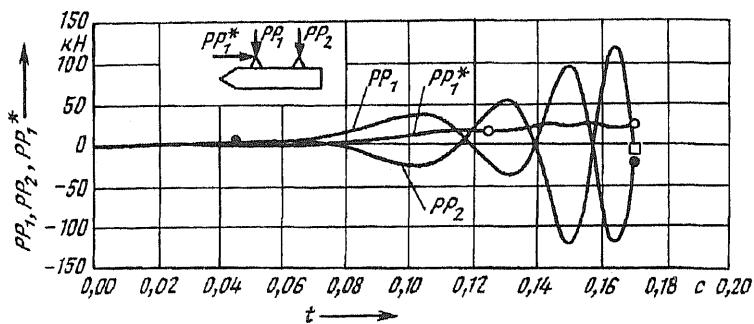


Рис. 21.37

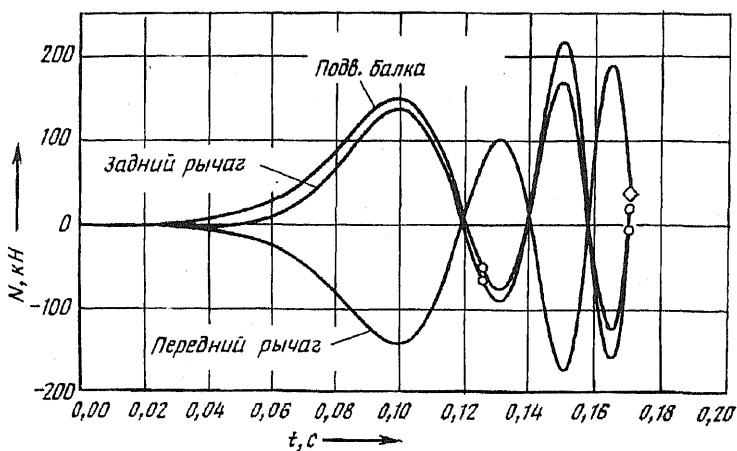


Рис. 21.38

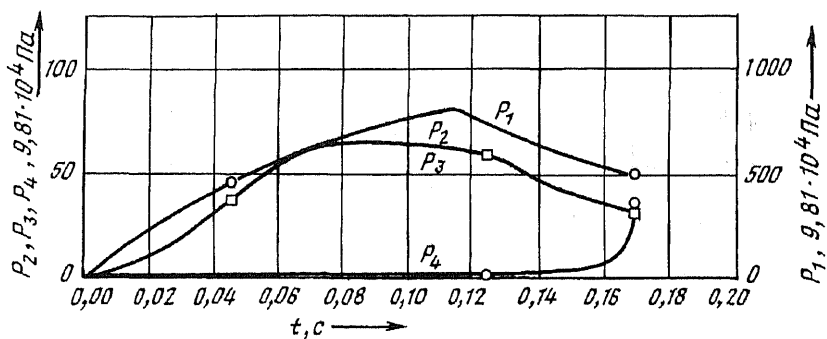


Рис. 21.39

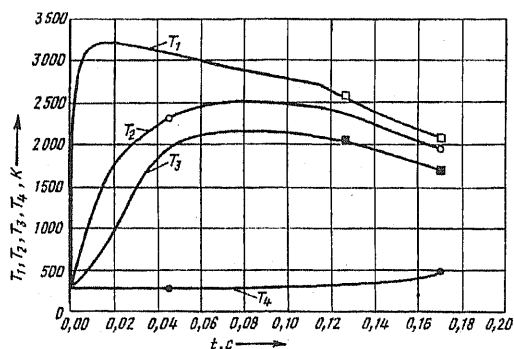


Рис. 21.40

Вариант с оптимальным распределением параметров механизма АКУ и силового привода при условии выполнения ограничений по параметрам отделения обеспечивает значительно меньшие значения перегрузки и, следовательно, усилий в бугелях изделия и звеньях механизма, минимальные забросы по амплитуде и меньшую колебательность процессов изменения углов и угловой скорости центра масс изделия. Очевидно, что в этом случае синтезирован механизм АКУ и силовой пиропровод меньшей массы по сравнению со штатным вариантом.

Глава 22. СИСТЕМА ДИНАМИЧЕСКОГО СИНТЕЗА МЕХАНИЗМОВ АКУ С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИЯ ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИХ СИЛ И СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 22.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При исследовании динамических процессов в сложной системе «самолет — установка — изделие» необходим учет условий реального старта, поскольку в этих условиях формируются требования безопасного отделения, определяющие облик проектируемой установки [28]. Рассмотрение условий реального старта означает учет действия на систему детерминистических сил и случайных возмущений.

Систематические (детерминистские) возмущения зависят от расчетных значений параметров самолета, механизма установки, изделия, силового привода и условий старта (расчетные значения жесткостных и инерционных характеристик элементов конструкции самолета, установки, изделия, силового привода и т.д.).

Случайные возмущения определяют состояние системы в процессе и в конце катапультирования. Так, случайный характер, в частности, имеют зависящие от многих факторов внешние нагрузки, начальные условия отделения изделий при полете самолета в условиях атмосферной турбулентности и наличия интерференционных потоков, особенно при отделении с подкрыльевых установок. Технологические разбросы имеют параметры силового привода, жесткостные, геометрические и инерционные характеристики установок.

Возмущения, действующие на систему при старте, приводят к ее возмущенному движению и в конечном итоге к разбросу компонент вектора состояния системы в момент окончания процесса отделения (катапультирования). Поэтому важно уметь оценить динамические эффекты, вызванные случайными возмущениями (определение вектора возмущенного состояния динамической системы дано в гл. 21).

Значительную трудность на стадии эскизного и предэскизного проектирования создает отсутствие необходимой статической информации о случайных возмущениях, действующих на систему. По сути дела на этапах предварительного проектирования, как правило, нет вероятностных характеристик возмущений ("входа"), таких, например, как вероятностные характеристики аэродинамических нагрузок, вероятностные характеристики движения самолета при катапультировании, вероятностные характеристики технологического разброса параметров конструкции установки ЛА, силового привода и т.д.

Отсутствие необходимой статистической информации обусловлено тем, что на этих стадиях проектирования готовых действующих изделий и установок нет и по этой причине невозможно проведение массовых реализаций процесса старта для получения вероятностных характеристик возмущений. В связи со сказанным невозможно и исследовать влияние возмущений на параметры отделения.

Однако даже в случае отсутствия информации или наличия неопределенности относительно возмущений, действующих на систему, необходимо находить такие способы исследования динамики старта и динамического синтеза, которые бы учитывали действие случайных возмущений.

Следует отметить, что в том случае, когда необходимая информация о случайных возмущениях имеется, используют стохастическую постановку задачи, устанавливающую связь между «входом» и «выходом» на основе теории случайных процессов. В нашем случае при проектировании установок ЛА проведение массовых летных или иных натурных испытаний процессов отделения ввиду их большой стоимости чрезвычайно сложно и, следовательно, невозможно получать достоверные статистические данные для оценки вероятностных характеристик параметров отделения.

Но даже при наличии необходимого объема информации о случайных возмущениях, действующих на систему, вероятностные оценки ее качества не гарантируют выполнение условий безопасного старта для каждой отдельной реализации процесса (несоударение с самолетом, незаглохание двигателя и т.д.), что является абсолютно недопустимым для реальной конструкции.

Иными словами, в этих условиях должен быть создан такой метод исследования динамики старта и динамического синтеза, который позволил бы получить гарантированные значения решений рассматриваемых задач при самых неблагоприятных воздействиях случайных возмущений, заданных областями возможных значений. Такой метод динамического синтеза предложен в настоящей работе и получил здесь название «метода разрезанных зон».

Этот метод реализует минимаксную постановку задачи, при которой априори считаются известными лишь пределы изменения случайных входных возмущений. Если при стохастической постановке задачи, как правило, основным показателем качества считается математическое ожидание целевого функционала (среднестатистическое значение) и получаемое при этом оптимальное решение является оптимальным лишь в среднем (по совокупности всех реализаций), то при минимаксной постановке показателем качества считается наихудшее по всем случайным возмущениям значение целевого функционала и за счет этого минимаксное управление является гарантирующим.

Таким образом, в нашем случае при отсутствии массовой реализации процесса отделения и необходимой статистической информации о входе, задача сводится не к изучению свойств множества процессов старта, а к гарантированной оценке наилучших возможных эффектов, вызванных действием случайным возмущений при единичном старте.

Случайные возмущения могут быть заданы областями возможных значений, границы которых часто являются следствием физических ограничений и конструктивных возможностей системы. Так как граница области возможных значений случайной функции, ограниченной по модулю, может меняться во времени и мы заранее не знаем характер поведения случайной функции внутри области, то предположим произвольное поведение случайной функции, включающее в себя и класс кусочно — непрерывных функций с разрывами первого рода. Как показано в работе [29], такое поведение случайной функции приводит к наилучшим возможным воздействиям на систему.

Решая уравнения, описывающие поведение исследуемой динамической системы «самолет — установка — изделие» при воздействии заданных областями возможных значений случайных возмущений, определяем области возможных значений выходных параметров отделения (углов, угловых и линейных скоростей и ускорений, перегрузок и т.д.).

Из ограниченности области возможных значений входных возмущений следует наличие предельной кривой, охватывающей область возможных значений выходных параметров отделения. Предельная кривая делит фазовую плоскость выходных параметров на две области: область параметров, реализация которых возможна ("разрешенные зоны") и область выходных параметров, которые при данной области входных возмущений не реализуются. Знание области выходных параметров позволяет найти предельно возможные их значения, возникающие при самых неблагоприятных законах изменения входных возмущений, а также зависимость размеров области выходных значений от параметров системы. Таким образом, имеется возможность выбрать параметры системы, при которых область достигает минимальных размеров и обеспечивается минимальное значение целевого функционала.

Рассмотрим математическую формулировку задачи.

Пусть процесс отделения описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= f(x(t), a, \Delta a, u(t), t); \\ X(t_0) &= X_0,\end{aligned}\tag{22.1}$$

где $X(t)$ — вектор фазовых координат системы отделения; a — вектор конструктивных параметров системы отделения; Δa — вектор случайных отклонений значений конструктивных параметров системы отделения; $u(t)$ — вектор переменных во времени случайных возмущений, действующих на систему в процессе отделения; f — вектор-функция правых частей дифференциальных уравнений, описывающих процесс отделения; t_0 — начальный момент времени.

На фазовые координаты, конструктивные параметры и их отклонения, а также возмущения, действующие на систему, наложены следующие ограничения:

$$\Omega(X(t_k)): \varphi_{i \min} \leq \varphi_i(X(t_k)) \leq \varphi_{i \max}, \quad i = 1, l,\tag{22.2}$$

где $\varphi_i(x)$ — функция от вектора фазовых координат; $\varphi_{i \min}$, $\varphi_{i \max}$ — заданные минимальные и максимальные значения этой функции; t_k — время окончания процесса отделения; l — размерность ограничений на фазовые координаты; Ω — область значений параметров или функций;

$$\Omega_a: a_{i \min} \leq a_i \leq a_{i \max}, \quad i = 1, k;\tag{22.3}$$

$$\Omega_{\Delta a}: \Delta a_{i \min} \leq \Delta a_i \leq \Delta a_{i \max}, \quad i = 1, k;\tag{22.4}$$

где $a_{i \min}$, $a_{i \max}$, $\Delta a_{i \min}$, $\Delta a_{i \max}$ — заданные минимальные и максимальные значения вектора конструктивных параметров и их отклонений; k — размерность вектора конструктивных параметров;

$$\Omega_{u(t)}: u_{i \min}(t) \leq u_i(t) \leq u_{i \max}(t), \quad i = 1, r,\tag{22.5}$$

где $u_{i \min}(t)$, $u_{i \max}(t)$ — заданные минимальные и максимальные значения вектора случайных возмущений; r — размерность вектора случайных возмущений.

В качестве критерия качества системы отделения примем минимально необходимую массу элементов механизма установки (АКУ). Этот критерий можно представить как функцию от значений фазовых координат системы отделения в некоторый промежуточный момент времени t^* , при котором нагрузки в звеньях механизма достигают максимальных значений:

$$m = m(X(t^*)), \quad t^* \in [t_0, t_k], \quad (22.6)$$

где

$$t^* = \operatorname{argmax}_{t \in [t_0, t_k]} m(X(t)); \quad (22.7)$$

m — масса элементов механизма установки.

На вектор фазовых координат $X(t)$ наложено ограничение (22.2).

Задача динамического синтеза механизмов АКУ формулируется следующим образом: требуется найти такой вектор a , который обеспечивал бы минимум критерию (22.6) при соблюдении ограничений (22.2) и (22.3) и наихудшем характере возмущений Δa и $u(t)$, ограниченных условиями (22.4) и (22.5), и вектор $X(t)$ определялся бы решением системы (22.1). При этом ограничение (22.2) должно соблюдаться при любом характере возмущений.

Математическая запись этой задачи имеет вид:

$$a = \operatorname{argmin}_{a \in \Omega_a} \max_{\substack{\Delta a \in \Omega_{\Delta a} \\ u(t) \in \Omega_{u(t)}}} m(X(t^*)) / X(t_k) \in \Omega_{X(t_k)}, \quad (22.8)$$

где $\dot{X}(t) = f(X(t), a, \Delta a, u(t), t)$, $X(t_0) = X_0$; $t, t^* \in [t_0, t_k]$; / — знак условия.

Решение этой минимаксной задачи условной оптимизации в общем виде весьма затруднительно, поскольку аналитическое решение, как правило, найти не удастся, а простой перебор значений вектора конструктивных параметров в условиях действия множества ограничений и большой размерности задачи приводит к непреодолимым вычислительным трудностям.

Для обеспечения практического решения поставленной задачи используем различный характер влияния вектора конструктивных параметров a и векторов Δa и $u(t)$ на процесс отделения. Как подтверждают проведенные расчеты, влияние вектора конструктивных параметров на процесс отделения более значительно, чем воздействие возмущений. В дальнейшем возмущения Δa и $u(t)$ будем называть малыми по сравнению с a с точки зрения влияния на критерий качества системы m , если выполняется следующее соотношение:

$$\xi_m = \frac{\max_{\delta a} m(a + \delta a, 0, 0) - \min_{\delta a} m(a + \delta a, 0, 0)}{\max_{a, u(t)} m(a, \Delta a, u(t)) - \min_{a, u(t)} m(a, \Delta a, u(t))} > n_{\text{зад}}, \quad (22.9)$$

где

$$a, a + \delta a \in \Omega_a;$$

$$\Delta a \in \Omega_{\Delta a};$$

$$u(t) \in \Omega_{u(t)};$$

δa — задаваемое (контролируемое) приращение вектора a (в отличие от случайного приращения Δa); ξ_m — порядок малости по критерию качества системы m ; $n_{\text{зад}}$ — некоторое заданное число.

Как показывают расчеты, для реальных систем отделения $\xi_m > 5 + 15$, т.е. можно считать, что векторы Δa и $u(t)$ оказывают на процесс отделения (и на критерий качества системы) на порядок меньшее влияние, чем a вектор конструктивных параметров.

Указанное свойство малости позволяет упростить решение задачи (22.8). В этом случае решение минимаксной задачи (22.8) можно свести к отысканию глобального минимума критерия качества по a и поиску наихудших режимов по Δa и $u(t)$, т.е. к решению задачи максимизации критерия качества по Δa и $u(t)$ при заданном векторе a . Это особенно целесообразно тогда, когда в области допустимых значений Ω_a достигается единственный минимум критерия качества, или наименьшее значение критерия качества соответствует границе области

Ω_a (как будет показано далее, именно эти случаи имеют место в нашей задаче).

Перебор же значений вектора конструктивных параметров можно производить не по всей области допустимых значений, а лишь из окрестности решения невозмущенной системы, поскольку

$$|m(a, \Delta a, u(t)) - m(a, 0, 0)| \ll m(a, 0, 0).$$

Возмущения же (и это подтверждается численными расчетами) в основном оказывают влияние на выполнение ограничений (22.2) и значения моментов времени t_k, t^* .

Таким образом, задачу поиска «наилучшего из наихудшего» предлагается заменить поиском наихудшего режима действия возмущений для наилучшего набора конструктивных параметров системы.

Целесообразность такого подхода обуславливает разделение поиска экстремумов по $a, \Delta a$ и $u(t)$, приводящем к значительным сокращениям объема необходимых вычислений.

Поиск глобального минимума критерия качества по вектору конструктивных параметров a может быть осуществлен любым из известных методов параметрической оптимизации (см. п. 21.2.1). При этом минимальное значение критерия качества достигается обычно на границе области Ω_a . Сама же область Ω_a может быть задана в виде прямоугольника с учетом корректирующего влияния ограничения (22.2).

Достижение наименьшего значения произвольным целевым функционалом (критерием качества) J на границе области Ω_a справедливо, например, для линейной системы:

$$a^* = \operatorname{argmin}_{a \in \Omega_a} J(X(t_k)), \quad (22.10)$$

где $\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)a$, $X(t_0) = X_0$; a^* — оптимальное значение вектора конструктивных параметров.

Выражение (7.10) можно представить в следующем виде:

$$a^* = \operatorname{argmin}_{a \in \Omega_a} \int_{t_0}^{t_k} \lambda^T(\tau) B(\tau) d\tau, \quad (22.11)$$

где $\frac{d\lambda}{d\tau} = A^T(\tau) \lambda(\tau)$; $\lambda(0) = \frac{\partial J^T}{\partial X(t_k)}$; τ — обратное время; $\tau = t_k - t$; $t \in [t_0, t_k]$; T — знак транспонирования.

Из соотношения (22.11) видно, что λ не зависит от a . В этом случае a^* расположено на границе области Ω_a и определяется соотношением компонент вектора

$$v^T = \int_{t_0}^{t_k} \lambda^T(\tau) B(\tau) d\tau,$$

а в случае задания области Ω_a в виде прямоугольника — знаком соответствующей компоненты.

Чем ближе система по своим динамическим свойствам к линейной, тем более справедливо утверждение о расположении a^* на границе области Ω_a . Как показали численные расчеты (см. § 22.3), это свойство справедливо и для исследуемой нами сложной динамической системы по ряду параметров.

Будем считать, что вектор a^* найден. Введем необходимое для дальнейших рассуждений понятие поверхности уровня.

Под i -й поверхностью уровня критерия качества системы m и вектора конструктивных параметров a будем понимать такую поверхность, для каждой точки которой справедливо следующее неравенство:

$$m_i - \Delta \leq m(a^*, 0, 0) - m(a, 0, 0) \leq m_i + \Delta, \quad (22.12)$$

где m_i — заданное значение критерия качества (целевого функционала); Δ — точность определения поверхности уровня; i — номер поверхности уровня.

Введем далее понятие области разрешенных точек ("разрешенных зон") поверхности уровня. Разрешенной точкой поверхности уровня будем называть такую, для которой выполняется условие (22.2) для всех допустимых значений векторов Δa и

$u(t)$. Вся совокупность разрешенных точек поверхности уровня образует область разрешенных точек поверхности уровня (ОРТПУ).

В результате решения задачи должны быть найдены области разрешенных точек ("разрешенных зон") поверхности уровня, для которых максимальные значения целевого функционала (критерия качества) при действии «наихудших» возмущений имеют минимальные показатели. Сами же поверхности уровня, имеющие одинаковые значения целевого функционала, будем строить лишь в области оптимальных значений вектора конструктивных параметров a^* , полученных при невозмущенном движении системы.

Последовательность решения задачи состоит в построении в окрестности a^* поверхностей уровня, поочередном их рассмотрении и поиска на них ОРТПУ. Среди точек ОРТПУ решение проводим по показателю m_n :

$$m_n = \max_{\substack{\Delta a \in \Omega_{\Delta a} \\ u(t) \in \Omega_{u(t)}}} m(i, \Delta a, u(t)). \quad (22.13)$$

Перебор поверхностей уровня упорядочен по возрастанию m_i в неравенстве (22.12) и проводится до тех пор, пока по одной из поверхностей уровня решение не будет найдено.

Для того, чтобы оценить, является ли точка поверхности уровня разрешенной или нет, необходимо исследовать возмущенное движение системы. Для этого разложим исходную систему уравнений (22.1) в окрестности любой точки поверхности уровня в ряд. В этом случае возмущенное движение системы можно описать следующей системой уравнений:

$$\delta \dot{X}(t) = A(t) \delta X(t) + B(t) \Delta a + C(t) U(t);$$

$$\delta X(t_0) = 0;$$

$$A(t) = \frac{\partial f(X, a, 0, 0)}{\partial X}; \quad (22.14)$$

$$B(t) = \frac{\partial f(X, a, 0, 0)}{\partial \Delta a};$$

$$C(t) = \frac{\partial f(X, a, 0, 0)}{\partial u},$$

где f — вектор — функция правых частей системы уравнений (22.1).

Из решения этой системы уравнений может быть получено Δa^* по аналогии с выражением (22.10) и при замене a^* на Δa^* . Причем и в этом случае максимум целевого функционала достигается на границе области $\Omega_{\Delta a}$.

Выражение $u^*(t)$ может быть получено из решения системы линейных уравнений:

$$\delta \dot{X}(t) = A(t) \delta X(t) + C(t) U(t), \quad X(t_0) = 0. \quad (22.15)$$

Тогда

$$u^*(t) = \operatorname{argmax}_{u(t) \in \Omega_{u(t)}} \int_{t_0}^{t_k} \lambda^T(\tau) C(\tau) u(\tau) d\tau, \quad (22.16)$$

$$\text{где } \frac{d\lambda}{d\tau} = A^T(\tau) \lambda(\tau), \quad \lambda(t_0) = \frac{\partial J(X(t_k))}{\partial X(t_k)};$$

$$\tau = t_k - t; \quad t \in [t_0, t_k].$$

Очевидно, что решение $u^*(t)$ для каждого t находится на границе области $\Omega_{u(t)}$.

Таким образом, разрешенной точкой будет таковая, в которой не будут нарушаться ограничения (22.2) для всех Δa^* и $u^*(t)$.

§ 22.2. АЛГОРИТМ ДИНАМИЧЕСКОГО СИНТЕЗА МЕХАНИЗМОВ АКУ С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИЯ ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИХ СИЛ И СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ.

Блок-схема алгоритма динамического синтеза механизмов АКУ с учетом действия детерминистических сил и случайных возмущений приведена на рис. 22.1.

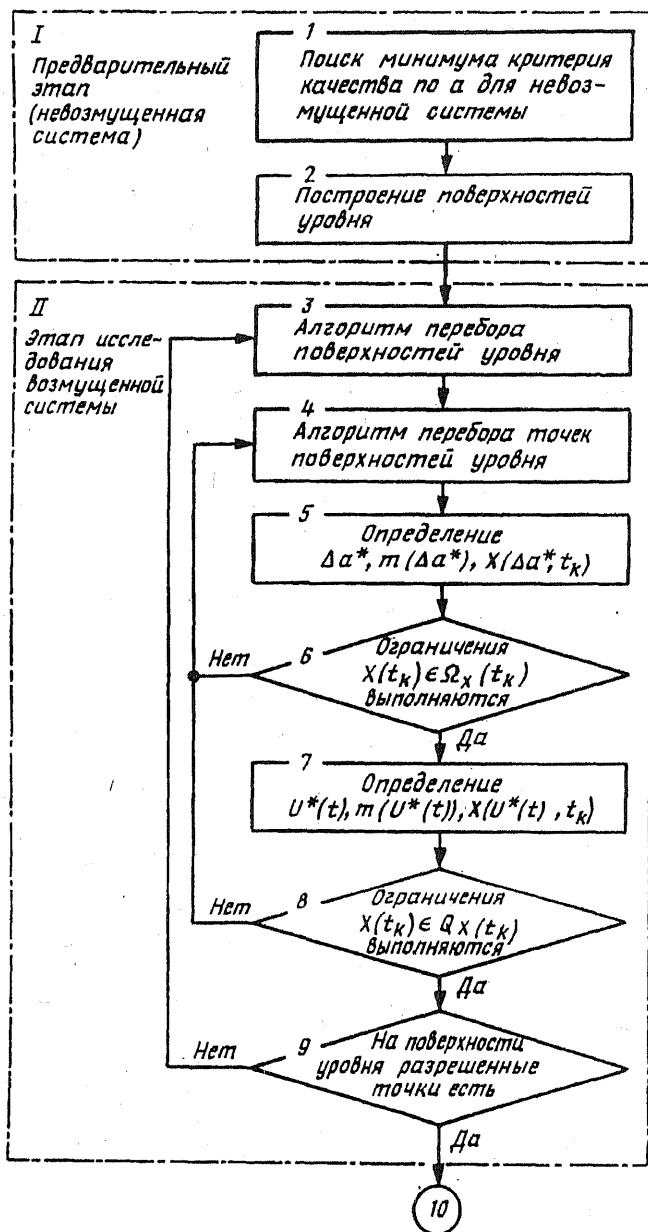
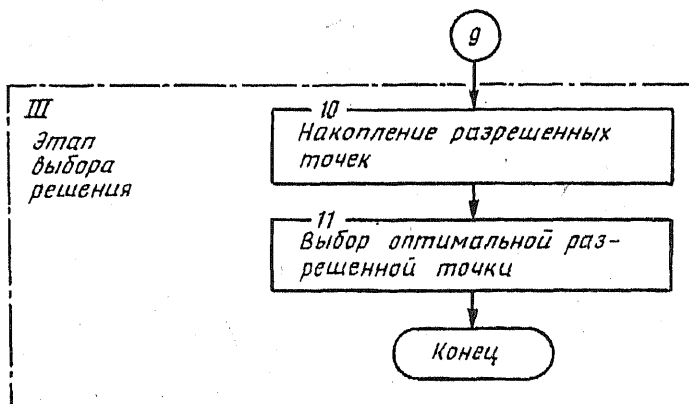


Рис. 22.1



Окончание рис. 22.1

Отраженная в блок-схеме логика алгоритма динамического синтеза описана в § 22.1. Остановимся здесь более подробно лишь на содержании блока 7, являющегося наиболее трудоемким. Приведем два возможных алгоритма его реализации. Оба алгоритма опробованы при численных исследованиях (см. § 22.3).

Первый из алгоритмов определяется решением задачи (22.16) и соответствует случаю действия постоянного возмущения $u(t)$. Блок-схема этого алгоритма приведена на рис. 22.2 (блок 7 здесь имеет обозначение 7¹).

Во втором алгоритме нашел отражение случай, когда действующее возмущение представлено кусочно-непрерывной случайной функцией, ограниченной по модулю, и имеет разрывы первого рода.

Физически разрывное поведение возмущения во времени является безынерционным. Реальные случайные возмущения обладают инерционностью, например, случайная ветровая (аэродинамическая) нагрузка не может мгновенно изменить свое направление, что равносильно мгновенному изменению скорости ветра. Поэтому допущение о возможном разрывном поведении случайного возмущения является идеализацией его реального поведения.

Однако такая идеализация, как показано в работе [29], приводит к наихудшим возможным воздействиям на систему, что

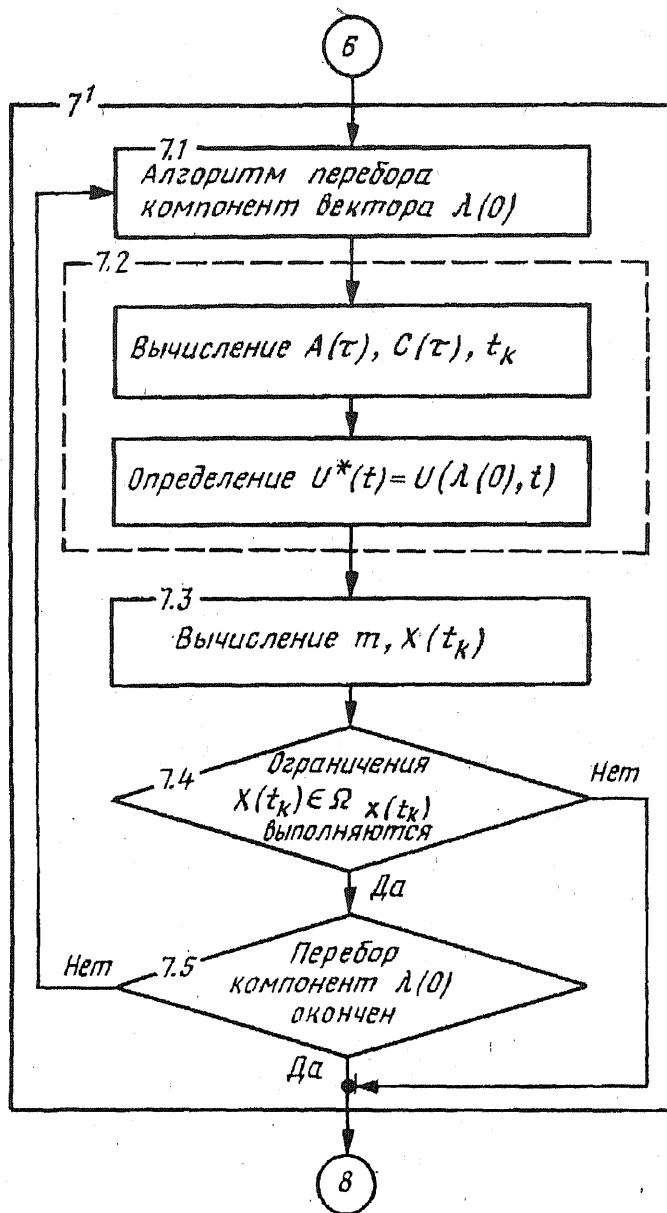


Рис. 22.2

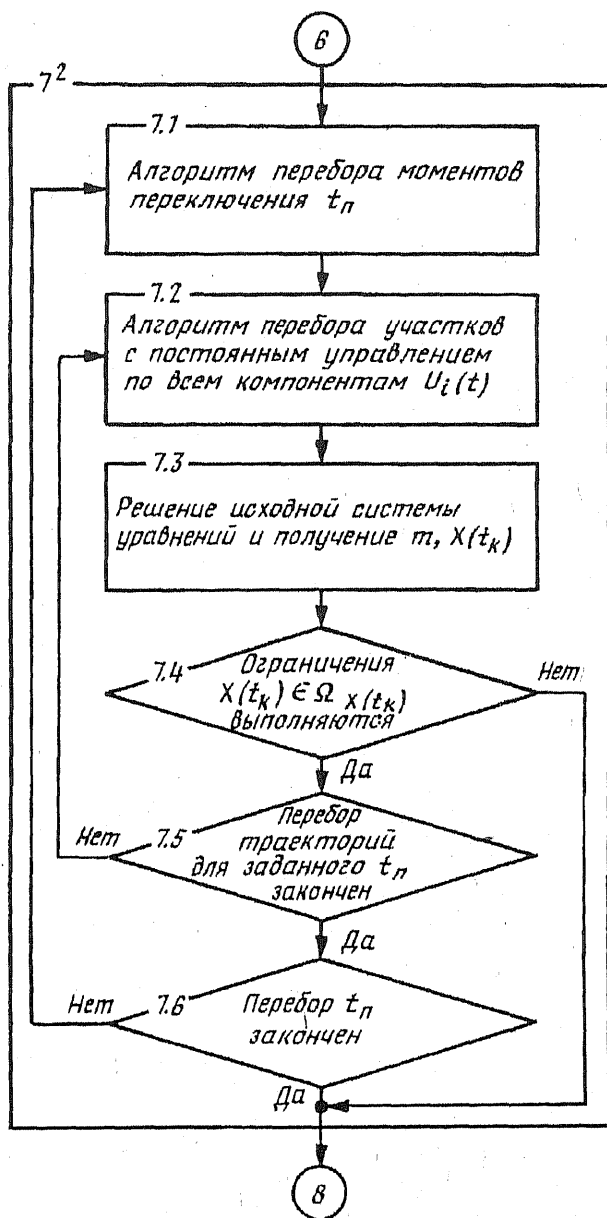


Рис. 22.3

представляет интерес в рамках проводимого в настоящей работе исследования.

Блок-схема второго алгоритма приведена на рис. 22.3 (блок 7 здесь имеет обозначение 7^2).

§ 22.3. ПРИМЕР ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве примера исследования рассмотрим динамическую и математическую модели упругого рычажного механизма АКУ. Динамический анализ этого механизма проведен в главе 20, а оптимизационный динамический синтез параметров — в главе 21.

В настоящем примере наряду с оптимизацией конструктивных параметров жесткостей звеньев механизма АКУ C_2 и C_3 (см. рис. 20.2), определяющих вектор a и в значительной степени определяющих упругие свойства системы, производится учет случайных возмущений. В качестве случайных возмущений рассматриваются технологические отклонения жесткостей ΔC_2 и ΔC_3 звеньев механизма АКУ (вектор случайных отклонений Δa), и случайные отклонения аэродинамических нагрузок, вызванные интерференцией, скосами потока, порывами ветра и т.п. Случайные возмущения в виде отклонений аэродинамических нагрузок (вектор переменных во времени случайных возмущений $u(t)$) представлены дополнительными перегрузками $n_x(t)$ и $n_y(t)$ отделяемого изделия по осям OX и OY .

Критерием качества системы выбрана суммарная масса m элементов механизма АКУ (задний рычаг, дно и стенки привода и подвижная балка).

Следует отметить, что наряду с оценкой влияния на поведение динамической системы исследуемых в примере конструктивных параметров, их случайных отклонений (технологических разбросов) и внешних случайных возмущений по предложенной методологии и алгоритмам может быть рассмотрено влияние любых других конструктивных параметров, их отклонений и действующих внешних случайных возмущений (например, случайное движение самолета — носителя при отделении и т.п.).

Диапазоны изменений вектора конструктивных параметров a , вектора случайных отклонений значений конструктивных па-

раметров Δa и вектора переменных во времени случайных возмущений $u(t)$ имеют вид:

$$0,325 C_{i \text{ ном}} \leq C_i \leq 0,475 C_{i \text{ ном}}, \quad i = 2, 3; \quad (22.17)$$

$$|\Delta C_i| \leq 0,03 C_{i \text{ ном}}, \quad i = 2, 3; \quad (22.18)$$

$$|n_x(t)| \leq 0,5 n_{x \text{ ном}}; \quad (22.19)$$

$$|n_y(t)| \leq 0,5 n_{y \text{ ном}}, \quad (22.20)$$

где $C_{2 \text{ ном}}$, $C_{3 \text{ ном}}$, $n_{x \text{ ном}}$, $n_{y \text{ ном}}$ — заданные (расчетные, номинальные) значения жесткостей звеньев 2 и 3 механизма АКУ и перегрузок отделяемого изделия (при расчетах использовались относительные значения конструктивных параметров и случайных возмущений).

На фазовые координаты системы в конце отделения также наложены ограничения:

$$0,3 V_{y \text{ р}} \leq V_y(t_k) \leq 1,6 V_{y \text{ р}}; \quad (22.21)$$

$$0,3 \phi_{\text{р}} \leq \phi(t_k) \leq 1,5 \phi_{\text{р}}; \quad (22.22)$$

$$-\dot{\phi}_{\text{р}} \leq \dot{\phi}(t_k) \leq \dot{\phi}_{\text{р}}, \quad (22.23)$$

где $V_{y \text{ р}}$, $\phi_{\text{р}}$, $\dot{\phi}_{\text{р}}$ — расчетные значения фазовых координат изделия (вертикальной скорости, угла тангажа, угловой скорости тангажа) в конце отделения; t_k — момент окончания процесса отделения.

Таким образом, задача исследования состоит в определении таких значений жесткостей звеньев механизма АКУ, для которых при наихудшем характере случайных возмущений достиглось бы минимальное значение критерия качества системы — суммарной массы элементов механизма АКУ и выполнялись бы ограничения, накладываемые на значения фазовых координат в конце отделения. При расчетах использовались математические модели динамического анализа и оптимизационного динамического синтеза из глав 20 и 21, области значений случайных возмущений и ограничения на фазовые координаты определены соотношениями (22.17) — (22.23).

Решение задачи проводим в соответствии с блок-схемой алгоритма динамического синтеза (см. рис. 22.1).

На предварительном этапе исследования, используя математическую модель оптимизационного динамического синтеза (см. главу 21), определяем такие значения конструктивных параметров, при которых критерий качества системы достигает минимума и строим поверхности уровня критерия качества при нулевых возмущениях (см. рис. 22.4).

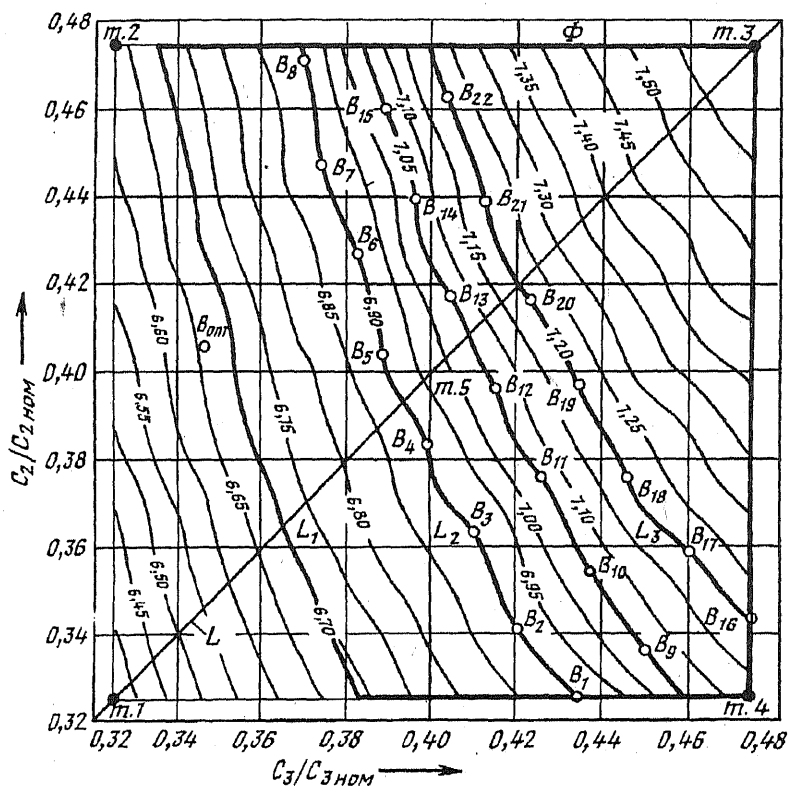


Рис. 22.4

В качестве координат при построении линий уровня функции $m(C_2, C_3)$ выбраны относительные значения жесткостей звеньев $C_2 / C_{2\text{НОМ}}$, $C_3 / C_{3\text{НОМ}}$. Жирной линией на рис. 22.4

выделена область Φ , в которой выполняются ограничения на фазовые координаты в конце отделения (22.21) — (22.23) при нулевых возмущениях.

Из рис. 22.4 видно, что за множество точек поверхности (для двумерной задачи поверхности уровня вырождаются в линии уровня) уровня, обеспечивающих минимум критерия качества m при условии отсутствия возмущений, можно принять множество точек $B_{\text{опт}}^0$, расположенных на линии уровня с показателем $m = 6,70$, практически совпадающей с левой границей области Φ .

Для иллюстрации характера изменения функции $m(C_2, C_3)$ на рис. 22.4 проведем прямую L . Тогда на рис. 22.5 можно построить зависимость m от значений относительных жесткостей $C_2 / C_{2\text{ном}}$, $C_3 / C_{3\text{ном}}$. После построения поверхностей (линий) уровня и их сечений этап исследования невозмущенной системы закончен.

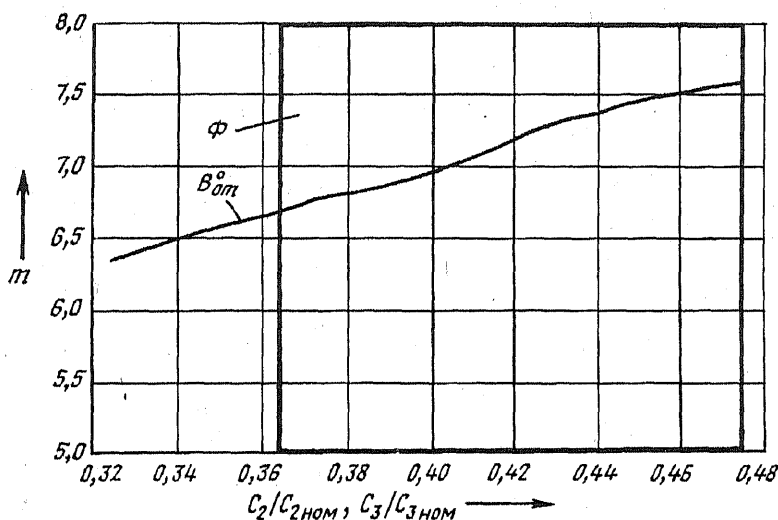


Рис. 22.5

При исследовании возмущенной системы алгоритм перебора линий уровня функции $m(C_2, C_3)$ упорядочим по возрастанию

величины m . В дальнейшем через $m(0, 0)$ будем обозначать значения критерия качества m для невозмущенной системы. На рис. 22.4 рабочие линии уровня, для которых производится анализ возмущенной системы, обозначены как L_1, L_2, L_3 , причем их перебор производится в той же последовательности.

На выбранных линиях уровня L_1, L_2, L_3 укажем точки $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{22}$, для которых будет проводиться анализ возмущенного движения, причем порядок рассмотрения точки согласуется с ее номером.

Реализация пунктов 5 и 6 алгоритма (см. рис. 22.1) заключается в поиске таких наихудших отклонений вектора конструктивных параметров, которые даже без учета переменных во времени случайных возмущений позволяют нарушить ограничения на конечные значения фазовых координат. Реализация этих пунктов дает возможность сократить число рассматриваемых точек поверхностей (линий) уровня или самих поверхностей уровня, для которых следует проводить полное исследование возмущенного движения. Как показывают расчеты, перебор линий уровня следует начинать с L_1 , для которой $m(0, 0) = 6,90$ кг.

При проведении предварительных исследований возмущенного движения системы (расчеты проводились для точек 1, 2, 3, 4, 5 и других на рис. 22.4 с использованием алгоритма 7¹ на рис. 22.2) было выявлено, что наихудшими как по критерию качества системы, так и по возможным выходам за пределы ограничений на фазовые координаты, являются возмущения вида:

$$n_y(t) = \begin{cases} n_{y \max}, & \text{если } t > t_{\Pi}; \\ n_{y \min}, & \text{если } t < t_{\Pi}, \end{cases}$$

или

$$n_y(t) = \begin{cases} n_{y \min}, & \text{если } t < t_{\Pi}; \\ n_{y \max}, & \text{если } t > t_{\Pi}, \end{cases}$$

$$n_x(t) = n_{x \max},$$

где t_{Π} — момент переключения (разрыва функции $n_y(t)$), который может быть различным для разных C_2 и C_3 , и принадлежит области $[0, t_k]$.

Появление более одного переключения функции $n(t)$ за короткое время катапультирования ($< 0,2$ с) практически маловероятно, да и само переключение за столь короткий промежуток времени может не произойти. Однако для более полного учета всех возможных действующих факторов в дальнейших расчетах предусмотрено воздействие случайных возмущений с разрывами первого рода, приводящих к наихудшему состоянию системы.

При этом полагаем, что такой характер наихудшие возмущения сохраняют во всей области значений параметров C_2 и C_3 .

Таким образом, при исследовании будем рассматривать конечное число возможных реализаций случайных возмущений и тем самым решать задачу параметрической оптимизации.

Для каждой рассматриваемой точки B_i реализуем п. 7 алгоритма по варианту 7². На рис. 22.6 показаны результаты расчета. Здесь, кроме линий уровня L_1, L_2, L_3 невозмущенной системы, показаны линии уровня R_i ($i = 1, 5$) для критерия качества возмущенной системы m_B , где

$$m_B = \max_{\Delta C_2, \Delta C_3, n_x(t), n_y(t)} m(\Delta C_2, \Delta C_3, n_x(t), n_y(t)).$$

На рис. 22.6 жирными линиями показаны также границы области выполнения ограничений: A_1 — для невозмущенной системы; A_2 — для возмущенной системы (с учетом всех действующих возмущений $\Delta C_2, \Delta C_3, n_x(t), n_y(t)$; A_3 — для случая действия на систему только возмущений $n_x(t)$ и $n_y(t)$. Штриховкой выделена область Φ , где ограничения выполняются всегда. Окружностями показаны 3% отклонения областей вокруг рассматриваемых на линиях уровня точек B_i , вызванных случайными технологическими разбросами жесткостей звеньев.

Как видно из рис. 22.6, ни в одной точке линий L_1 и L_2 ограничения на конечные значения фазовых координат при воздействии наихудших случайных возмущений не выполняются, а для линии уровня L_3 во всех точках и их окрестности ограничения выполняются. В качестве разрешенных на линии уровня L_3 могут быть взяты точки $B_{16}, B_{17}, B_{18}, \dots, B_{22}$. В

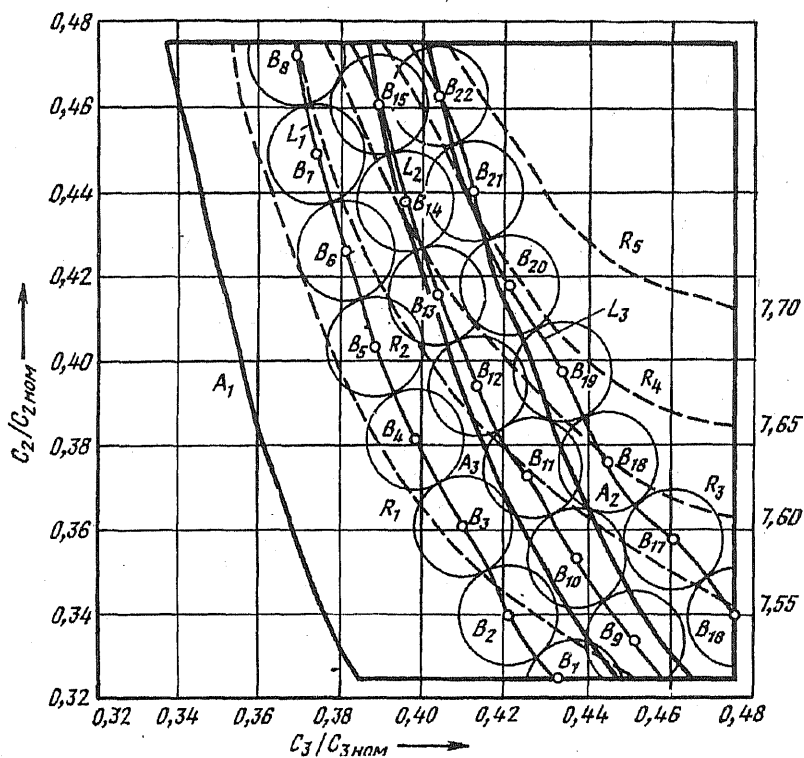


Рис. 22.6

качестве же решения следует принять точку B_{16} , имеющую минимальный показатель качества m_B .

На рис. 22.7 показана диаграмма изменения показателя качества m_B от номера рассматриваемой точки на линиях уровня L_i ($i = 1, 2, 3$).

Для оценки порядка малости возмущений ΔC_2 , ΔC_3 , $n_x(t)$, $n_y(t)$ по сравнению с C_2 , C_3 по критерию качества системы m , построим функцию m_H :

$$m_H = \min_{\substack{\Delta C_2, \Delta C_3 \\ n_x(t), n_y(t)}} m(\Delta C_2, \Delta C_3, n_x(t), n_y(t)).$$

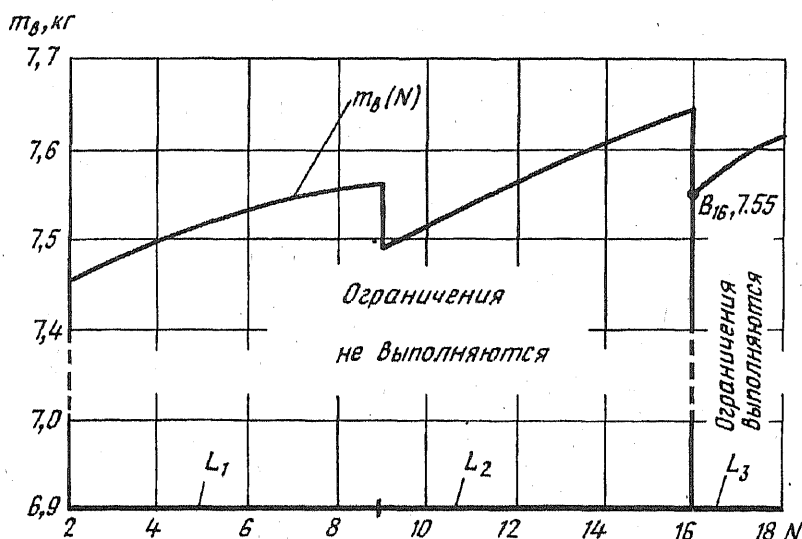


Рис. 22.7

Вид этой функции показан на рис. 22.8. Для иллюстрации характера поведения критерия качества системы на рис. 22.9 показаны результаты сечения прямой L линий уровня по рис. 22.8. Здесь: m — критерий качества невозмущенной системы; $m_{\text{в}}$ — максимумы значений критерия качества возмущенной системы; $m_{\text{н}}$ — минимумы значений критерия качества возмущенной системы.

Анализ результатов расчета показывает, что влияние на критерий качества системы вектора конструктивных параметров (в нашем случае он представлен жесткостями звеньев механизма C_2 и C_3) на порядок больше влияния векторов случайных отклонений значений конструктивных параметров и переменных по времени случайных возмущений — ΔC_2 , ΔC_3 , $n_x(t)$, $n_y(t)$. Таким образом, принятые при разработке алгоритма расчета допущения справедливы.

A_1 - Граница ограничений с нулевыми возмущениями
 A_2 - Граница с учетом 3% окрестности
 A_3 - Граница ограничений без учета 3% окрестности

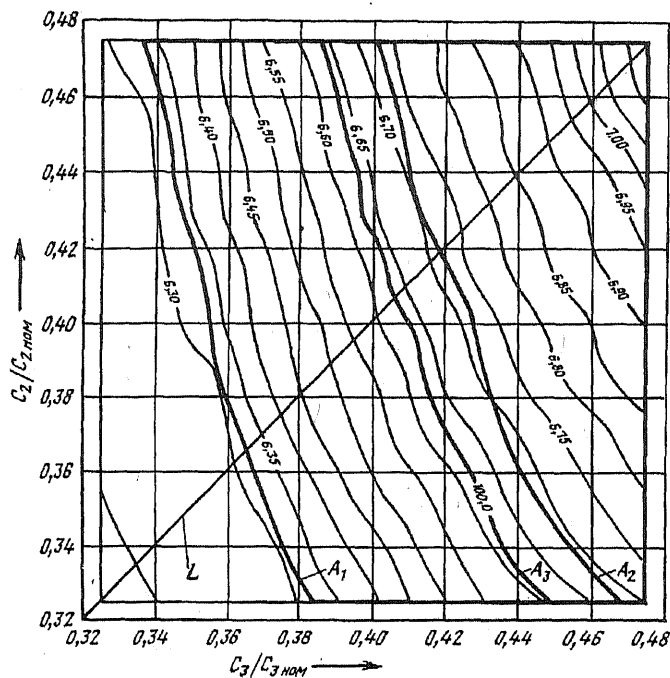


Рис. 22.8

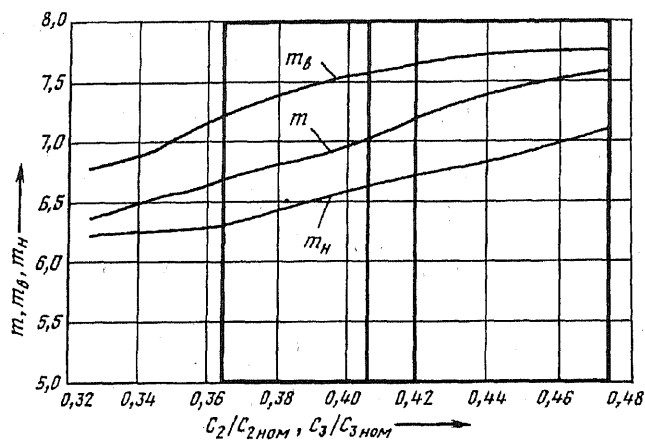


Рис. 22.9

Глава 23. ПУТИ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ПЕРСПЕКТИВНЫХ АКУ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АДАПТИВНЫХ СХЕМ УПРАВЛЕНИЯ

§ 23.1. АНАЛИЗ ПРЕДЕЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ АКУ С ФИКСИРОВАННОЙ НАСТРОЙКОЙ ПАРАМЕТРОВ И ОБОСНОВАНИЕ НЕОБХОДИМОСТИ ПЕРЕХОДА В ПЕРСПЕКТИВЕ К АДАПТИВНЫМ СХЕМАМ

Современные АКУ предназначены для обеспечения пуска ракет в широком диапазоне условий применения. Основной их задачей является обеспечение в этих условиях требуемых параметров отделения ракеты от самолета, т.е. параметров, являющихся начальными условиями свободного движения ракеты.

Условия применения определяются режимом полета самолета (высота, число M) и его маневренной перегрузкой n_y^c . Используемые в настоящее время конструкции АКУ с фиксированной настройкой параметров могут обеспечить требуемые условия отделения, как правило, лишь в некоторой области зоны возможного применения, т.е. зоны, состоящей из режимов полета самолета, на которых происходит пуск ракеты. В связи с этим проблема расширения указанной области становится весьма актуальной для современных и перспективных самолетов [31]*, что обусловлено увеличением:

диапазона значений высот, скоростей, перегрузок и углов атаки самолета как параметров режимов пуска ракет;

степени универсализации находящихся на вооружении АКУ, когда к спроектированному под определенную ракету и определенный самолет АКУ предъявляются новые требования по применению новых образцов ракет на новых образцах самолетов.

К числу основных параметров отделения относятся: V_y — вертикальная составляющая линейной скорости ракеты, ω_z — угловая скорость корпуса ракеты относительно поперечной оси. Требуемые значения этих параметров определяются как условием безопасности отделения ракеты от самолета (отсутствие столкновения ракеты с конструкцией самолета), так и условиями устойчивости контура стабилизации ракеты. Эти два типа

* Список литературы [31, 32, 33] к главе 23 см. на стр. 285.

условий, в частности, по параметру ω_z оказываются противоречивыми. Так, если по условиям безопасности отделения, модуль ω_z необходимо увеличивать, то по условиям устойчивости, его необходимо уменьшать. В результате область допустимых значений (ОДЗ) параметра ω_z (на пикирование) оказывается ограниченной сверху и снизу, что затрудняет решение задачи локализации параметра ω_z внутри ОДЗ во всех условиях применения. Поскольку эта задача с помощью АКУ с фиксированной настройкой конструктивных параметров в ряде случаев решена быть не может, приходится рассматривать перестраиваемое по условиям применения (адаптивное) АКУ. Остановимся на этом вопросе несколько подробнее [31].

Под однопозиционным АКУ будем понимать конструкцию с одним значением усилия толкания привода АКУ. Отметим, что именно по такой схеме построены все современные образцы АКУ. *Задача проектирования однопозиционного АКУ* математически может быть сформулирована [31] как *задача локализации параметров* отделения внутри ОДЗ, что позволяет однозначно определить требуемое значение толкающей силы P . Проведем анализ однопозиционного АКУ с учетом полной зоны возможного применения H, M, n_y^c . Зона пусков в координатах M, H приведена на рис. 23.1, а. Для современных самолетов можно принять

$$n_{y \min}^c \leq n_y^c \leq n_{y \max}^c, \quad (23.1)$$

где $n_{y \min}^c$ — минимальное значение маневренной перегрузки, соответствующее режиму пикирования и равное $\sim 0,2$; $n_{y \max}^c$ — максимальное значение маневренной перегрузки, соответствующее режиму кабрирования и равное $\sim 4,5$.

На рис. 23.1, б приведена зависимость параметра ω_z как функции от n_y^c для режимов, соответствующих ряду значений величины скоростного напора. Из рассмотрения рис. 23.1 следует:

1. Зона возможных пусков в координатах H, M охватывает широкий диапазон скоростных напоров: от минимального значения $\sim 1000 \text{ кг/м}^2$, до 10000 кг/м^2 .

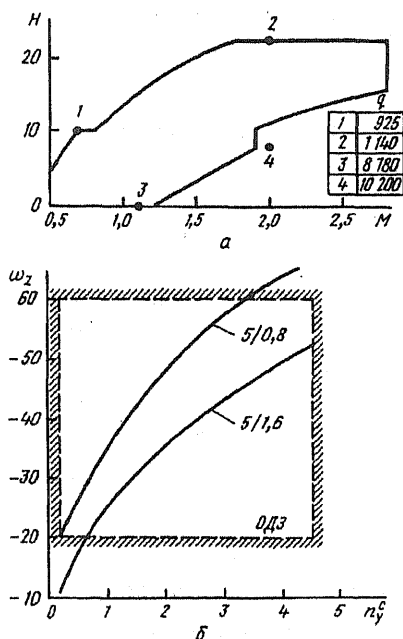


Рис. 23.1

2. Режимы пусков ракеты (величины H , M , n_y^c) оказывают существенное влияние на параметры отделения ω_z . Так, изменение перегрузки самолета от величины 0,2 до величины 4,5 приводит к изменению ω_z в четыре раза, изменение режима пуска от значений $H/M = 5,0/1,6$ до значений $H/M = 22/2,83$ при $n_y = 1,0$ приводит к изменению ω_z в два раза.

3. При изменении условий пуска в рассматриваемых пределах параметр ω_z выходит за границы ОДЗ, (n_y^c : от 0,2 до 4,5; ω_z : от $-20^\circ/\text{с}$ до $-60^\circ/\text{с}$), причем этот выход является двухсторонним (пересекаются верхняя и нижняя границы области), т.е. параметр ω_z является более критичным, чем параметр V_y имеющий одностороннее ограничение.

4. Критическими режимами, при которых имеет место выход значений параметра n_y^c за пределы ОДЗ являются:

а) по величине n_y^c :

$n_{y\min}^c = 0,2$ — по верхней границе,

$n_{y\max}^c = 4,5$ — по нижней границе;

б) по режиму пуска:

$H/M = 5,0/1,6$ — по верхней границе,

$H/M = 5,0/0,8$ — по нижней границе.

Анализ полученных данных показывает, что однопозиционное АКУ не может обеспечить локализацию параметров отделения в пределах ОДЗ. В связи с указанным перейдем к рассмотрению *двухпозиционного АКУ*, в котором величина толкающей силы имеет два номинала настройки. В качестве настроечного параметра будем использовать величину n_y^c , в качестве регулировочного значения относительную величину толкающей силы $\bar{P} = P / P_{\text{ном}}$.

Задачей анализа является:

1. Определение порогового значения настроечного параметра $n_{y\text{п}}^c$, при котором необходим переход от одного номинала настройки $\bar{P}_1$ к другому $\bar{P}_2$.

2. Определение значений номиналов настроек $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Отметим прежде всего, что для критических режимов 5/0,8 и 5/1,6 выход параметра ω_z за пределы ОДЗ происходит в первом случае по нижней границе, во втором — по верхней границе. Поскольку для ликвидации выхода по верхней границе необходимо увеличение параметра $\bar{P}$ (по сравнению со штатным значением для однопозиционного АКУ), а для ликвидации выхода по нижней границе — его уменьшение, то параметры $\bar{P}_{1,2}$ должны удовлетворять зависимости

$$\bar{P} = \begin{cases} \bar{P}_1, & \text{при } n_y^c \leq n_{y\text{п}}^c; \\ \bar{P}_2 < \bar{P}_1, & \text{при } n_y^c > n_{y\text{п}}^c. \end{cases} \quad (23.2)$$

Как следует из приведенных на рис. 23.2, а зависимостей $\omega_z(\bar{P})$ для критических режимов 5/0,8 и 5/1,6 при $n_y^c=1$, изменение параметра $\bar{P}$ является эффективным средством воздей-

ствия на параметры отделения. На рис. 23.2,б приведены зависимости $\omega_z(n_y^c)$, рассчитанные для критических режимов 5/0,8 и 5/1,6 для $\bar{P}_1 = 0,9$ и $\bar{P}_2 = 1,33$, обеспечивающих при $n_y^c = 1,2$ полную локализацию параметра ω_z в пределах ОДЗ. При

$$\bar{P} = \begin{cases} 1,33, & \text{при } n_y^c < n_{y\text{п}}^c = 1,2; \\ 0,9, & \text{при } n_y^c \geq n_{y\text{п}}^c. \end{cases} \quad (23.3)$$

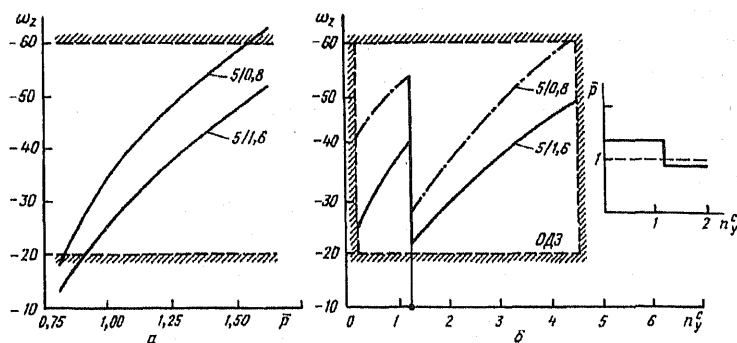


Рис. 23.2

Отметим, что особенностью полученного решения является то, что ОДЗ по параметру ω_z используется практически полностью, откуда следует, в частности, что задача локализации в пределах *суженной* ОДЗ требует перехода к трехпозиционному АКУ. Следует однако отметить, что дальнейшее увеличение числа номиналов настройки толкающей силы (позиций) приводит к усложнению конструкции АКУ и в настоящее время рекомендовано быть не может, хотя и сбрасывать его со счета также не следует. Подведем итоги рассмотрения. Мы показали, что в тех случаях, когда параметры отделения не могут быть локализованы в пределах их ОДЗ с помощью однопозиционного АКУ, эффективным средством решения задачи является переход к конструкции двухпозиционного АКУ (в более общем случае — многопозиционного АКУ). Тем самым показана возможность создания адаптивного АКУ, использующего только *априорную*

информацию, в том числе предпусковую, имеющуюся на борту самолета. Очевидно, что в этом случае АКУ строится по схеме разомкнутой системы [31]. Естественно, что желательно было бы наряду с априорной информацией использовать также и *текущую* информацию, что дало бы возможность строить адаптивное АКУ по схеме замкнутой системы.

С учетом особенностей рассматриваемого объекта в качестве таких схем целесообразно использовать беспойсковые адаптивные системы (БАС) прямого адаптивного управления (direct adaptive control), основанные на использовании рассогласования (невязки) процессов в системе и ее эталонной модели. К числу таких схем относятся и схемы с алгоритмами, синтезируемыми на основе концепции обратных задач динамики. Вместе с тем, основной трудностью построения АКУ по схеме замкнутой системы является малое время движения ракеты по АКУ (порядка 0,05 — 0,1 с).

§ 23.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ СИНТЕЗА АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ МЕТОДАМИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

В последние годы успешно развиваются процедуры синтеза алгоритмов методами обратных задач динамики. С использованием этого подхода получены эффективные алгоритмы для ряда прикладных задач управления полетом [32].

Методы синтеза алгоритмов в указанном подходе основаны на оптимизации динамических систем по локальным функционалам, характеризующим энергию движения [33].

Основные положения метода:

1. Динамические характеристики проектируемой системы для каждой степени свободы назначаются с помощью эталонных моделей.

2. Структура и параметры алгоритмов определяются из условия, чтобы в процессе управления фазовые траектории управляемого объекта с необходимой точностью следили за фазовыми траекториями эталонных моделей.

3. Степень приближения фазовых траекторий, а следовательно, и динамических характеристик, оценивается с помощью квадратичных функционалов, записанных для отклонений угловых ускорений.

4. Процесс движения к экстремуму организуется по схеме градиентного метода.

Доказано [32], что синтезируемые этим методом алгоритмы допускают неограниченное повышение уровня усиления в контурах управления таким образом, что в асимптотике осуществляется динамическая декомпозиция полной (нелинейной) системы по каждой степени свободы на независимые линейные подсистемы, динамика которых идентична динамике эталонных моделей. Существенно, что синтезируемые алгоритмы оказываются нечувствительными к изменению параметров управляемых объектов и внешних возмущающих сил от режимов применения. Иначе говоря, синтезируемые алгоритмы придают системе свойства параметрической адаптивности.

Рассмотрим возможности синтеза алгоритмов на основе концепции обратных задач динамики для задачи создания адаптивного АКУ.

Уравнения движения ракеты на АКУ запишем в виде:

$$-\omega_z + \dot{\alpha} + \frac{1}{T^\alpha} \alpha = -\bar{Q} - \bar{R}_y; \quad (23.4)$$

$$\dot{\omega}_z + 2h\omega_z + \omega_\alpha^2 \alpha = \bar{M} - \bar{M}_z.$$

Здесь ω_z — угловая скорость движения ракеты по тангажу; α — угол атаки.

Коэффициенты уравнений системы (23.4) определяются известными формулами [32] и существенно зависят от режима полета (скорость, высота). В правых частях системы (23.4) стоят: приведенная управляющая сила $\bar{Q}$ (отнесена к величине массы) и приведенный управляющий момент (отнесен к величине момента инерции), причем величины массы и момента инерции включают как ракету, так и конструктивные элементы АКУ. $\bar{R}_z$ и $\bar{M}_z$ — возмущающие сила и момент, которые далее не учитываются.

Положим

$$\bar{Q} = k_1 u; \quad \bar{M} = k_2 u. \quad (23.5)$$

Здесь u — управляющий сигнал; коэффициенты $k_{1,2}$ от режима полета не зависят.

Соотношения (23.5) соответствуют безынерционному приводу. Анализ показывает, что силовые приводы, используемые в АКУ должны обладать высоким быстродействием. Их постоянные времени должны быть примерно на порядок меньше, чем время движения ракеты на АКУ, которое составляет $\sim 0,05 + 0,1$ с. Уравнение динамики силового привода с позиционной (жесткой) обратной связью представим в виде

$$T \ddot{u} + u = u^* . \quad (23.6)$$

Далее вместо (23.4) и (23.5) будем рассматривать уравнение

$$\ddot{\omega}_z + a_1 \dot{\omega}_z + a_0 \omega_z = b_1 \dot{u} + b_0 u , \quad (23.7)$$

коэффициенты которого равны

$$a_0 = \omega_\alpha^2 + 2h \frac{1}{T_v^\alpha}; \quad a_1 = 2h \frac{1}{T_v^\alpha};$$

$$b_0 = - \left(k_1 + k_2 \omega_\alpha^2 \right); \quad b_1 = - k_2 .$$

Обычно при синтезе алгоритмов принимают $T = 0$ и рассматривают идеальный (безынерционный) привод. В этом случае $u = u^*$.

Задачу сформулируем следующим образом. В начальный момент времени $t = 0$ состояние управляемого процесса характеризуется значениями $\omega_z(0)$ и $\dot{\omega}_z(0)$. Требуется синтезировать такой алгоритм реализации управляющего сигнала, при котором устанавливается вращательное движение ракеты на АКУ с угловой скоростью $\omega_z(\infty) = \omega_z^0 = \text{const}$. Необходимо при этом, чтобы переходный процесс $\omega_z(t) \rightarrow \omega_z^0$ с заданной степенью приближения следовал за процессом $\omega_z^*(t) \rightarrow \omega_z^0$, определяемым дифференциальным уравнением

$$\ddot{\omega}_z^* + r_1 \dot{\omega}_z^* + r_0 \omega_z^* = r_0 \omega_z^0; \quad \omega_z^*(0) = \omega_z(0); \quad \dot{\omega}_z^*(0) = \dot{\omega}_z(0). \quad (23.8)$$

Числовые значения параметров модели $r_0, r_1 = \text{const} > 0$ назовем такими, чтобы динамика эталонной модели (23.8) соответствовала динамике проектируемой системы. Степень прибли-

жения процессов $\omega_z(t) \rightarrow \omega_z^*(t)$ будем характеризовать функционалом

$$Q(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} \left[\ddot{\omega}_z^*(t) - \ddot{\omega}_z(t, u, \dot{u}) \right]^2, \quad (23.9)$$

величина которого представляет собой мгновенное значение нормированной по моменту инерции энергии второй производной (ускорения) управляемой переменной.

Абсолютный минимум функционала (23.9) на движениях системы (23.7) реализуется в том случае, когда

$$\ddot{\omega}_z(t, u, \dot{u}) = \ddot{\omega}_z^*(t) \geq 0.$$

Из этого уравнения и уравнений (23.7) и (23.8) следует компенсационный алгоритм

$$b_1 \dot{u} + b_0 u = \ddot{\omega}_z^* - a_0 \omega_z - a_1 \dot{\omega}_z;$$

$$\ddot{\omega}_z^* = r_0 \left(\omega_z^0 - \omega_z \right) - r_1 \dot{\omega}_z.$$

Для аппаратной реализации этого алгоритма необходимо иметь достоверную информацию о параметрах модели управляемого процесса, что практически не всегда возможно. В силу этого компенсационный алгоритм находит ограниченное применение. Кроме того системы с таким алгоритмом оказываются весьма чувствительными к изменению параметров. Это является следствием того, что он основан на реализации (теоретически) абсолютного минимума функционала (23.9). Поэтому следует преднамеренно отказаться от условия достижения абсолютного минимума функционала $Q(u, \dot{u}) = 0$ и придать системе свойства *грубости*. Для этого организуем движение к минимуму функционала согласно уравнению

$$\frac{d\dot{u}(t)}{dt} = -\lambda \frac{\partial Q(u, \dot{u})}{\partial \dot{u}}; \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad (23.10)$$

которое соответствует градиентной схеме поиска экстремума. Составляющая градиента по $\dot{u}$ равна

$$\frac{\partial Q(u, \dot{u})}{\partial \dot{u}} = b_1 \left(\ddot{\omega}_z^* - \ddot{\omega}_z \right). \quad (23.11)$$

С учетом (23.10) и (23.11) найдем соотношения дифференциального закона управления

$$\begin{aligned}\ddot{u} &= k_{\Pi} \left(\ddot{\omega}_z^* - \ddot{\omega}_z \right), \quad k_{\Pi} = b_1 \lambda; \\ \ddot{\omega}_z^* &= r_0 \left(\omega_z^0 - \omega_z \right) - r_1 \omega_z,\end{aligned}\tag{23.12}$$

дополненного уравнением для вычисления требуемого значения второй производной $\ddot{\omega}_z^*$. Это уравнение следует из уравнения (23.8) после замены в нем $\omega_z^* = \omega_z$, $\dot{\omega}_z^* = \dot{\omega}_z$, что соответствует требованию осуществления движения по назначенной фазовой траектории.

Структурная схема замкнутой системы приведена на рис. 23.3, а. Модель движения ракеты по углу тангажа представлена передаточной функцией $W_0(S)$, которая соответствует уравнению (23.7). Рассматриваемая структура непосредственно отражает структуру дифференциального закона управления (23.12), поэтому в ней содержится контур ускорения, т.е. второй производной управляемой переменной ω_z . Задающим сигналом этого контура является требуемое значение ускорения $\ddot{\omega}_z^*$, которое формируется эталонной моделью.

Требуемое значение величины управляющего сигнала $u(t)$ получается в результате двукратного интегрирования сигнала $k_{\Pi} \left(\ddot{\omega}_z^* - \ddot{\omega}_z \right)$. Для аппаратной реализации алгоритм (23.12) не пригоден, так как это связано с необходимостью измерять переменные $\dot{\omega}_z$, $\ddot{\omega}_z$. Однако уравнения алгоритма можно преобразовать к такой форме, чтобы для вычисления управляющего сигнала было достаточно информации только об угловой скорости ω_z . Действительно, уравнения (23.12) допускают непосредственное понижение порядка. Выполнив двукратное интегрирование левых частей при нулевых начальных значениях переменных, получим искомые уравнения алгоритма

$$\begin{aligned}u &= k_{\Pi} \left(\ddot{\omega}_z^* - \ddot{\omega}_z \right); \\ \omega_z^* &= \int_0^t \left(r_0 \varphi_z - r_1 \omega_z \right) dt; \quad \varphi_z(t) = \int_0^t \left(\omega_z^0 - \omega_z \right) dt.\end{aligned}\tag{23.13}$$

$$u(t) = k_{\Pi} \left[\frac{r_0}{S^2} \omega_z^0 - \left(\frac{r_0}{S^2} + \frac{r_1}{S} + 1 \right) \omega_z(t) \right].$$

Подставив это выражение в первое уравнение (23.14) найдем после необходимых преобразований

$$\left[S^2 A(S) + k_{\Pi} B(S) R(S) \right] \omega_z(t) = k_{\Pi} r_0 B(S) \omega_z^0; \quad (23.15)$$

$$R(S) = S^2 + r_1 S + r_0.$$

Итак, процессы в замкнутой системе описываются дифференциальными уравнениями четвертого порядка. Вместе с тем эталонная модель имеет порядок равный двум. В связи с этим возникает вопрос: при каком условии управляемый процесс $\omega_z \rightarrow \omega_z^0$ может быть с высокой степенью точности приближен к эталонному процессу $\omega_z^* \rightarrow \omega_z^0$. В силу свойств систем, управляемых по ускорению [33], необходимая степень приближения $\omega_z(t) \rightarrow \omega_z^*(t)$ достигается путем увеличения коэффициента усиления k_{Π} контура второй производной $\ddot{\omega}_z$. Доказано [32], что при $k_{\Pi} \rightarrow \infty$ уравнение (23.15) переходит в уравнение (23.8) эталонной модели и, следовательно, в асимптотике выполняется равенство $\omega_z(t) = \omega_z^*(t)$.

Рассмотрим структурную схему, которая изображена на рис. 23.3, в. Можно убедиться, что эта структура соответствует уравнению (23.15) замкнутой системы. Для решения вопроса об устойчивости системы необходимо исследовать свойства частотной характеристики разомкнутой цепи с передаточной функцией

$$W(S) = k_{\Pi} \frac{B(S) R(S)}{S^2 A(S)} = \frac{v(S)}{z(S)}. \quad (23.16)$$

Доказано [32], что замкнутая система не теряет устойчивости при неограниченном увеличении коэффициента k_{Π} .

Установим теперь асимптотическую структуру модели контура. С этой целью рассмотрим характеристическое уравнение, соответствующее (23.15):

$$S^2 A(S) + k_{\Pi} B(S) R(S) = 0. \quad (23.17)$$

Установлено следующее [32]: в асимптотике при $k_{\Pi} \rightarrow \infty$ два полюса $S_{1,2}$ передаточной функции замкнутой системы приближаются к соответствующим полюсам $S_{1,2}^*$ передаточной функции эталонной модели. Третий полюс асимптотически приближается к нулю передаточной функции управляемого объекта, т.е. $S_3 \rightarrow (-b_0 b^{-1})$. Наконец, четвертый полюс удаляется на бесконечность в область отрицательных значений: $S_4 \rightarrow (-\infty)$. Следовательно при неограниченном увеличении усиления в контуре $\ddot{\omega}_z$ уравнение замкнутой системы четвертого порядка вырождается в уравнение второго порядка

$$\ddot{\omega}_z + r_1 \dot{\omega}_z + r_0 \omega_z = r_0 \omega_z^0,$$

которое в точности совпадает с уравнением эталонной модели.

Это означает, что теоретически при $k_{\Pi} \rightarrow \infty$ реализуется равенство $\omega_z(t) = \omega_z^*(t)$, $t \geq 0$, т.е. динамические характеристики проектируемой системы и модели идентичны. Это свойство системы сохраняется и при изменении параметров управляемого объекта. Таким образом, синтезированный алгоритм придает системе естественные свойства адаптивности: ее динамические характеристики нечувствительны к изменению динамических характеристик объекта. Можно показать, что это обеспечивается и при ограниченных значениях коэффициента k_{Π} . Если ω^* — частота среза амплитудной характеристики эталонной системы в разомкнутом состоянии, то требуемое значение коэффициента k_{Π} может быть принято равным

$$k_{\Pi} = 5 \omega_* / b_0. \quad (23.18)$$

Адаптивные свойства алгоритмов предлагаемой структуры проиллюстрируем на примере, заимствованном из [32]. Пример соответствует синтезу алгоритмов для легкого сверхзвукового самолета в двух режимах (табл. 23.1).

Таблица 23.1

Режим	Высота	Скорость, М	Параметры			
			a_0	a_1	b_0	b_1
1	200	0,3	5,64	0,91	0,49	2,72
2	18000	1,7	2,04	0,21	0,043	1,35

Как видим, эффективность руля самолета (b_0) в этих режимах отличается более чем в 11 раз. В такой ситуации автоматы демпфирования самолета с алгоритмами традиционной структуры не могут обеспечить необходимые характеристики управления без подстройки параметров.

Приведем теперь результаты исследования динамики контура демпфирования, построенного на основе синтезированного алгоритма. Параметры эталонной модели приняты равными: $r_0 = 1,56$, $r_1 = 1,25$. Для уравнения в стандартной форме

$$\ddot{\omega}_z^* + 2\xi \frac{1}{\tau_y} \dot{\omega}_z^* + 2\xi \frac{1}{\tau_y^2} \omega_z^* = \frac{1}{\tau_y^2} \omega_z^0; \quad r_1 = 2\xi \tau_y^{-1}; \quad r_0 = \tau_y^{-2}.$$

Указанные значения соответствуют постоянной времени $\tau_y = 0,8$ с и коэффициенту демпфирования $\xi = 0,5$.

Величину коэффициента усиления k_{Π} рассчитываем по (23.18). Для принятых числовых значений параметров эталонной модели частоты среза $\omega_z^* = 0,98 \text{ с}^{-1}$. Поэтому из (23.18) для первого режима находим $k_{\Pi} = 5 \omega^* / b_0 = 10$.

Изменение спектра модели контура демпфирования характеризуется данными, приведенными в табл. 23.2.

Как видим, при увеличении коэффициента усиления k_{Π} корни $S_{1,2}$ характеристического уравнения замкнутого контура приближаются к корням $S_{1,2}^* = -0,6250 \pm 10,814j$ характеристического уравнения эталонной модели; корень S_3 приближается к величине $b_0 b^{-1} = -0,1835$, т.е. к нулю передаточной функции объекта; корень

S_4 стремится к $k \rightarrow \infty$. При $k_{\pi}=10$ величина $S_4=-26,5$. Поэтому длительность составляющей переходного процесса равна 0,11 с, что почти на порядок меньше постоянной времени эталонной модели $\tau_y = 0,8$ с. Рассмотренный пример можно использовать для оценки влияния инерционности рулевой машины.

Таблица 23.2

k_{π}	$S_{1,2}$	S_3	S_4
1	$-0,2987 \pm 10,1133j$	-0,0114	$-1,5164 \pm 2,3085j$
5	$-0,8194 \pm 10,9512j$	-0,1949	-12,6764
10	$-0,7135 \pm 11,0235j$	-0,1888	-26,4942
20	$-0,6675 \pm 11,0537j$	-0,1861	-53,7888
50	$-0,6417 \pm 11,0706j$	-0,1845	-135,4222

С учетом (23.6) получим вместо (23.17) следующее выражение для характеристического уравнения замкнутой системы

$$p^2 A(S)(TS+1) + k_{\pi} B(S)R(S), \quad (23.19)$$

которое отличается от (23.17) наличием двучлена $(TS+1)$ в первом слагаемом.

Отсюда можно получить [32] следующее неравенство

$$T < 1 / \left[(r_1 - a_1) + \frac{b_0}{b_1} \right]. \quad (23.20)$$

В тех случаях, когда постоянная времени T мала (неравенство (23.20) не нарушается), можно использовать алгоритмы, соответствующие случаю $T = 0$. При больших значениях T неравенство может нарушаться, поэтому в таких случаях синтез алгоритмов необходимо выполнять по моделям, учитывающим динамику привода. Отметим, что, как следует из (23.20), критичным является режим, соответствующий наименьшему значению коэффициента a_1 .

Рассмотрим теперь особенности методики синтеза алгоритмов с учетом инерционного запаздывания в приводе. Описание управляемого движения системы примем в виде

$$\ddot{\omega}_z + A_2 \ddot{\omega}_z + A_1 \dot{\omega}_z + A_0 \omega_z = B_1 \dot{u}^* + B_0 u^*, \quad (23.21)$$

коэффициенты которого равны

$$A_0 = 6a_0; \quad A_1 = (a_1 + a_0 T); \quad A_2 = (1 + a_1 T)T^{-1}; \quad (23.22)$$

$$B_0 = b_0 T^{-1}; \quad B_1 = b_1 T^{-1}.$$

Уравнение (23.21) получено из (23.7) и (23.6) путем исключения переменной u , характеризующей фактическое значение управляющего сигнала.

Задачу формулируем, как и в предыдущем случае. Эталонный процесс определяется уравнением третьего порядка

$$\ddot{\omega}_z^* + R_2 \ddot{\omega}_z^* + R_1 \dot{\omega}_z^* + R_0 \omega_z^* = R_0 \omega_z^0; \quad (23.22)$$

$$\frac{d^n \omega_z^*(t)}{dt^n} = \omega_z^n(0); \quad n = 0, 1, 2.$$

Числовые значения коэффициентов R_n , $n = 0, 1, 2$ положительны, удовлетворяют условию асимптотической устойчивости $R_1 R_2 > R_0$ и такие, что процесс $\omega_z^* \rightarrow \omega_z^0$ соответствует требованиям к динамическим характеристикам проектируемой системы. Функционал возьмем в виде

$$Q(u^*, \dot{u}^*) = \frac{1}{2} \left[\ddot{\omega}_z^*(t) - \ddot{\omega}_z(t) \right]^2. \quad (23.24)$$

В соответствии с (23.24) он характеризует энергию третьей производной управляемой переменной ω_z .

Аналогично (23.10) — (23.12) по схеме градиентного метода поиска экстремума получим:

$$\frac{d \dot{u}^*(t)}{dt} = k_{\pi} \left(\ddot{\omega}_z^* - \ddot{\omega}_z \right), \quad \bar{k}_{\pi} = \text{const} > 0. \quad (23.25)$$

Требуемое значение величин $\ddot{\omega}^*$ вычисляется по соотношению

$$\ddot{\omega}_z^* = R_0 (\omega_z^0 - \omega_z) - R_1 \dot{\omega}_z - R_2 \ddot{\omega}_z, \quad (23.26)$$

которое следует из уравнения (23.23) эталонной модели. Величина $\ddot{\omega}_z^*$ должна вычисляться с учетом состояния управляемого процесса. Поэтому в (23.23) переменная ω_z^* и ее производные первого и второго порядка заменены соответственно переменной ω_z и ее производными. Уравнениям (23.25) и (23.26) соответствует структурная схема, аналогичная рис. 23.3,б. В ее структуре содержится контур третьей производной $\ddot{\omega}_z$. Задающим сигналом является $\ddot{\omega}_z^*$.

Для аппаратной реализации алгоритма его уравнения необходимо преобразовать к иной форме. Дважды интегрируя по времени обе части уравнений (23.25) и (23.26) при нулевых значениях переменных получим

$$u^* = \bar{k}_\Pi \left(\dot{\omega}_z^* - \dot{\omega}_z \right) \\ \dot{\omega}_z^*(t) = \int_0^t [R_0 \varphi - R_1 \omega_z] dt - R_2 \omega_z; \quad \varphi_0(t) = \int_0^t (\omega_z^0 - \omega_z) dt. \quad (23.27)$$

Структурная схема замкнутого контура с алгоритмами (23.27) изображена на рис. 23.3, г. Динамика управляемого объекта здесь представлена передаточной функцией, которая соответствует уравнению (23.21):

$$W_0(S) = \frac{B(S)}{A(S)} = \frac{\omega_z(S)}{u^*(S)}, \quad (23.28)$$

где

$$B(S) = B_1 S + B_0, \quad A(S) = S^3 + A_2 S^2 + A_1 S + A_0,$$

Уравнение замкнутой системы представим в виде

$$\left[S^2 A(S) + \bar{k}_\Pi B(S) R(S) \right] \omega_z(t) = \bar{k}_\Pi R_0 B(S) \omega_z^0. \quad (23.29)$$

Отсюда следует, что в асимптоте ($\bar{k}_n \rightarrow \infty$) три полюса $S_{1,2,3}^*$ стремятся к трем полюсам $S_{1,2,3}^*$ передаточной функции эталонной модели:

$$k^*(S) = \frac{R_0}{S^3 + R_2 S^2 + R_1 S + R_0} = \frac{\omega_z^*(S)}{\omega^0(S)}. \quad (23.30)$$

Четвертый полюс асимптотически стремится к нулю передаточной функции объекта, т.е. $S_4 \rightarrow (-b_0 b_1^{-1})$, пятый полюс удаляется на бесконечность в область отрицательных значений: $S_5 \rightarrow (-\infty)$. Алгоритм (23.27), синтезированный по модели, учитывающей инерционность привода, придает системе свойство слабой параметрической чувствительности.

В заключение рассмотрим более подробно свойства эталонной модели (23.8) для нашего случая. Возьмем уравнение в стандартной форме:

$$\ddot{\omega}_z^* + 2\xi \frac{1}{\tau_y} \dot{\omega}_z^* + \frac{1}{\tau_y^2} \omega_z^* = \frac{1}{\tau_y^2} \omega_z^0; \quad r_1 = 2\xi \tau_y^{-1}; \quad r_0 = \tau_y^{-2}.$$

Используем понятие среднегеометрического корня $\Omega_0 = 1/\tau_y$, который может служить мерой быстродействия протекания переходных процессов. Если в уравнении эталонной модели увеличить Ω_0 , например в 10 раз, то на основании теоремы подобия переходный процесс, оставаясь подобным сам себе, будет протекать в 10 раз быстрее. Верхнюю границу времени переходного процесса определим по зависимости

$$t_{\text{пп}} \leq \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\Delta} \approx \frac{3}{\eta}.$$

Здесь $\eta = 1/2r_1$ — расстояние пары комплексных корней от мнимой оси, $\Delta = 0,05$.

Поскольку, как указывалось выше, среднее значение времени движения ракеты на АКУ составляет 0,075 с, найдем параметры модели проектируемой системы: $\xi = 0,5$; $r_1 = \Omega_0 = 80 \text{ с}^{-1}$; $r_0 = 6400 \text{ с}^{-2}$.

Подведем итоги проведенного исследования.

1. Показана принципиальная возможность использования методов синтеза адаптивных алгоритмов на основе обратных задач динамики для задачи проектирования адаптивных АКУ, работающих по замкнутому циклу.

2. Синтезируемые таким образом алгоритмы обладают свойством естественной адаптивности: они обеспечивают высокую стабильность характеристик системы при изменении параметров управляемого объекта.

3. Синтезированы алгоритмы адаптивного АКУ и определены параметры эталонной модели для случая безынерционного привода.

§ 23.3. ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ И ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ АКУ С АДАПТИВНЫМИ СХЕМАМИ УПРАВЛЕНИЯ ПО РАЗОМКНУТОМУ И ЗАМКНУТОМУ ЦИКЛАМ

В § 23.1 было показано, что для современных самолетов АКУ с фиксированной настройкой параметров (однопозиционное АКУ) не может в полной мере удовлетворить основным требованиям по локализации параметров отделения в их ОДЗ, что можно трактовать, как «кризис» этой схемы.

В настоящее время имеются два (вообще говоря различных) направления преодоления этого «кризиса» и оба они приводят к адаптивным схемам АКУ.

Первое направление связано с созданием адаптивных АКУ, работающих по разомкнутому циклу. Это означает, что управление параметрами отделения осуществляется лишь на основе априорной информации, имеющейся на борту носителя. Сюда относятся режимы полета (высота, скорость и перегрузка самолета), которые в существенной мере влияют на параметры отделения. Вместе с тем, такая информация на самолете имеется и может быть использована для определения номинала толкающей силы. В этом случае мы приходим к двух, трех и многопозиционной конструкциям АКУ. Оценки показывают, что увеличение числа реализуемых номиналов толкающей силы, хотя и приводит к усложнению конструкции АКУ, является эффективным средством уменьшения размеров ОДЗ, т.е. стабилизации параметров отделения.

Второе направление связано с созданием адаптивных АКУ, работающих по замкнутому циклу. Это означает, что управление параметрами отделения осуществляется на основе *текущей* информации о параметрах движения АКУ с ракетой.

Как показывает анализ (см. § 23.2), для реализации алгоритма замкнутой системы необходимо иметь информацию об ускорении $\dot{\omega}_z$. Для измерения угловых движений как на самолете, так и на ракете имеются демпфирующие гироскопы, которые в принципе могут быть использованы для получения этой информации. Если по каким-либо причинам это является нежелательным или недостижимым, то информация об угловых ускорениях может быть получена по уравнению модели управляемого движения.

Оценивая сегодня перспективы выбора основного направления развития адаптивных АКУ, можно сделать вывод о том, что в ближайшей перспективе развитие адаптивных АКУ пойдет по первому направлению — создание АКУ, работающих по разомкнутому циклу; в более отдаленной перспективе — по второму направлению — создание АКУ, работающих по замкнутому циклу. Преимущества конструкций, работающих по замкнутому циклу очевидны. Однако на пути их создания и отработки имеются известные трудности. В связи с этим, представляется важным дальнейшее развитие рассматриваемого подхода к синтезу алгоритмов адаптивных АКУ, работающих по замкнутому циклу.

ЛИТЕРАТУРА КО ВТОРОМУ РАЗДЕЛУ

1. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин. — М.: Наука, 1988.
2. *Ассур Л.В.* Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. — М.: Изд-во АН СССР, 1952.
3. *Баранов Г.Г.* Курс теории механизмов и машин. — М.: Машиностроение, 1975.
4. *Левитский Н.И.* Теория механизмов и машин. — М.: Наука, 1979.
5. Теория механизмов и машин / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.; Под ред. К.В. Фролова. — М.: Высшая школа, 1987.
6. Механика машин / И.И. Вульфсон, М.З. Коловский, Э.Е. Пейсах и др.; Под ред. Г.А. Смирнова. — М.: Высшая школа, 1996.
7. Техническая механика установок летательных аппаратов / В.А. Нестеров, В.В. Волгин, Э.Е. Пейсах и др.; Под ред В.А. Нестерова. — М.: Изд-во МАИ, 1994.
8. *Пейсах Э.Е., Нестеров В.А.* Система проектирования плоских рычажных механизмов / Под ред. К.В. Фролова. — М.: Машиностроение, 1988.
9. Машиностроение. Энциклопедия. Том 1 — 3. В двух кн. Кн. 2. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. / Под ред. К.С. Колесникова. — М.: Машиностроение, 1995.
10. *Peisach E.E., Kikin A.B.* Computer system ARCHIMED for analysis and synthesis of linkages and manipulators // Proceedings of Ninth World Congress of the Theory of Machines and Mechanisms. Vol. 2, Milano, Italy, 1995, pp. 790 — 793.
11. *Пейсах Э.Е.* Метод идентификации структурных схем рычажных механизмов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995, № 5.

12. Вульфсон И.И. Динамические расчеты цикловых механизмов. — М.: Машиностроение, 1976.

13. Кинематика, динамика и точность механизмов. Справочник / Под ред. Г.В. Крейнина. — М.: Машиностроение, 1984.

14. Кобринский А.Е. Механизмы с упругими связями. — М.: Наука, 1964.

15. Кожевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями. — Киев: Наука, 1961.

16. Кожевников С.Н. Основания структурного синтеза механизмов. — Киев: Наук. Думка, 1979.

17. Колотков Н.И., Ватолин В.В. Основы конструкции и проектирования установок БРВ. — М.: Машиностроение, 1979.

18. Корячко В.П., Курейчик В.М., Норенков И.П. Теоретические основы САПР. — М.: Энергоатомиздат, 1987.

19. Крайнев А.Ф. Словарь — справочник по механизмам. — М.: Машиностроение, 1987.

20. Кучинский В.В. Решение задач динамики конструкций установок, приводящимся к упругим стержням ступенчатого сечения с присоединенными массами и дискретными упругими связями: Учеб. пособие. — М.: МАИ, 1980.

21. Кучинский В.В. Динамика конструкций установок, приводящихся к механическим системам с многими степенями свободы: Учебное пособие. — М.: МАИ, 1982.

22. Малышев В.В., Дишель В.Д., Федоров А.В. Автоматизация решения задач оптимального управления ЛА. — М.: МАИ, 1985.

23. Мишин В.П., Осин М.И. Введение в машинное проектирование летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1978.

24. Нестеров В.А. Исследование области состояний динамической системы 2-го порядка при воздействии систематических и случайных возмущений. Статья деп. в ВИНТИ АН СССР, § 5538 — В88, 1988.

25. Нестеров В.А., Белоусов А.М. Методология динамических исследований упругих механических систем. Статья деп. в ВИНТИ АН СССР, § 4581 — В90, 1990.

26. Nesterov V.A. Zur dynamischen Synthese eines elastischen Koppelgetriebes mit Gasantrieb. Die 4 Tagung Fest Korpermechanik DYNAMIK und GETRIEBETECHNIK, Dresden, 5. bis 7. Februar 1991, I.29, S. 19 — 20.

27. *Nesterov V.A.* Optimisational dynamic synthesis of Operating Laws and Parameters of aviation robototechnical systems Gas-driver. Proceedings of the 1993 MAI/BUAA International Symposium on automatic Control, Volume I, Part 2, 1993, Moscow, Yaropolets, P. 128 — 133.

28. *Нестеров В.А.* Метод динамического синтеза механизмов установок ЛА с учетом действия детерминистских сил и случайных возмущений ("Метод разрешенных зон")// Материалы Всероссийской конференции «Проблемы совершенствования робототехнических и интеллектуальных систем». — М.: Изд-во МАИ, 1996.

29. *Светлицкий В.А.* Динамика старта летательных аппаратов. — М.: Наука, 1986.

30. *Сиринг.* Направления в конструировании роботов // Конструирование и технология машиностроения. 1983. № 1.

31. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Умвер У.* Колебания в инженерном деле. — М.: Машиностроение, 1985.

32. *Хубка В.* Теория технических систем. — М.: Мир, 1987.

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ. ВИБРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАКЕТ КЛАССА «ВОЗДУХ—ВОЗДУХ»

Глава 24. ВНЕШНИЕ НАГРУЗКИ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА РАКЕТУ КЛАССА «ВОЗДУХ—ВОЗДУХ» НА ТИПОВЫХ ЭТАПАХ ЭКСПЛУАТАЦИИ

§ 24.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НАГРУЗОК ДЛЯ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ С НОСИТЕЛЕМ

Нагрузки на этапе взлета — посадки существенно зависят от типа аэродрома. Величины измеренных неровностей различных грунтовых аэродромов систематизированы в работе [12]. Анализ измеренных неровностей позволяет рассматривать профиль взлетно-посадочных полос (ВПП) как стационарную случайную функцию, обладающую свойством эргодичности. При этом корреляционную функцию $K(\tau)$ высот неровностей ВПП можно записать в виде:

$$K(\tau) = \mu^2 e^{-\alpha |\tau|} \cos \beta \tau, \quad (24.1)$$

которой, согласно определению, соответствует следующая спектральная плотность:

$$S(\omega) = \frac{\alpha \mu^2}{\pi} \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}. \quad (24.2)$$

Однако удобнее пользоваться простой аппроксимацией соотношения (24.2):

$$S(\omega) = \frac{c}{\omega^m}. \quad (24.3)$$

В формулах (24.1), (24.2) через μ обозначена среднеквадратическая высота неровностей, определяемая соотношением:

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} h_i^2}{n-1}}, \quad (24.4)$$

где n — количество точек, в которых производилась нивелировка; h_i — разность показаний нивелиров в двух соседних точках; τ — интервал корреляционной функции, м; $\omega = 2\pi/l$ — пространственная частота, рад/м; l — длина волны, м.

Параметр α определяется равенством:

$$\alpha = \frac{7,24}{l_{\text{пр}}^{1,4} \mu}, \quad 1/\text{м},$$

где

$$l_{\text{пр}} = \frac{n_5 + n_{10} \cdot 10 + n_{20} \cdot 20}{n_5 + n_{10} + n_{20}};$$

$n_{5,10,20} = n_{5,10,20}^{\text{СН}} + 1,5 n_{5,10,20}^{\text{МА}} + 2,25 n_{5,10,20}^{1,5\text{МА}}$ — количество неровностей на профиле ВПП с полудлиной 5, 10 и 20 м соответственно. Индексы СН, МА и 1,5 МА соответствуют уровню высот неровностей данной полудлины по строительным, эксплуатационным допускам и в полтора раза превышают эксплуатационные допуски; $\beta = \pi / 2 \tau_0$; $\tau_0 = 11 - 20$ м.

При $\omega = 0,3 - 3,14$ рад/м принимается, что $c = c_1 \approx 4,4\mu - 21 \geq 1 \text{ см}^2$; $m = m_1 = 1,3$. Если $\omega = 0,08 - 0,3$ рад/м, принимают $c = c_2 = 0,05c_1$, $m = m_2 = 3,8$.

Аппроксимация (24.3) справедлива для местных неровностей с длиной волны не более $l_{\text{max}} = 20$ м и не менее $l_{\text{min}} = 2$ м. По данным съемки местного рельефа величины среднеквадратической неровности грунтовых ВПП составляют по строительным нормам $\mu = 5,5$ см; по эксплуатационным нормативам $\mu \leq 6,5$ см; максимально измеренные $\mu = 10$ см.

Спектральная плотность $S_{\Sigma}(\omega)$ суммарных (эффективных) неровностей поверхности при качении колес самолета, представ-

ляющих собой сочетание неровностей поверхности и неоднородности деформаций грунта, определяется по формуле:

$$S_{\Sigma}(\omega) = S(\omega) + S_H(\omega) = \frac{c}{\omega^m} + \frac{c_H}{\omega^{m_0}},$$

где $c_H = 0,11 H_{cp}^2 \sigma_{cp} v_{\sigma}^2$; H_{cp} — средняя глубина колеи от колес самолета; σ_{cp} — средняя прочность грунта; v_{σ} — коэффициент вариации прочности грунта.

При расчетах можно принимать:

$$\sigma_{cp} = 5 \text{ кг/см}^2; \quad v_{\sigma} = 0,3; \quad H_{cp} = 5 \text{ см}; \quad m_{\sigma} = 2 - 0,08 \sigma_{cp}.$$

Неровности бетонированных ВПП характеризуются величиной уступа δ , носящей случайный характер, и расстоянием между соседними уступами d , определяемым длиной бетонных плит (рис. 24.1). Следовательно,

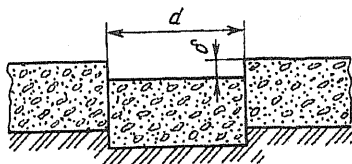


Рис. 24.1

самолет при движении по бетонированной ВПП подвергается действию периодического возмущения, имеющего случайную амплитуду. Однако для задач прогнозирования необходимо знать средние значения нагрузки, при оценке которых можно пользоваться спектральными характеристиками

неровностей. Графики спектральных плотностей неровностей $S_H(\omega)$ бетонированных ВПП по данным работы [12] приведены на рис. 24.2. Крайние значения $S_H(\omega)$ для наилучшего и наихудшего аэродромов укладываются в границы $S(\omega) = \pm 2 S_{\Sigma}$. Поскольку описание динамики подвижных частей шасси самолета-носителя возможно лишь при помощи нелинейных дифференциальных уравнений, применение вышеуказанных спектральных плотностей неровностей ВПП непосредственно для нахождения статистических характеристик вибраций путем использования теоремы Винера-Хинчина не представляется возможным.

Желая избежать при этом линеаризации исходных уравнений движения шасси самолета, которые будут использоваться

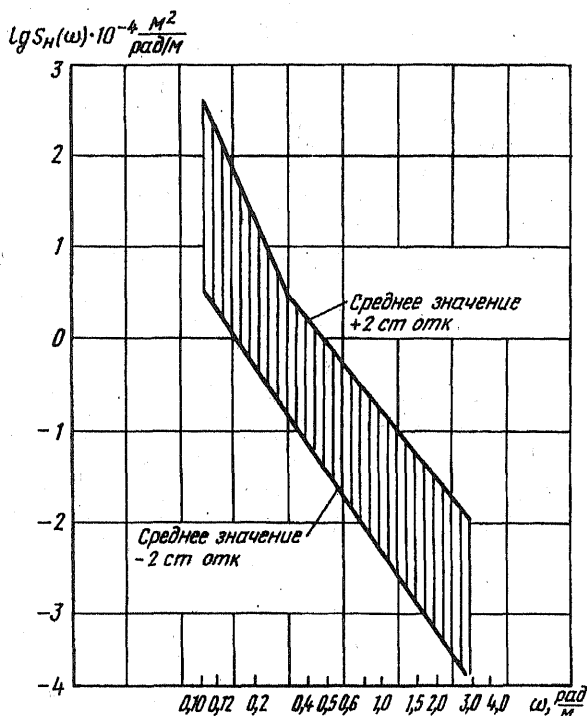


Рис. 24.2

в главе 25, применяется способ задания профиля ВПП в виде некоторой реализации случайной функции $X(x)$ такой, что ее спектральная плотность $S(\omega)$ будет иметь вид соответствующий, например, выражению (24.3) или любой другой заданной функции.

Использование для решения этой проблемы, относящейся к задаче синтеза случайного процесса, канонического представления случайной функции $X(x)$ содержится в работе [9]. Основным недостатком подходов, основанных на каноническом представлении, является их сложность, обусловленная необходимостью задания бесконечного (или, по крайней мере, очень большого) числа параметров системы и ее редуцированием. Вместе с тем построение реализации случайного процесса с заданной спектральной плотностью удобно проводить с использованием неканонического представления случайной функции, основанного на следующей теореме [15]:

Случайная функция $X(t)$ представляется абсолютно точно в пределах корреляционной теории в форме:

$$X(t) = M_x(t) + \lambda_1 \sin \omega t + \lambda_2 \cos \omega t, \quad (24.5)$$

если выполнены следующие условия:

1. Случайная функция $X(t) - M(t)$ стационарна.
2. $M[X(t)] = M_x(t)$, $K_x(t) = \sigma_x^2 r_x(\tau)$ где $M_x(t)$ и $r_x(\tau)$ — известные функции.
3. Случайные величины λ_1 , λ_2 и ω независимы:

$$M[\lambda_1] = M[\lambda_2] = 0; \quad M[\lambda_1^2] = M[\lambda_2^2] = \sigma_x^2. \quad (24.6)$$

4. Законы распределения вероятностей случайных величин λ_1 и λ_2 произвольны, а плотность распределения случайной величины ω определяется по формуле

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (24.7)$$

На основании указанной теоремы и имеющихся в распоряжении инженера статистических характеристик неровностей ВПП можно осуществить построение реализации случайной функции, описывающей зависимость высоты неровностей ВПП от горизонтальной координаты x .

Случайные величины λ_1 и λ_2 получаются на ЭЦВМ при помощи процедуры-датчика случайных чисел с равномерным распределением таким образом, что соблюдается равенство (24.6), в котором под σ_x следует понимать среднеквадратическую высоту неровностей.

Поскольку процедура-функция $ur(x)$ выдает случайные числа, равномерно распределенные на отрезке $[-1, 1]$ с дисперсией $1/3$, λ_1 и λ_2 могут быть получены следующим образом:

$$\lambda_{1,2} = \mu \sqrt{3} \cdot ur(x). \quad (24.8)$$

Для выработки случайной величины ω требуется построить процедуру-датчик случайных чисел с плотностью распределения, задаваемой функцией $f(\omega)$. Из сравнения выражений

(24.7) и интегральной связи спектральной плотности и корреляционной функции процесса, следует, что

$$f(\omega) = \frac{S(\omega)}{2\pi\mu^2}. \quad (24.9)$$

Чтобы иметь возможность задавать различные значения спектральной плотности неровностей $S(\omega)$, строится процедура датчик случайных чисел с произвольным законом распределения. Построение этой процедуры осуществляется следующим образом.

Пусть задана плотность распределения случайной величины в виде некоторой функции $f(\omega)$ ($\omega_0 \leq \omega \leq \omega_1$). Разобьем область определения функции $f(\omega)$ на n малых равных отрезков величиной $\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_0}{n}$.

Область значений функций $f(\omega)$ также разобьем на малые участки величиной Δf , как показано на рис. 24.3.

При этом вся площадь, ограниченной кривой $f(\omega)$, прямыми $\omega = \omega_0$ и $\omega = \omega_1$ и осью абсцисс разбивается на некоторое количество полных и неполных прямоугольников. Пусть N_i — количество полных прямоугольников, образовавшихся в i -м столбце. Тогда общее количество прямоугольников будет

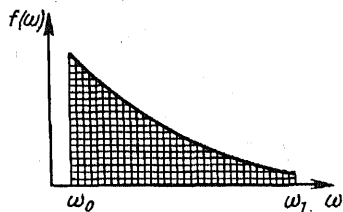


Рис. 24.3

$$M = \sum_{i=1}^n N_i. \quad (24.10)$$

С помощью датчика случайных чисел с равномерным распределением выбирается некоторое число α_k , которое с равной вероятностью лежит в интервале $[0,1]$. Вычисляя произведение $\alpha_k M$ и округляя до целого числа, получаем некоторый номер прямоугольника. Тем самым с равной вероятностью попадаем в некоторый прямоугольник и тогда вероят-

ность попадания на ту или другую частоту ω_k пропорциональна высоте столбца. Таким образом, имея большую последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ каждый раз попадаем в какой-то прямоугольник и тем самым обеспечиваем заданную плотность распределения (так как вероятность попадания в каждый столбец пропорциональна его высоте).

Поскольку в ЭЦВМ датчик случайных чисел $ur(x)$ дает последовательность случайных чисел, равномерно распределенных от -1 до $+1$, т.е. $-1 \leq ur(x) \leq 1$, в то время как нам требуется получить последовательность в интервале $[0, 1]$, можно записать $0 \leq \frac{ur(x) + 1}{2} \leq 1$, откуда следует $\alpha_k = 0,5[ur(x) + 1]$, и тогда $0 \leq \alpha_k \leq 1$. Для того, чтобы исключить из рассмотрения нулевое значение натурального ряда $\{A_k\}$ удобно умножить α_k на $M - 1$, прибавить единицу и округлить до целого числа, т.е.

$$A_k = \alpha_k (M - 1) + 1 \leq M.$$

Рассматривая $\{A_k\}$ как последовательность номеров прямоугольников, пересчитанных по столбцам, начиная с левого, получим соответствие каждому случайному числу A_k некоторого номера j столбца, которому в свою очередь соответствует некоторое значение ω (среднее по выбранному столбцу):

$$\omega_k = \omega_0 + \frac{(2j - 1) \Delta \omega}{2}. \quad (24.11)$$

Для того, чтобы получить последовательность, пересчитанную по столбцам, начиная с левого, запишем разницу $A_1 - N_1$ и сравним ее с нулем. Если $A_1 - N_1 < 0$, то сразу попадаем в левый (первый) столбец. Когда $A_1 - N_1 > 0$, записывается разность $A_1 - N_1 - N_2$ и опять сравнивается с нулем. Такая процедура осуществляется до тех пор, пока выбранное из последовательности $\{A_k\}$ число A_1 не будет соответствовать номеру прямоугольника, лежащего в левом столбце.

Для получения не фиксированного в пределах $\Delta \omega$ набора чисел также можно воспользоваться процедурой $ur(x)$, прибав-

ляя к найденному, согласно (24.11), значению ω_k некоторое случайное число $\Delta \omega_k$ из интервала $-\frac{\Delta \omega}{2} \leq \Delta \omega_k \leq \frac{\Delta \omega}{2}$:

$$\Delta \omega_k = \frac{\Delta \omega}{2} \text{ur}(x)$$

и далее, получая последовательность $\{\omega_k + \Delta \omega_k\}$ случайных чисел с плотностью распределения, стремящейся к заданной при $\Delta \omega \rightarrow 0$, $\Delta f \rightarrow 0$.

Для доказательства того, что плотность распределения полученных случайных чисел стремится к нулю, вспомним, что $\Delta \omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{m}$, где m — целое число, и обозначим через S суммарную площадь всех полных прямоугольников. Рассматривая разность

$$R = \int_{\omega_0}^{\omega_1} f(\omega) d\omega - S,$$

равную суммарной площади всех неполных прямоугольников, число которых также равно n , заметим, что

$$R < n \cdot \Delta f \Delta \omega = \frac{n \cdot \Delta f (\omega_1 - \omega_0)}{n} = \Delta f (\omega_1 - \omega_0) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta f \rightarrow 0.$$

Таким образом, доказано, что задавая малые значения $\Delta \omega$ и Δf , получим последовательность значений $\{\omega_k + \Delta \omega_k\}$ с законом распределения, мало отличающимся от заданного.

Итак, чтобы построить реализацию профиля ВПП, необходимо задать плотность распределения величины ω , связанную со спектральной плотностью неровностей соотношением (24.9), величину среднеквадратической неровности и шаг по абсциссе.

Если теперь в соответствии с формулой (24.5) на каждом шаге по абсциссе выбирать новые значения величины λ_1 , λ_2 и ω получим реализацию, содержащую кроме частот повторения неровностей, частоту Найквиста [8], определяемую шагом по абсциссе

$$\omega_N = \frac{1}{2 \Delta x} > \omega_1,$$

где Δx — шаг по длине взлетной полосы.

Чтобы полученная реализация не содержала этой частоты, построение реализации следует осуществлять следующим образом. Поскольку случайная функция $X(x)$ представляется в виде

$$X(x) = \lambda_1 \sin \omega x + \lambda_2 \cos \omega x,$$

то можно считать, что λ_1 , λ_2 и ω есть некоторые случайные функции от x , обладающие указанными выше свойствами. При этом случайная величина ω , представляющая собой частоту колебаний функции $X(x)$ относительно оси ординат, не может быть постоянной на всем интервале построения реализации, но должна быть постоянной хотя бы на одном периоде колебаний. Тогда, если при $x = x_0$ выбраны случайным образом частота $\omega = \omega(x_0)$ и соответственно $\lambda_1(x_0)$ и $\lambda_2(x_0)$, то следующая выборка случайной величины ω должна производиться через период частоты колебаний $\omega(x_0)$, т.е. при значении координаты

$$x_1 = x_0 + \frac{2\pi}{\omega(x_0)}.$$

Одновременно с новым значением $\omega(x_1)$ выбираются новые значения $\lambda_1(x_1)$ и $\lambda_2(x_1)$. Далее, поскольку реализация должна быть непрерывной функцией координаты x , параметры λ_1 , λ_2 и ω на отрезке $[x_0, x_1]$ определяются линейным интерполированием. Затем новая выборка случайных чисел λ_1 , λ_2 и ω осуществляется при значении координаты

$$x_2 = x_1 + \frac{2\pi}{\omega(x_1)} \quad \text{и т.д.}$$

Использование неканонического представления случайной функции для построения реализации профиля ВПП имеет ряд преимуществ перед общепринятыми подходами, основные из которых заключаются в сравнительной простоте и высокой точности метода, что достигается заменой бесконечных рядов, с

которыми приходится иметь дело при канонических представлениях, представлением случайной функции $X(t)$ в виде (24.5). Высокая точность метода обусловлена еще и тем, что вместо бесконечного (или достаточно большого) числа случайных параметров, в этом случае строятся лишь λ_1 , λ_2 и ω .

Предлагаемый подход позволяет решать достаточно широкий класс нелинейных задач статистической динамики при известной спектральной плотности входного процесса.

§ 24.2. НАГРУЗКИ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА РАКЕТУ ПРИ СТАРТЕ И В АУТОНОМНОМ ПОЛЕТЕ

Экспериментально установлено, что в условиях старта и автономного полета наибольшие по уровню виброускорения возникают в момент запуска ракетного двигателя, отсечки двигателя, разделения ступеней, переключивания рулей и других импульсных нагрузках. Обычно ракеты класса «воздух—воздух» — снабжены РДТТ, запуск которых осуществляется при помощи пиросредств, состоящих из пиропатрона и воспламенителя.

В результате срабатывания пиропатрона в конструкции ракеты возникают большие ускорения виброударного характера. Аналогичные реакции возникают при разрыве диафрагмы сопла.

Горение воспламенителя и пороховой пашки протекает в больших объемах с меньшими скоростями и не вызывает таких больших виброускорений, как импульсные нагрузки. Однако в некоторых случаях и эти ускорения могут явиться причиной механических повреждений или нарушения нормального функционирования бортовой аппаратуры и их надо уметь прогнозировать.

Основными параметрами пиропатрона как источника возникновения вибрации являются максимальное давление P_m или реактивная сила $q(t)$, время горения пиромассы t_k , суммарный импульс давления J_p или реактивной силы $J_{p.c.}$. Естественно, что они зависят от конструктивных особенностей различных типов пиропатронов.

Для определения максимального давления P_m в работе [6] приведена формула

$$P_m = \frac{RT_1 q}{W_0 - \alpha q} \quad \text{или} \quad P_m = \frac{f \cdot \Delta}{1 - \alpha \Delta}, \quad (24.12)$$

где R — газовая постоянная; T_1 — абсолютная температура газов, образующаяся при взрыве; q — вес заряда; W — объем камеры; α — удельный коволюм; f — сила пороха; $\Delta = \frac{q_0}{W_0}$ — плотность заряжения.

В формуле (24.12) величины R , T_1 , α и f являются характеристиками пороха, а q , W_0 и Δ характеризуют тип и конкретный образец пиропатрона.

Второй важной характеристикой пиропатрона является время горения пиромассы:

$$t_k = q / c, \quad (24.13)$$

где c — скорость горения, являющаяся функцией плотности заряжения Δ и температуры T :

$$c = f(\Delta, T). \quad (24.14)$$

Точное теоретическое исследование связей и зависимостей перечисленных параметров практически невозможно, так как нельзя определить их начальные значения для каждого образца пиропатрона и разброс в одной конкретной и различных партиях. Характеристики пиромассы (R , α , f) для данной партии пороха или пиропатронов, определяемые химическим составом и технологией изготовления, можно считать постоянными, соответствующими паспортным данным, так как средний разброс единичного импульса реактивной силы, связанный с технологией изготовления, составляет примерно 0,3 [16]. Согласно техническим условиям на пиропатроны постоянство плотности заряжения должно обеспечиваться постоянством давления прессования пиромассы при изготовлении партии.

Практически доступны для экспериментальных исследований и измерений только вес и температура заряда, а также сила тока в цепи запала. С целью определения этих параметров и выяснения влияния на них различных факторов был проведен специальный эксперимент с использованием баллистического маятника [16]. В результате этого эксперимента были найдены

импульсы реактивной силы $J_{p.c.}$ для нескольких наиболее распространенных типов пиропатронов (табл. 24.1)

Кроме того, в табл. 24.2 приведены характеристики некоторых типов порохов, применяемых в современных пиропатронах.

Вычисления величин P_m , проведенные по формуле (24.12) и t_k по формуле (24.13) для шести типов пиропатронов, сведены в табл. 24.3.

Величины, необходимые для расчета P_m и t_k , взяты из табл. 24.4, в которой приведены ориентировочные данные о средних характеристиках пороха f_{cp} , α_{cp} и пиропатрона W_0 . Следовательно, данные табл. 24.3 также следует считать ориентировочными.

На рис. 24.4 и 24.5 приведены экспериментальные значения импульса реактивной силы при различных значениях $J_{p.c.}$ для пиропатронов ПП-9РС и УД П2-4.

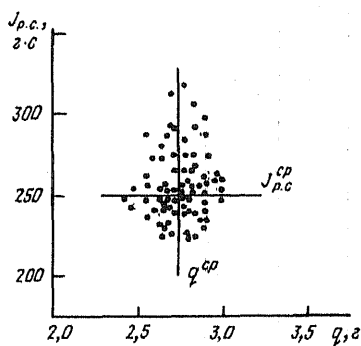


Рис. 24.4

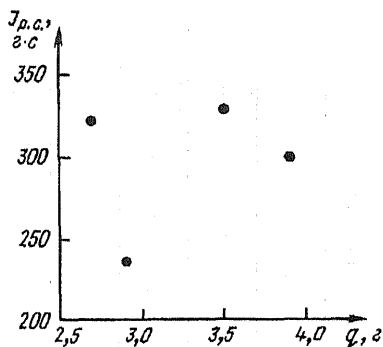


Рис. 24.5

Экспериментальное исследование параметров пиропатрона показало, что законы распределения $J_{p.c.}$, q и t для исследуемых типов пиропатронов близки к нормальным (рис. 24.6). Значения определяющих параметров импульса шести типов пиропатронов и их статистические характеристики приведены в табл. 24.5. Экспериментально установлено, что $J_{p.c.}$ незначительно зависит от температуры и силы тока цепи запала.

Таблица 24.1

Тип пиропатрона	Экспериментальные данные						Паспортные данные			
	$J_{p.c.}, \text{ г. с}$									
	J_{max}	J_{min}	m_J	σ_J	$\sigma_J/m_J, \%$	$J_{p.c.}, \text{ г. с}$	$q, \text{ г}$	$\sigma_J/m_J, \%$		
ПП9РС	328	228	251	18	7,2	260	$2 + 1,2^{\pm 0,1}$	8,3		
ПП9РСМ	255	148	187	22,8	12,3	192	$2 + 1,2^{\pm 0,1}$	8,3		
УДП2-4	329	178	243	36,8	15,9	252	$2 + 1,2^{\pm 0,1}$	2,5		
УДП2-3	265	188	220	190	8,6	180	$2 + 0,8^{\pm 0,02}$	2,5		
УДП2-2	258	117	—	—	—	156	$2 + 0,45^{\pm 0,02}$	4,5		
УДП2-1	170	88	114	11,0	10,0	113	$2 + 0,25^{\pm 0,02}$	8,0		

Таблица 24.2

Характеристика пороха	Тип пороха		
	Дымный	Пироксилиновый	Нитроглицериновый
$A, 10^{-2} \text{ м}^3/\text{Н} \cdot \text{с}$	0,0480—0,0590	0,0560—0,0590	0,04100—0,04200
$f, 10^{-1} \text{ Н} \cdot \text{м}/\text{Н}$	$2,8 \cdot 10^5$ — $3,5 \cdot 10^5$	$7,7 \cdot 10^5$ — $10,5 \cdot 10^5$	$10 \cdot 10^5$ — $12,5 \cdot 10^5$
$d, 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Н}$	0,40—0,70	0,88—1,1	0,7—0,95
$W, 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Н}$	280—340	900—970	800—860
$Q, \text{ Дж}/\text{Н}$	288—302	336—399	462—630
$T = T_1 = -273$	1900—2400	2500—2700	2900—3900
$\Delta 10^4 \text{ Н}/\text{м}^3$	1,5—1,9	1,56—1,6	1,56—1,63

Таблица 24.3

Тип патрона	ПП-9РС	ПП-9РСМ	УДП2-4	УДП2-3	УДП2-2	УДП2-1
$P_{m\text{cp}}, 10^{-3} \text{ Н/м}^2$	1620	1500	2600	1550	1950	630
$t_{k\text{cp}}, \text{с} \cdot 10^{-3}$	0,24	0,3	0,15	0,21	0,3	0,28

Таблица 24.4

Тип пиропатрона	ПП-9РС	ПП-9РСМ	УДП2-4	УДП2-3	УДП2-2	УДП2-1
$f_{cp}, 10^{-1} \text{ Н} \cdot \text{м} / \text{Н}$	$315 \cdot 10^3$	$345 \cdot 10^3$	300	300	300	300
$\alpha_{cp}, 10^{-4} \text{ м}^3 / \text{Н}$	0,55	0,5	0,6	0,6	0,6	0,6
$W_{cp}, 10^{-6}$	5,0 (1—10)	5,0 (1—10)	5,0 (2—10)	5,0 (2—10)	5,0 (1—10)	5,0 (1—10)

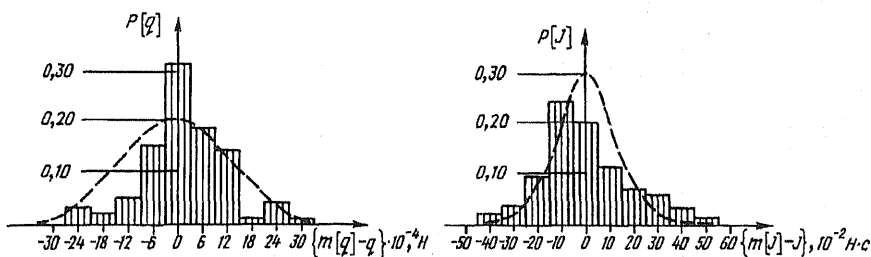


Рис. 24.6

Учитывая ограниченность экспериментальных исследований, на основе анализа имеющихся экспериментальных данных можно принять в качестве математической модели реактивной силы пиропатрона $q(t)$ некоторую детерминированную функцию, зависящую также от случайных параметров:

$$q = q(t, a_1, \dots, a_n),$$

где $a_1, \dots, a_n$ — случайные величины.

Если представить типичную зависимость реактивной силы пиропатрона графиком, изображенным на рис. 24.7, то выбор аналитической зависимости несложен и может быть сделан различными способами.

Поскольку в дальнейшем эту зависимость будем принимать для расчета вибраций ракет, желательно чтобы преобразования Фурье и Лапласа от $q(t)$ имели простой вид. Выберем в качестве аппроксимирующей функции зависимость:

$$q(t) = J \alpha^2 t e^{-\alpha t}, \quad (24.15)$$

которая при $t = \frac{1}{\alpha}$ — имеет максимум

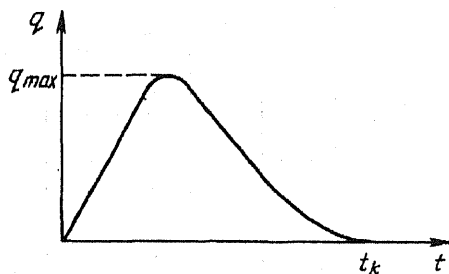


Рис. 24.7

Таблица 24.5

Тип пиро- патрона	q		f = 1500—2000 Гц						f = 150—2000 Гц				
			q _{max}	q _{min}	m _q	t _{max}	t _{min}	m _t	σ _t	t _{max}	t _{min}	m _t	σ _t
ПП-9РС	3,07	2,41	2,77	600 · 10 ⁻⁴	10 · 10 ⁻⁴	4,8 · 10 ⁻⁴	7 · 10 ⁻⁴	500 · 10 ⁻⁴	30 · 10 ⁻⁴	0,7 · 10 ⁻⁴	0,8 · 10 ⁻⁴		
ПП-9РСМ	2,98	2,0	2,68	300 · 10 ⁻⁴	10 · 10 ⁻⁴	61 · 10 ⁻⁴	17 · 10 ⁻⁴	400	20 · 10 ⁻⁴	70 · 10 ⁻⁴	64 · 10 ⁻⁴		
УДП2-4	3,91	2,68	3,23	70 · 10 ⁻⁴	5 · 10 ⁻⁴	31 · 10 ⁻⁴	23 · 10 ⁻⁴	80 · 10 ⁻⁴	1 · 10 ⁻⁴	46 · 10 ⁻⁴	30 · 10 ⁻⁴		
УДП2-3	—	—	—	400 · 10 ⁻⁴	10 · 10 ⁻⁴	95 · 10 ⁻³	136 · 10 ⁻⁴	840 · 10 ⁻⁴	20 · 10 ⁻⁴	118 · 10 ⁻⁴	170 · 10 ⁻⁴		
УДП2-2	—	—	—	700 · 10 ⁻⁴	16 · 10 ⁻⁴	486 · 10 ⁻⁴	85 · 10 ⁻⁴	740 · 10 ⁻⁴	15 · 10 ⁻⁴	—	—		
УДП2-1	—	—	—	1800 · 10 ⁻⁴	10 · 10 ⁻⁴	230 · 10 ⁻⁴	347 · 10 ⁻⁴	1880 · 10 ⁻⁴	30 · 10 ⁻⁴	270	368		

$$q_{\max} = J \alpha e^{-1}. \quad (24.16)$$

Функция (24.15) отлична от нуля на всем интервале $(0, \infty)$, в то время, как реактивная сила пиропатрона равна нулю при $t > t_k$. Однако этот недостаток аппроксимации функции (24.15) не является существенным, поскольку при $\alpha \rightarrow 0$ она стремится к нулю равномерно по t в любом промежутке (k, ∞) , где $k > 0$.

Трудность определения математического ожидания случайного параметра $\langle \alpha \rangle$ заключается в том, что, как было указано выше, в экспериментах обычно замеряется только полный импульс J и полное время t . Поэтому для приближенного определения $\langle \alpha \rangle$ может быть предложен прием, основанный на том, что типовая зависимость $q(t)$, изображенная на рис. 24.7 и аппроксимируемая выражением (24.15), близка к полуволне синусоиды. Учитывая, что величина полного импульса остается постоянной, имеем:

$$J = \int_0^{t_k} q_{\max} \sin \omega t dt = \frac{2 q_{\max} t_k}{\pi}. \quad (24.17)$$

Тогда, с учетом выражения (24.16) найдем

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\pi e}{2 \langle t_k \rangle}, \quad (24.18)$$

где $\langle \rangle$ есть символ усреднения по множеству.

Подставив выражение (24.18) в (24.15), получим выражение

$$q(t) = J \frac{\pi^2 e^2 t}{4 \langle t^2 \rangle} \exp \left\{ - \frac{\pi e}{2 t_k} t \right\}, \quad (24.19)$$

которое и следует использовать (с учетом имеющихся экспериментальных данных) при расчете вибраций ракет на старте.

При анализе нагрузок автономного полета его удобно разделить на участок полета с работающим двигателем (активный полет) и свободный полет ракеты (пассивный полет).

На активном участке полета одной из определяющих нагрузок является шум струи реактивного двигателя, достигающий ракету лишь при ее полете с дозвуковой скоростью. Элементы конструкции, находящиеся в непосредственной близости от струи, возбуждаются под действием аэроакустических давлений, в то время как для более удаленных участков конструкции основным фактором является передача звука. Состояние современной теории акустического поля не позволяет в настоящее время чисто расчетным путем определять спектр акустических возмущений.

Известно лишь, что в каждой точке струи спектр имеет один широкий пик, причем частота, соответствующая этому пику, уменьшается по мере увеличения расстояния от рассматриваемого сечения до среза сопла вдоль оси струи [1].

Проведенные в нашей стране и за рубежом многочисленные экспериментальные исследования позволили решить ряд проблем:

- 1) подробно исследовано дальнее звуковое поле ракет с тягой до 600 — 900 т;
- 2) изучено ближнее поле ракет с малой и средней тягой;
- 3) разработаны эмпирические зависимости, позволяющие расчетным путем определять статистические характеристики звуковых давлений на поверхности и вблизи ракет.

В классических работах Лайтхилла впервые была получена зависимость между параметрами потока и акустическим излучением свободной дозвуковой изотропной струи. Акустическая мощность струи выражается следующим образом:

$$W_a = k \frac{\rho_c^2 u_c^8 d_c^5}{\rho_0^2 c_0^5} \left(\frac{T_0}{T_c} \cdot 0,6 - 0,4 \right)^2, \quad (24.20)$$

где u_c , ρ_c , d_c , T_c — соответственно скорость, плотность, диаметр и температура струи; ρ_0 , c_0 , T_0 — плотность, скорость звука и температура в окружающей среде; $k = 3,5 - 10$ — коэффициент пропорциональности.

В сверхзвуковых струях закон Лайтхилла — закон пропорциональности восьмой степени скорости экспериментально не подтверждается. Показатель степени n скорости истечения изменяется в довольно широких пределах (по экспериментальным данным $n = 6,5 - 29$. Различными исследователями холодных до-

звуковых струй при $0,3 < M < 1$ и $d_c = 5 - 10$ получено следующее соотношение:

$$W_a = k \frac{\rho_c u^n d_c^2}{\rho_0^2 c_0^5} = \eta W_m, \quad (24.21)$$

где $n = 6 - 8$; $\eta = 10^{-4} M^5$ ($M = u / c_0$); $k = 0,3 \cdot 10^{-4} - 1,2 \cdot 10^{-4}$.

В формуле (24.21) через W_m обозначена механическая мощность струи в ваттах.

Эмпирические соотношения между кинетической энергией струи и излучаемой акустической мощностью приведена на рис. 24.8. Общий уровень звуковой мощности определяется при этом из соотношения:

$$L = (78 + 13,5 \lg W_m) \text{ дБ} \quad (24.22)$$

относительно $W_0 = 10^{-13}$ Вт.

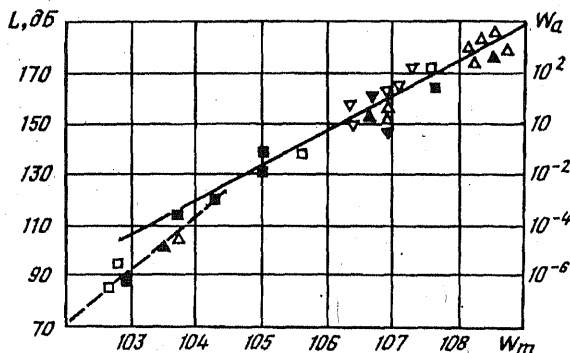


Рис. 24.8

Некоторые авторы предлагают определять акустическую мощность струи через коэффициент эффективности η и кинетическую энергию струи [10].

$$L = 10 \lg \eta + 10 \lg \frac{W_m}{W_0}. \quad (24.23)$$

Для реактивных двигателей с высокими скоростями истечения струи коэффициент эффективности становится постоянным и равным $\lg \eta = 2$, что соответствует рекомендациям многих авторов, считающих акустическую мощность струи равной ~ 1% механической мощности.

В табл. 24.6 приведены акустические мощности, суммарные уровни звуковых давлений и другие характеристики четырех типов отечественных и зарубежных ракет класса «воздух — воздух», вычисленные по указанным формулам.

Таблица 24.6

Параметры	Класс ракет: «воздух-воздух»		
Тяга, 10^4 Н	1,5	1,5	4
Кинетическая мощность, Вт	$(21-11) \cdot 10^6$	$(49-25) \cdot 10^6$	$(40-48) \cdot 10^6$
Акустическая мощность (по различным формулам)	183—180 151 145	187—184 151 146	186—182 —
Общий уровень звукового давления в головной части, дБ	145	146	—
Максимальный уровень звукового давления в октавной полосе, дБ	139	141	—
Частота, соответствующая максимальному уровню звукового давления, Гц	2500	2500	—

Основными величинами, определяющими акустические свойства ракеты, являются тактико-технические данные, тяга, массовый расход и параметры на срезе сопла, а также безразмерные обобщающие параметры — число Маха $M = u/a$, Струхала $Sh = f D_a / u$, показатель нерасчетности $\eta = P_a / P_0$ и относительные расстояния $\bar{x} = x / D_a$ и $\bar{y} = y / D_a$. Здесь индекс «а»

относится к срезу сопла, а индекс «0» — к свободному невозмущенному потоку.

Наиболее распространенной методикой определения акустического нагружения ракеты реактивной струей РДТТ является методика, базирующаяся на вышеперечисленных параметрах и представлении струи в виде серии источников, расположенных на расстоянии $x_0 D_a$ от среза сопла по оси и излучающих звуковые колебания с частотой

$$Sh = \frac{f D_a}{u} \quad \left(\text{или } f = Sh \frac{u}{D_a} \right).$$

На рис. 24.9 приведена эмпирическая зависимость x_0 / D_a от Sh . Цифрами обозначены: 1 и 3 — допустимые границы отклонений от средней кривой; 2 — усредненная кривая. При помощи этого рисунка определяется спектральная безразмерная функция, соответствующая заданному значению Sh , являющемуся средней частотой полосы (при заданной ширине полосы).

Затем определяется уровень спектральной плотности в дБ в зависимости от частоты в заданной точке на поверхности ракеты на расстоянии x от среза сопла:

$$\begin{aligned} L_{is}(f) &= 20 \lg \frac{S(f)}{P_0} = \\ &= 20 \lg \left[\frac{A(f) G^2(kR)}{P_0 R^2(f)} \right], \quad (24.24) \end{aligned}$$

где $A(f)$ — функция спектра, полученная из рис. 24.10; $G^2(kR)$ — поправка, учитывающая особенности ближнего звукового поля, берется из рис. 24.11; $k = 2\pi f / c$ —

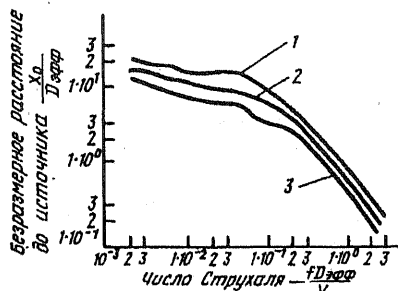


Рис. 24.9

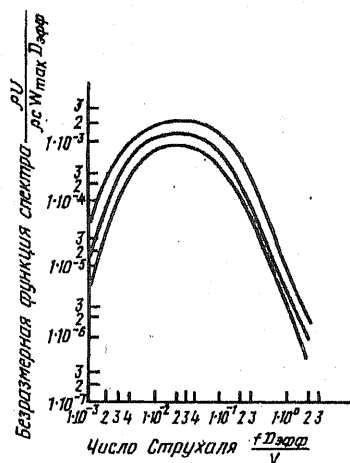


Рис. 24.10

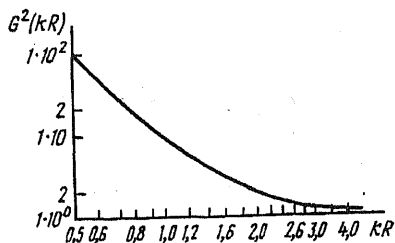


Рис. 24.11

волновое число; c — скорость звука, $R^2(f) = [x + x_0(f)]^2$,

$$P_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Н/м}^2.$$

Уровень звукового давления в зависимости от частоты в тех же точках равен:

$$L_i(f) = L_{is} + 10 \lg \Delta f, \quad (24.25)$$

где Δf — ширина полосы с центральной частотой f .

Суммарный среднеквадратический уровень звукового давления во всем диапазоне частот определяется как сумма уровней в полосах

$$L_\Sigma = 10 \lg \sum_{i=1}^n 10^{0.1 L_i}, \quad (24.26)$$

где n — число полос, на которые происходило разбиение (рис. 24.9 и рис. 24.10).

Результаты расчетов акустических параметров струи некоторых ракетных двигателей приведены в табл. 24.7.

Заметим, что при расчетах должно учитываться происходящее при движении ракеты изменение рабочих характеристик — тяги, массового расхода, плотности, скорости течения. Так, например, во всех формулах, содержащих скорость струи, должна учитываться относительная скорость $V = V_a - V_m = V_a(1 - V_m/V_a) = bV_a$, т.е. скорость V должна быть увеличена на величину $b = 1 - V_m/V_a$, где V_m — скорость полета ракеты. Аналогично при вычислении функции $G^2(kR)$ величина параметра kR должна быть уменьшена на множитель $1/(1 - M)$ и т.д.

Однако для полного задания акустического поля на поверхности ракеты помимо спектральных характеристик требуется знание пространственных корреляций точек акустического поля.

Таблица 24.7

Тип изделия	Тяга, 10^4 Н	Число M	Полетный вес, кг	Диаметр, м	Звуковое давление струи, дБ		Звуковое давление пограничного слоя		Пульсации давления		
					расчет	эксперимент	расчет, дБ	эксперимент, дБ	расчетные частоты, Гц	экспериментальные частоты, Гц	экспериментальное давление 10^5 Па
1	2	3,9	70	0,120	151	—	155	—	—	—	—
2	4,5	4,4	208	0,200	150	—	156	—	—	—	—
3	2,9	5,0	—	0,32	—	—	154	—	—	—	—
4	8,0	4,0	460	0,32	151	—	141	—	—	—	—
5	10,0	2,0	530	0,32	151	—	155	—	—	900—1400	1,5—7
6	—	—	—	0,7	—	—	150	145	—	—	—
7	0,8	$v=0$	25	0,1	146	—	—	—	900—1800	900—1800	2
8	0,9	$v=0$	25	0,1	146	—	—	—	900—1800	900—1800	7
9	0,85	$v=0$	25	0,1	146	—	—	—	900—1800	900—1800	3,75
10	0,8	$v=0$	25	0,1	146	—	—	—	900—1800	900—1800	0,67
11	0,9	$v=0$	25	0,1	146	—	—	—	900—1800	900—1800	2
12	450	—	—	1,4	—	—	—	—	—	—	—
13	80	—	—	0,5	—	167	—	—	—	—	—
14	42,3	—	—	0,73	151	—	—	—	—	—	—
15	200	—	—	0,87	—	—	—	—	—	—	—

Данные измерений звуковых давлений на поверхности ракет показывают, что радиус продольной корреляции может быть представлен в виде

$$r(x, x') = \cos k(x - x'),$$

а радиус поперечной корреляции в виде:

$$r(\varphi, \varphi') = \beta [ka(\varphi - \varphi')],$$

где a — радиус ракеты; $k = 2\pi f/c$ — волновое число; x, x' , φ, φ' — координаты точек наблюдения, расположенные соответственно вдоль оси и по окружности ракеты.

График функции $\beta [ka(\varphi - \varphi')]$ приведен на рис. 24.12. В интервале $1 < ka(\varphi - \varphi') < 10$ можно принять, что

$$r(\varphi, \varphi') = \cos ka(\varphi - \varphi').$$

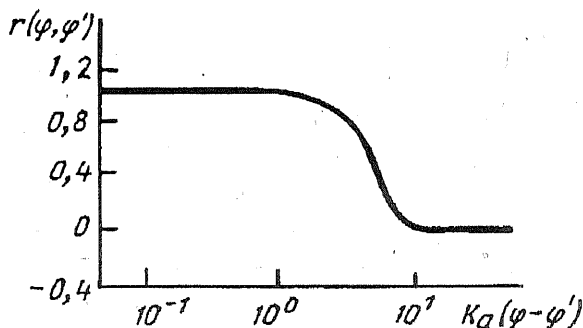


Рис. 24.12

Таким образом, звуковое давление на поверхности ракеты определяется в виде уровней среднеквадратических значений или спектральных плотностей в зависимости от частоты, осевой и угловой координат, а также радиусов корреляции в продольном и поперечном направлениях.

Рассмотрим в качестве примера расчет звукового давления, создаваемого шумом реактивной струи на поверхности ракеты, имеющей тягу двигателя $T = 4 \cdot 10^4 + 12 \cdot 10^4$ Н, секундный рас-

ход топлива $m = 43 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$, диаметр сопла на срезе $D_a = 0,252 \text{ м}$, скорость истечения $V_a = 2110 \text{ м/с}$. Результаты расчетов сведены в табл. 24.8.

Шум турбулентного пограничного слоя (шум обтекания) играет важную роль в возникновении вибраций при полете ракеты с большими сверхзвуковыми скоростями. При этом пульсации давления, возникающие в турбулентном пограничном слое, непосредственно воздействуют на корпус ракеты, вызывая его колебания. Данные летных испытаний весьма ограничены, однако, теоретические работы и эксперименты в аэродинамических трубах позволили установить, что спектр пульсаций однороден и высокочастотен (до 400 кГц).

В литературе имеются достаточно противоречивые данные о поперечных корреляциях в слое, вследствие чего задача построения расчетной модели для описания корреляционных зависимостей является чрезвычайно сложной. Несмотря на это в литературе описано большое число предлагаемых моделей, причем все авторы считают пульсации давления в слое стационарным случайным процессом. Корреляционная функция пульсаций давления берется, например, в виде:

$$K_q = l_x l_y \sigma_q^2 \delta(\xi - v\tau) \delta(\eta) \exp\left(-\frac{|\tau|}{\Theta}\right), \quad (24.27)$$

где l_x, l_y — продольный и поперечный масштабы турбулентности; σ_q — средний квадрат давления (по площади корреляции l_x, l_y); v — скорость конвекции; Θ — время релаксации (т.е. время пребывания неоднородности в слое); τ, ξ, η — разности времени и координат наблюдения, соответственно $\tau = t - t_1$, $\xi = x - x_1$, $\eta = y - y_1$.

Однако при решении конкретных задач вводится упрощающее предположение о малости Θ , в результате чего последний множитель в (24.27) превращается в $\delta(\tau)$, т.е. K_q принимает вид

$$K_q = l_x l_y \sigma_q^2 \delta(\xi - v\tau) \delta(\tau), \quad (24.28)$$

Приведем полное выражение для K_q :

Таблица 24.8

$Sh = f D_a / V_a$	$1 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$
x_0 / D из рис. 24.9	—	—
$x_0 = D(x_0 / D)$, м	18	15
$R = x_0 + x$, м	4,53	3,78
$f = Sh V_a / D_a$, Гц	7,05	6,3
$kR = 2 hfR / c$	8,4	33,8
$G^2 (kR)$	1,07	3,75
$W = \frac{m V_a^2}{2}$	8,5	1,2
$A (Sh)$ из рис. 24.10	$8,6 \cdot 10^6$	$8,6 \cdot 10^6$
$S^2(f) = A(f) G^2 (kR) R^{-2}$	0,6	23
$L_t = \left[20 \lg \left[s(f) / 2,05 \cdot 10^{-6} \right] + 40 \lg f - 1,5 \right]$, дБ	0,103	0,7
$L_z = 151 \text{ дБ} = 10 \lg \sum_{i=1}^n 10^{0,4 U_i}$	101,7	125

$$K_q = \sigma_q^2 \frac{\sin \frac{\xi - v \tau}{l_x}}{\frac{\xi - v \tau}{l_x}} e^{-l_v^{-1} \cdot \eta} \exp \left(- \frac{|\tau|}{\Theta} \right), \quad (24.29)$$

которое для конкретных расчетов должно быть упрощено путем предположения о том, что предельный масштаб турбулентности $l_x \ll L_x$ характерного размера конструкции; дробь в выражении (24.29) заменяется на $\delta(\xi, \tau)$. Выражения для K_q , аналогичные (24.29), использовались в работах Лямшева Л.М. [5] и Плахова Д.Д. [7]. Предполагается также модель конвекции по потоку с постоянной скоростью поля пульсаций давления, которые затухают со временем. Тогда K_q может быть представлена в такой форме:

$$K_q = \left\{ A \exp \left[\frac{(\xi - v \tau)^2 + \eta}{2 l_x^2} \right] + \right. \\ \left. + B \exp \left[\frac{-(\xi - v \tau)^2 + \eta}{2 l_x^2} \right] \right\} \exp \left(- \frac{|\tau|}{\Theta} \right), \quad (24.30)$$

где постоянные A и B должны определяться таким образом, чтобы теоретические кривые для корреляционной функции K_q не сильно отличались от экспериментальных. Однако сам автор при этом отмечает, что таким образом удастся добиться удовлетворительного совпадения лишь для низких частот. Нетрудно заметить, что и эта модель в предположении о малости масштабов турбулентности l_x и l_y по сравнению с размерами конструкции, а также малости Θ вырождается в (24.28).

Приведенный нами далеко не полный перечень выражений для корреляционных функций пульсаций давления K_q свидетельствует о том, что еще не установлено единого выражения для корреляционной функции $K_q(\tau, \xi, \eta)$. Ясно лишь, что поперечные и продольные пульсации можно считать независимыми и при малых скоростях конвекции — независимым принимать и временное и пространственное их распределение. Отметим, что все вышеуказанные авторы применяют выбранные модели для расчета вибрационных полей только пластин неболь-

ших размеров. Использование выражений (24.29) и (24.30) для расчета вибрационных полей оболочек летательных аппаратов представило бы значительные трудности. Учитывая, что для авиационных ракет масштабы турбулентности имеют порядок толщины пограничного слоя, которая значительно меньше размеров рассматриваемых моделей летательных аппаратов, можно ограничиться рассмотрением выражения для K_q в виде (24.28), еще более упростив его, следуя Болотину В.В. [3].

Действительно, основной вклад в K_q дают малые значения разности времени наблюдения τ . Это объясняется как раз тем, что пульсации давления во временном смысле весьма широкополосны. Тогда при не очень высоких скоростях конвекции v , вторым слагаемым в сумме $\xi - v\tau$ можно пренебречь и задать K_q , в виде корреляционного по пространству процесса:

$$K_q(\tau, \xi, \eta) = A \delta(\xi) \delta(\eta) K_q^0(\tau), \quad (24.31)$$

где A — некоторая размерная постоянная, зависящая от величины масштабов турбулентности. При этом, учитывая, что связь между корреляционной функцией нагрузки $K_q(\tau, \xi, \eta)$ и ее спектральной плотностью $S_q(\omega, \lambda, \mu)$ дается формулами преобразования Фурье, получим:

$$S_q(\omega, \lambda, \mu) = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_q^0(\tau) d\tau = A \Phi_q(\omega), \quad (24.32)$$

т.е. модель шума обтекания представляется в виде неограниченного пространственного «белого» шума, причем $\Phi_q(\omega)$ является плавной функцией частоты ω .

Величину постоянной A можно получить, построив модель ограниченного пространственного белого шума, в предположении, что поле пульсаций давления изотропно и имеет нормальный закон распределения, а масштабы турбулентности l_x и l_y равны. Окончательное выражение для $S_q(\omega, \lambda, \mu)$ имеет вид:

$$S_q(\omega, \lambda, \mu) = \Phi(\omega) = \frac{l^2}{\pi(2\pi)^2} \Phi_q(\omega). \quad (24.33)$$

В дальнейшем при расчете вибраций ракеты от шума обтекания, будем использовать формулу (24.33), так как ее применение не связано с вычислительными трудностями.

Кроме того, экспериментально установлено, что звуковое давление, излучаемое пограничным слоем, пропорционально скоростному напору q , однако, коэффициент пропорциональности изменяется в довольно широких пределах и различен для дозвуковой и сверхзвуковой скоростей полета. Среднеквадратическое значение звукового давления σ_p , излучаемого турбулентным слоем, может быть определено из следующих соотношений:

— для дозвукового полета

$$\sigma_p = (0,006 - 0,009) q; \quad (24.34)$$

— для сверхзвукового полета

$$\sigma_p = (0,002 - 0,006) q; \quad (24.35)$$

Уровень звукового давления в децибелах определяется из соотношения:

$$h = 20 \lg \left(\frac{\sigma_p}{P_0} \right), \quad (24.36)$$

где $P_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Н/м}^2$.

Расчет параметров звукового давления, создаваемого пограничным слоем для ряда различных ракет приведен в табл. 24.7.

График изменения уровней звуковых давлений по поверхности ракеты, создаваемых шумом турбулентного пограничного слоя, приведен на рис. 24.13 [14].

Пульсации давления в камере РДТТ являются одним из основных видов внешних воздействий, вызывающих интенсивные вибрации ракет на активном участке автономного полета. Нагрузки, создаваемые флуктуациями давления, могут передавать-

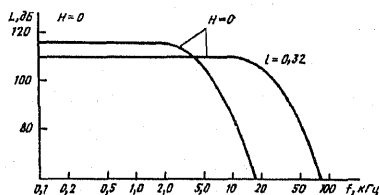


Рис. 24.13

ся на корпус и аппаратуру ракет как непосредственно механическим путем, так и через акустический промежуток между корпусами двигателя и самой ракеты. Осциллограмма записи пульсаций давления в зависимости от времени работы двигателя приведена на рис. 24.14. На рис. 24.15 приведена экспериментальная зависимость изменения максимальных уровней пульсаций давления во времени для двух различных положений датчиков.

Литература, посвященная теоретическим и экспериментальным исследованиям флуктуаций давления в камере РДТТ, чрезвычайно ограничена. Известно, что узкополосные автоколебательные процессы возникают в камере сгорания при определенном балансе энергии, поступающей с поверхности горения и поглощаемой стенками камеры и шашки, а также отводимой с продуктами горения. В остальное время колебательные процессы в камере широкополосные.

Единого мнения о механизме развития, терминологии и теории внутрикамерных процессов до настоящего времени не существует. Здесь приведены лишь некоторые характеристики пульсаций давления, отличающиеся определенной частотой и направлением распространения, но не нарушающие устойчивого горения топлива. Поскольку эти пульсации не вызывают существенных аномалий горения, таких как резкие изменения температуры, давления, тяги и т.д., то разработчики двигателей твердого топлива, как правило, и не пытаются их устранять, однако, их существование значительно влияет на возникновение вибраций ракетной конструкции.

Те ограниченные теоретические разработки, которые посвящены этому вопросу, позволяют как-то объяснить возникновение пульсаций давления в камере, но для получения количественных оценок необходимо экспериментальное определение некоторых параметров. В натурных и модельных РДТТ обнаружено три вида автоколебательных процессов горения, отличающихся характерными частотами пульсаций давления: высокочастотные, низкочастотные и инфранизкочастотные.

Наиболее полно исследована высокочастотная неустойчивость горения. Этот вид нестационарности замечен практически на всех типах двигателей и всех марках твердого топлива. Для прогнозирования вибрационного состояния ракет необхо-

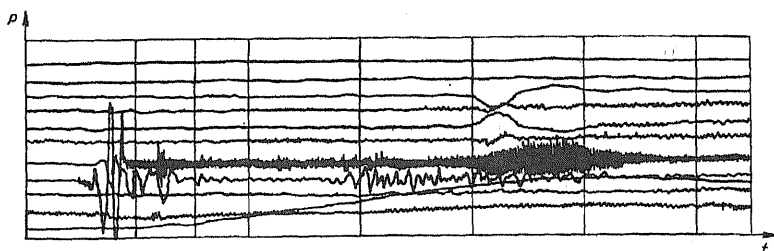


Рис. 24.14

дима информация об условиях возникновения узкополосных автоколебательных процессов давления, их уровнях и характерных частотных. Экспериментально установлено, что интенсивность высокочастотных пульсаций давления возрастает с увеличением калорийности топлива, габаритов камеры и диаметра канала шашки, уменьшением давления до некоторого критического значения и коэффициента поглощения энергии стенками камеры. Последние два параметра наиболее сильно влияют на

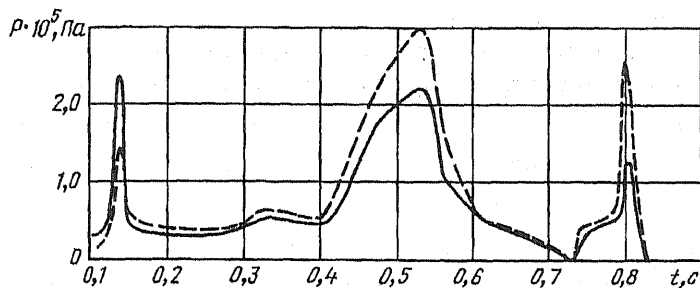


Рис. 24.15

вероятность возникновения высокочастотных пульсаций. На практике реализуются те высокочастотные колебания, частота которых соответствует резонансным частотам газовых полостей камеры и изменяется с изменением геометрии заряда вследствие выгорания топлива. Для цилиндрических камер резонансные частоты комбинированных мод выражаются следующим образом:

$$f_{m,n,n_z} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{\alpha_{m,n}}{R}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{\alpha_{m,n}}\right)^2}, \quad (24.37)$$

где c — скорость звука в полости камеры; α_{mn} — корни уравнения $\frac{dJ_m(\pi \alpha)}{d\alpha} = 0$ (где J_m — функция Бесселя 1-го рода, m -го порядка); R — радиус камеры сгорания.

Наиболее часто встречаются высокочастотные колебания продольной моды с частотой

$$f_{0,0,n_z} = cn_z / 2L,$$

где $n_z = 1, 2, 3 \dots$.

На основании анализа ряда экспериментальных работ можно сделать вывод о том, что критическая амплитуда высокочастотных пульсаций, выше которой могут наступить неустойчивые ("катастрофические") режимы, сопровождающиеся резким повышением давления в камере, примерно равна $5 \cdot 10^5$ Па. Амплитуды пульсаций, превышающие $5 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^5$ Па, встречаются лишь в отдельных случаях, причем только в конце горения. Исходя из этого, для задач прогнозирования вибрации, можно рекомендовать выбирать амплитуду колебаний в камере не более $5 \cdot 10^5$ Па (что соответствует среднему квадрату пульсаций σ_p при соблюдении закона 3σ , примерно $1,7 \cdot 10^5$ Па, но не более $2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^5$ Па).

Диапазон частот высокочастотных пульсаций изменяется в довольно широких пределах и в зависимости от габаритов камеры и шашки колеблется от 10^2 до 10^4 Гц.

Кроме рассмотренных высокочастотных пульсаций, отмечаются низкочастотные в диапазоне частот $0,3 + 300$ Гц при амплитудах давления $3 \cdot 10^5 + 10 \cdot 10^5$ Па. Такие колебания чаще всего возникают в двигателях весьма небольших размеров и они не характерны для авиационных ракет.

Пульсации давления с частотами $0,3 - 3$ Гц, обнаруженные в двигателях различных габаритов, названы инфранизкочастотными и, с точки зрения вибраций ракет, практического интереса не представляют.

Таблица 24.9

№	Марка топлива	Установившееся давление P_{cp} , $10^{-3} \frac{H}{M^2}$	Амплитуда пульсаций a , $10^{-3} \frac{H}{M^2}$	Относительная склонность к пульсациям, δP^2	Частота пульсации f , Гц	Приведенная добротность системы ψ_1	Поверхность горения S , $10^{-4} M^2$
1	«Н»	<120 45–48 45–48	1,0–2,0 5,0–20,0 —	0,7 4,2 1,0	330 330 1000	12 12 20	700 400 200
2	НИФ-2	50–200 40 <30	0 — 0,2–0,3	— 0,12 —	— 1000 —	— — —	— — —
3	РСИ-12К	30–105 55–75	$\leq 2,5$ 1,5	— 5,5	— 1000	— 20	— 200
4	РСТ-4К	55–75	1,0–1,7	2,2	1000	20	200
5	РНДСИ-5К	<90	—	4,8	1000	20	200
6	ПЭКА-18Д	20–100 90–110	0 —	— 0,12	— 330	— 12	— 700
7	РАМ-10	40 90–110	— —	0,5 0,6	1000 330	20 12	200 700
8	193	40 30–160	— —	8,8 —	1000 —	20 —	200 —
9	0153А	40 40	— —	0,62 2,1	1000 330	20 12	400 700
10	301-3	40	—	0,2	330	12	400
11	ПЭУ-7Ф	90–110	—	0,06	330	12	700

Таблица 24.10

№	Шум пограничного слоя						Шум струи					Пульсация давления		
	Эксперимент L_1	Расчет L_2	L_m	f_m	f_{min}	f_{max}	Эксперимент S_x	Расчет S_x	S_m	f_m	f_{min}	f_{max}	$\Delta f_{расч}$	$\Delta f_{экспер}$
I		?	105	18,3	0	100		159	154	6	0,1	231		
II		156	107	13,1	0	71,6		157	152	3,1	0,05	12,6		
III		164	108	7,72	0	42,6		149	144	1,2	0,02	4,5		
IV		161	94	9,85	0	54								
V		155	108	8,43	0	46,2	141—153	146		100—3000			$k = 36 ;$ $k = 1, 2, 3, 324; 533;$ 670; 736; 928; 1174; 1934; 2428	90; 900; 1200; 1400
VI		150	115	1,6		8,7								
VII								149						2
VIII								151						7
IX								150						3,5
X								152						2
XI	157—155						160—170							
XII	153—166						160—176							
XIII	157							151	148	1	0,02	2,5		2
XIV	158—164						167—175							761—49

Для удобства прогнозирования вибраций в книге собраны и обобщены величины пульсаций и другие параметры пульсаций давлений различных типов современных и перспективных топлив. Значения этих параметров сведены в табл. 24.9.

В отдельных случаях для задач прогнозирования удобно представлять нагрузку от пульсаций давления в камере в виде стационарной случайной функции двух координат в некотором фиксированном сечении $x = \text{const}$, соответствующем переднему днищу двигателя, или в виде трехмерной стационарной случайной функции, представляющей собой нагрузку вдоль линии в виде поверхностной силы:

$$q_1(t, y, x) = q(t, y) \delta(x), \quad (24.38)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

В табл. 24.10 даны основные параметры шестнадцати типов ракет и максимальные уровни внешних воздействий, полученные расчетным путем, а также даны для сравнения экспериментальные данные, полученные при летных и наземных испытаниях.

В табл. 24.10 приведены также данные о частотных диапазонах и частотах, соответствующих максимальному уровню, полученные расчетным путем и даны некоторые сравнительные величины из экспериментов.

Глава 25. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИБРАЦИЙ РАКЕТ КЛАССА «ВОЗДУХ—ВОЗДУХ» НА ТИПОВЫХ ЭТАПАХ ЭКСПЛУАТАЦИИ СОВМЕСТНО С САМОЛЕТОМ-НОСИТЕЛЕМ

§ 25.1. ВИБРАЦИИ АВИАЦИОННЫХ РАКЕТ В УСЛОВИЯХ ВЗЛЕТА-ПОСАДКИ САМОЛЕТА

При изложении методов определения вибраций на этапе эксплуатации будем предполагать, что профиль ВПП представляется либо в виде реализации некоторой случайной функции с заданными значениями математического ожидания, дисперсии и спектральной плотности, либо характеристиками конкретных аэродромов.

Пусть сложная динамическая система самолета-ракета рассматривается как упругая система, описываемая дифференциальными уравнениями равновесия вида:

$$L(y, \Theta, EJ_{кр}, C_y, \kappa, EJ_{\phi}, EJ_r, GJ_r, \sigma, m_{кр}, m_{\phi}, m_r) = 0, \quad (25.1)$$

где $EJ_{кр}, EJ_{\phi}, EJ_r$ — жесткости на изгиб крыла, фюзеляжа, ракеты; $m_{кр}, m_{\phi}, m_r$ — соответствующие массы; y — вертикальные перемещения точек; Θ — погонный угол закручивания; C_y — коэффициент подъемной силы; κ — угол стреловидности; σ — расстояние между центром изгиба сечения крыла и центром тяжести; L — линейный дифференциальный оператор.

К уравнениям (25.1) должны быть добавлены нелинейные уравнения равновесия подвижных частей самолета. Наиболее распространенными схемами шасси на современных самолетах являются рычажные и телескопические шасси, динамика которых описывается уравнениями типа [2]:

$$L_1(\phi^2, \alpha, \gamma, s, f(x)) = 0, \quad (25.2)$$

где ϕ — угол поворота рычага стойки; γ — угол между осью стойки и строительной горизонталью; α — посадочный угол; s — ход поршня амортизатора; L_1 — нелинейный дифференциальный оператор.

Кроме того, в уравнение (25.2) в неявном виде входят случайная функция $f(x)$, характеризующая микронеровности ВПП, начальная скорость V_0 (при разбеге $V_0 = 0$ и ускорении a (положительное при разбеге и отрицательное при посадке)).

Задача сводится к решению системы уравнений (25.1), (25.2), граничных условий и условий сопряжения отдельных упругих элементов самолета и системы вооружения. Если в качестве расчетной схемы выбрать классическую схему системы «самолет — ракета» в виде системы упругих балок переменного сечения, работающих на изгиб и кручение, то уравнения (25.1) будут представлять систему балочных уравнений изгибных колебаний крыла, фюзеляжа и ракеты и крутильных колебаний крыла, а уравнение (25.2), например, для шасси телескопического вида запишется в виде [2]:

$$m(\ddot{y} + g) + Q(s) + \sigma(s)s^2 \operatorname{sign}(\dot{s}) - P_n(y) = 0, \quad (25.3)$$

где $Q(s) = P_0 F_B / \left(1 - \frac{s}{L}\right)^k$; L — максимальный ход поршня; F_B — площадь воздушного поршня; P_0 — начальное давление в амортизаторе.

При таком подходе не требуется проводить линеаризации уравнения (25.3), учитывается случайный профиль ВПП для нелинейной задачи и, кроме того, не пренебрегается переменностью скорости движения носителя по ВПП.

Для данной задачи был разработан алгоритм, реализованный на ЭЦВМ, согласно которому система исходных уравнений типа (25.1), (25.2) методом Бубнова-Галеркина сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений путем представления искомых перемещений в ряды по формам собственных колебаний системы «упругий самолет — ракета», а обобщенные координаты $q_i(t)$ находились методом Рунге-Кутты путем совместного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} c_{ij}, \ddot{q}_i + d_{ij} V \dot{q}_i + \left(\alpha_{ij} + b_{ij} V^2 \right) q_i + d_{ij} \dot{q}_n + \\ + \dots + b_{ij} V^2 q_n = 2P_n \left(y_{i\text{ш}} + \sigma_{\text{ш}} \Phi_{i\text{ш}} \right), \end{aligned} \quad (25.4)$$

где $y_{i\text{ш}}$, $\Phi_{i\text{ш}}$ — значения i -й формы собственных колебаний самолета в том сечении крыла, к которому относится точка крепления шасси.

В качестве примера приведен расчет вибраций ракет класса «воздух — воздух», подвешенных под истребителем класса А (МиГ-23). Для расчета была взята спектральная плотность конкретной ВПП, с которой производились полеты. Профиль ВПП был представлен в виде реализации случайной функции, которая строилась на основе задания спектральной плотности неровностей по алгоритму, изложенному в гл. 24.

Спектральная плотность неровностей бетонированной ВПП, на которой проводились испытания, аппроксимировалась зависимостью (24.3), а пространственная частота ω определялась на отрезке $0,0628 \text{ рад/м} \leq \omega \leq 1,256 \text{ рад/м}$.

Параметр s , входящий в (24.3), определяется однозначно среднеквадратической высотой неровностей ВПП, значение которой для данного аэродрома находилось в пределах 0,66 — 1,1 см. В расчете была принята максимальная для данного аэродрома среднеквадратическая высота неровностей. Скорость самолета принималась изменяющейся равномерно при разбеге от нуля до 85 м/с и при посадке от 85 м/с до нуля. Вертикальная составляющая скорости самолета при посадке в момент первого касания самолета ВПП принималась равной 3,85 м/с.

В соответствии с требованиями программы полукрыло самолета, носовая и хвостовая части фюзеляжа и консольная часть корпуса ракеты разбивалась на десять равных отсеков и задавались значения следующих параметров: m , $m\sigma$, Jm , m_{ϕ}^{xb} , m_p , EJ_{ϕ}^H , EJ_{ϕ}^{xb} , EJ_p , GJ_p . Жесткостные и массовые характеристики системы «самолет — ракета» приведены в табл. 25.1 и 25.2, в которых все сосредоточенные грузы, как и подкрыльевая часть ракеты (в отличие от консольной, включены в погонную массу того отсека, к которому они относятся.

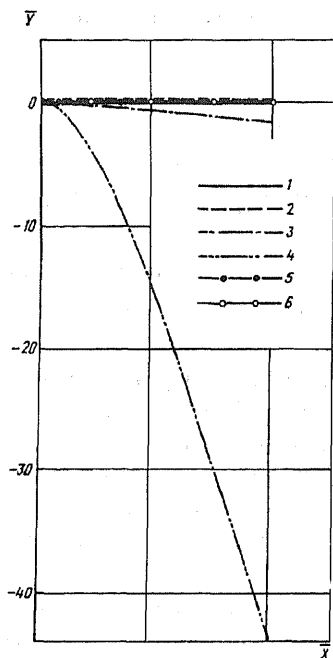


Рис. 25.1

В результате расчета были найдены формы и частоты собственных колебаний системы «самолет — ракета» с учетом поступательных перемещений, тангажа и шести тонов упругих колебаний. Результаты расчетов представлены на рис. 25.1 — 25.3. Формы колебаний консольной части ракеты в единой системе «фюзеляж — крыло — ракета» изображены на рис. 25.1. Рис. 25.2 и 25.3 иллюстрируют формы колебаний крыла и фюзеляжа.

Частоты колебаний системы, полученные расчетом, имеют следующие значения: $\nu_1 = 8,8$ Гц; $\nu_2 = 11,6$ Гц; $\nu_3 = 20$ Гц; $\nu_4 = 24,64$ Гц; $\nu_5 = 34,6$ Гц; $\nu_6 = 86,5$ Гц.

Виброперегрузки определялись в крайней точке носовой части ра-

Таблица 25.1

$N_{\text{сеч}}$	$m, \text{ г} \cdot \text{см}^2$	$m_0, \text{ г} \cdot \text{см}^2$	$Jm, \text{ г} \cdot \text{см}^2$	$m_{\Phi}^{\text{н}}, \text{ г} \cdot \text{см}^2$	$m_{\Phi}^{\text{нн}}, \text{ г} \cdot \text{см}^2$	$m_p, \text{ г} \cdot \text{см}^2$
0	0	0	0	11,3	11,3	0
1	0	0	0	9,15	33,5	0,0677
2	4,07	50	66	9,35	69,2	0,0677
3	2,37	18,8	39	7,46	3,57	0,131
4	1,074	15,25	21,4	7,46	28,7	0,131
5	1,115	15,4	21,2	4,69	2,85	0,106
6	8,45	7,35	12,8	4,69	2,85	0,29
7	6,65	7,58	9,1	2,14	3,18	0,102
8	6,00	3,9	6,0	1,51	3,18	0,102
9	4,09	2,66	2,98	7,45	3,18	0,164
10	3,50	0	1,63	0	3,18	0,152

Таблица 25.2

$N_{\text{сеч}}$	$EJ, \text{ кг} \cdot \text{см}^2$	$EJ_{\Phi}^{\text{н}}, \text{ кг} \cdot \text{см}^2$	$EJ_{\Phi}^{\text{нн}}, \text{ кг} \cdot \text{см}^2$	$EJ_p, \text{ кг} \cdot \text{см}^2$	$GJ_p, \text{ кг} \cdot \text{см}^2$
0	$0,1 \cdot 10^{17}$	$0,708 \cdot 10^{12}$	$0,395 \cdot 10^{12}$	$0,35 \cdot 10^8$	0,0
1	$0,1 \cdot 10^{17}$	$0,223 \cdot 10^{12}$	$0,395 \cdot 10^{12}$	$0,35 \cdot 10^8$	$0,677 \cdot 10^{-4}$
2	$0,23 \cdot 10^{11}$	$0,223 \cdot 10^{12}$	$0,395 \cdot 10^{12}$	$0,35 \cdot 10^8$	$0,677 \cdot 10^{-4}$
3	$0,133 \cdot 10^{11}$	$0,193 \cdot 10^{12}$	$0,355 \cdot 10^2$	$0,35 \cdot 10^8$	$0,131 \cdot 10^{-3}$
4	$0,68 \cdot 10^{10}$	$0,95 \cdot 10^{11}$	$0,292 \cdot 10^{12}$	$0,35 \cdot 10^8$	$0,131 \cdot 10^{-3}$
5	$0,46 \cdot 10^{10}$	$0,50 \cdot 10^{11}$	$0,227 \cdot 10^{12}$	$0,35 \cdot 10^8$	$0,106 \cdot 10^{-3}$
6	$0,30 \cdot 10^{10}$	$0,40 \cdot 10^{11}$	$0,222 \cdot 10^{12}$	$0,35 \cdot 10^8$	$0,29 \cdot 10^{-3}$
7	$0,18 \cdot 10^{10}$	$0,26 \cdot 10^{11}$	$0,222 \cdot 10^{12}$	$0,35 \cdot 10^8$	$0,102 \cdot 10^{-3}$
8	$0,10 \cdot 10^{10}$	$0,14 \cdot 10^{11}$	$0,185 \cdot 10^{12}$	$0,35 \cdot 10^8$	$0,102 \cdot 10^{-3}$
9	$0,45 \cdot 10^9$	$0,85 \cdot 10^{10}$	$0,142 \cdot 10^{12}$	$0,35 \cdot 10^8$	$0,164 \cdot 10^{-3}$
10	$0,35 \cdot 10^9$	$0,30 \cdot 10^{10}$	$0,100 \cdot 10^{12}$	$0,35 \cdot 10^8$	$0,152 \cdot 10^{-3}$

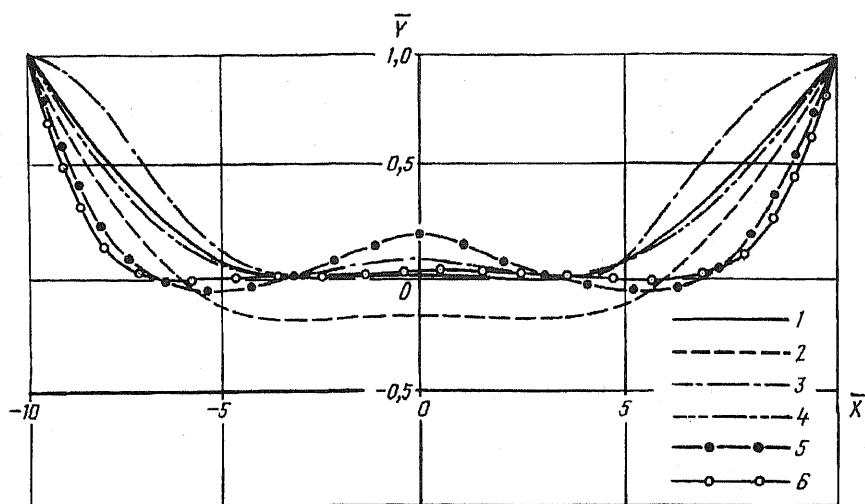


Рис. 25.2

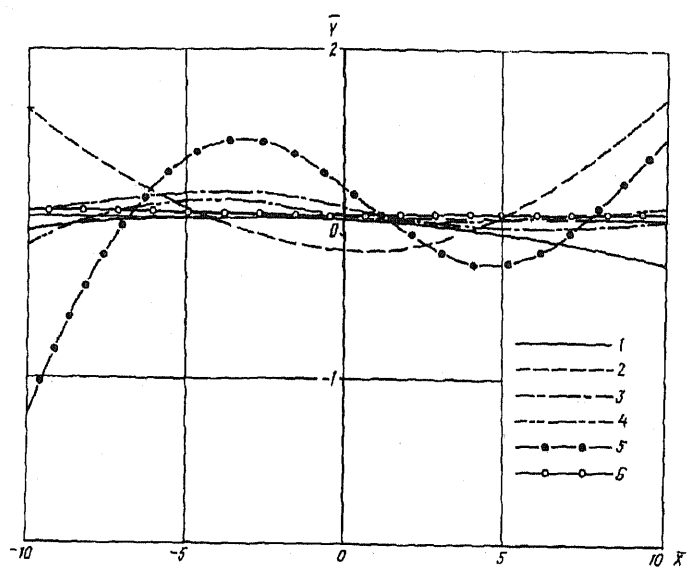


Рис. 25.3

кеты, подвешенной под крылом, как функции времени и скорости разбега самолета. При разбеге суммарные виброперегрузки определялись на отрезке времени длительностью 4 с при изменении скорости движения самолета от 162 до 226 км/ч. Эти скорости по экспериментальным данным соответствуют максимальным уровням суммарных виброперегрузок. Изменение максимальной суммарной виброперегрузки в крайней точке носовой части ракеты в зависимости от скорости разбега самолета показано на рис. 25.4. Там же пунктиром показаны экспери-

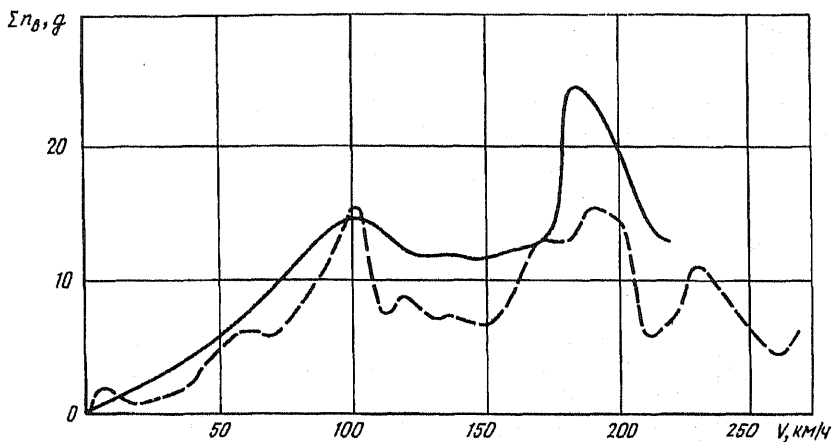


Рис. 25.4

ментально полученные значения виброперегрузок. Полученные расчетом и экспериментально найденные точки нанесены по центрам интервалов скоростей и эти дискретные значения для наглядности соединены кривыми.

Дисперсии суммарных вибронагрузок ΣD_i , на носовой части ракеты в подкрыльевом варианте подвески при различных диапазонах скоростей самолета по ВПП приведены в табл. 25.3.

На рис. 25.5 показана нормированная спектральная плотность суммарных виброперегрузок в крайней носовой части ракеты клас-

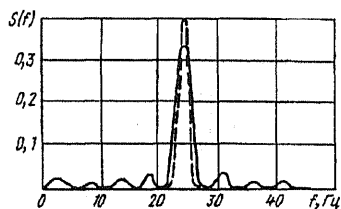


Рис. 25.5

са «воздух — воздух» в диапазоне скоростей движения самолета-носителя 170 — 210 км/ч.

Таблица 25.3

	Диапазон скоростей самолета, км/ч			
ΣD_i	40—60	90—130	170—210	250—270
Эксперимент	1,25	8,60	19,03	2,08
Теория	—	—	24,8	—

Зависимость суммарной виброперегрузки этой же точки ракеты при посадке самолета МиГ-23 как функции времени при первом посадочном ударе приведена на рис. 25.6.

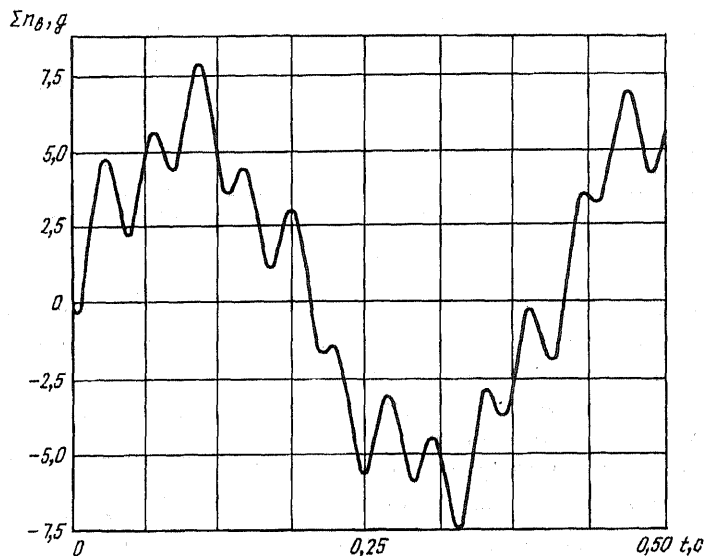


Рис. 25.6

Из сравнения теоретических и экспериментальных кривых, приведенных на рис. 25.4, можно сделать вывод, что величины

изменения суммарных виброперегрузок в зависимости от скорости разбега самолета, полученные расчетным путем, удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Рис. 25.5 показывает, что величины и характер спектральных плотностей суммарных виброперегрузок также удовлетворительно совпадают с экспериментальными данными.

Некоторое расхождение уровней суммарных виброперегрузок, полученное в данном примере по результатам эксперимента и расчета, можно объяснить тем, что в качестве входного параметра при расчетах бралась максимальная величина среднеквадратической неровности $\sigma = 1,1$ см, в то время как неровности реальной ВПП на большинстве участков, по-видимому, ниже максимального значения.

§ 25.2. ВИБРАЦИИ АВИАЦИОННЫХ РАКЕТ В УСЛОВИЯХ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ С НОСИТЕЛЕМ

В данном разделе излагается упрощенный метод расчетного определения вибраций авиационных ракет в совместном движении с самолетом-носителем, основанный на том обстоятельстве, что внутри одного класса носителей статистические характеристики динамических нагрузок в зулах подвески имеют достаточно устойчивый характер. Однако разнообразие типов носителей и номенклатуры подвешиваемых к ним ракет требует дополнительного обоснования этого метода. Кроме того, современные концепции боевого применения авиационных ракет требуют возможности эксплуатации одной и той же ракеты на различных типах носителей и применения на одном носителе различных ракет, отличающихся друг от друга боевым назначением, а следовательно, весами, габаритами и т.д. Практический интерес представляет также проблема трансформации вибронгрузок, действующих на пилон самолета, летающего без подвешенных грузов, при подвеске к нему каких-либо грузов (ракет, бомб и т.д.).

Рассмотрению указанных вопросов и посвящен данный параграф. При этом будем полагать, что колебания точек пилона представляют собой стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, а рассматриваемые модели являются линейными упругими системами.

Обозначим через $W_0(N_j, t)$ перемещения точек пилона носителя без ракет, т.е. без дополнительной нагрузки, а через $S_0(\omega)$ — известную спектральную плотность, соответствующую этому перемещению. Очевидно, при подвеске ракет в каждой из опор возникнут силы $P(N_j, t)$, вызывающие перемещения точки пилона $W(N_j, t)$. Эти перемещения в равной степени мо-

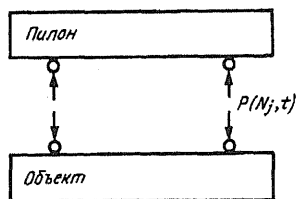


Рис. 25.7

гут быть отнесены и к самолету (пилону), и к ракете. Ставится задача определения статистических характеристик перемещения $W(N_j, t)$ по известным статистическим зависимостям соответствующих характеристик $W_0(N_j, t)$ (см. рис. 25.7).

Поскольку было сделано предположение о линейности изучаемой системы, можно ввести в рассмотрение функцию $G_c(N_j, t)$, представляющую собой функцию Грина и означающую перемещение точек пилона N_j под действием единичного импульса силы, приложенного в направлении, совпадающем с направлением действия вектора вибраций.

Тогда перемещение узлов подвески вместе с ракетой можно записать в виде:

$$W(N_j, t) = W_0(N_j, t) - \int_{-\infty}^t d\tau \sum_{k=1}^m G_c(N_j, N_{k-1}, t - \tau) P(N_j, \tau), \quad (25.5)$$

где индекс «С» указывает на принадлежность точек пилона к самолету.

Аналогично, вводя в рассмотрение функцию Грина $G_p(N_j, t)$, означающую перемещение точек N_j ракеты под действием единичного импульса силы, можно записать перемещения точек узлов подвески ракеты в виде:

$$W(N_j, t) = \int_{-\infty}^t d\tau \sum_{k=1}^m G_p(N_j, N_k, t - \tau) P(N_j, \tau), \quad (25.6)$$

где индекс « p » указывает на принадлежность точек подвески к ракете.

Уравнения (25.5) и (25.6) представляют собой совместную систему линейных интегральных уравнений относительно перемещений $W(N_i, t)$ и сил $P(N_i, t)$. Применяя к этой системе преобразование Фурье, получим систему алгебраических уравнений для трансформант:

$$W^F(N_j, \omega) = W_0^F(N_j, \omega) - H_c(i\omega) P^F(N_j, \omega); \quad (25.7)$$

$$W^F(N_j, \omega) = H_p(i\omega) P^F(N_j, \omega);$$

где $H_c(i\omega)$ и $H_p(i\omega)$ — частотные характеристики самолета и ракеты соответственно.

Исключая силы $P(N_j, \omega)$ и решая (25.7) относительно $W(N_j, \omega)$, получаем:

$$W^F(N_j, \omega) = \frac{H_p(i\omega)}{H_p(i\omega) + H_i(i\omega)} W_0^F(N_j, \omega). \quad (25.8)$$

Из уравнения (25.8) следует, что

$$S(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_0(\omega), \quad (25.9)$$

где введено обозначение:

$$|K(i\omega)|^2 = \left| \frac{H_p(i\omega)}{H_p(i\omega) + H_0(i\omega)} \right|^2, \quad (25.10)$$

которое можно трактовать как коэффициент искажения спектра вибраций, возникающий вследствие подвески к самолету-носителю какой-либо ракеты, имеющей частотную характеристику $H_p(i\omega)$.

Выражения (25.9), (25.10) позволяют оценить изменение статистических характеристик вибраций в узлах подвески при наличии под носителем каких-либо объектов авиационного во-

оружения по сравнению с вибрациями, возникающими на пилоне самолета, не имеющего наружной подвески.

Аналогичным образом можно по известным существующей и летавшей под данным носителем ракеты найти статистические характеристики вибраций в узлах подвески в случае, когда под этот же носитель подвешивается другая ракета:

$$S_2(N_j, \omega) = |K_1(i\omega)|^2 S_1(N_j, \omega), \quad (25.11)$$

где коэффициент искажения спектра $|K_1(i\omega)|^2$ имеет следующий вид:

$$|K_1(i\omega)|^2 = \left[\frac{H_{p_2}(i\omega)}{H_{p_1}(i\omega)} \cdot \frac{H_{p_1}(i\omega) + H_c(i\omega)}{H_{p_2}(i\omega) + H_c(i\omega)} \right]^2, \quad (25.12)$$

В формулах (25.11) и (25.12) индекс «1» относится к уже существующей, а индекс «2» к вновь создаваемой или впервые подвешиваемой под данный носитель ракете.

В качестве примера рассмотрим по классификации ЦАГИ самолеты классов А и Б с двумя вариантами подвески ракет каждый массой 200 и 30 кг и 300 и 500 кг соответственно). При рассмотрении числового примера для простоты будем полагать, что колебания ракеты могут быть описаны уравнениями балочной теории.

Принимая единичное возбуждение в узлах подвески (в точках N_j) в форме $e^{i\omega t}$, получим частотные характеристики самолета и ракеты. Считая собственные формы и частоты колебаний самолета и ракеты известными, можно записать уравнения для определения частотных характеристик. При этом, как и в § 25.1, ограничимся двумя нулевыми (перемещения как твердого тела) и двумя упругими тонами колебаний для ракеты и шестью упругими тонами для самолета, что охватывает частотный диапазон внешних воздействий, характерных для этапа совместного движения ракеты и носителя. Система уравнений колебаний упругого самолета в этом случае имеет вид (25.4), а систему уравнений колебаний ракеты представим в виде:

$$C_{11} \ddot{q}_1 + C_{13} \ddot{q}_3 + C_{14} \ddot{q}_4 = \sum_{j=1}^2 e^{i\omega t} f_1(N_j);$$

$$C_{22} \ddot{q}_2 + C_{23} \ddot{q}_3 + C_{24} \ddot{q}_4 = \sum_{j=1}^2 e^{i\omega t} f_2(N_j);$$
(25.13)

$$C_{31} \ddot{q}_1 + C_{32} \ddot{q}_2 + C_{33} \ddot{q}_3 + 2h \dot{q}_3 + a_{33} q_3 = 0;$$

$$C_{41} \ddot{q}_1 + C_{42} \ddot{q}_2 + C_{44} \ddot{q}_4 + 2h \dot{q}_4 + a_{44} q_4 = 0.$$

Значения коэффициентов уравнения (25.13) приведены в табл. 25.4. Выражения и численные значения коэффициентов C_{ik} , a_{ik} и h для двух типов са-

молетов получены в соответствии с методом, изложенным в § 25.1. Исследования, проведенные в диапазоне частот 0 + 50 Гц, позволили найти значения частотных характеристик для самолета и ракеты в узлах подвески, а также коэффициент искажения спектра $|K_1(i\omega)|^2$ (рис. 25.8). Рис.

25.8, а соответствует самолетам класса А, а рис. 26.5 — самолетам класса Б. Кривые I получены для ракет массой 200 кг, кривые II для ракет массой 300 кг, а кривые III — массой 500 кг.

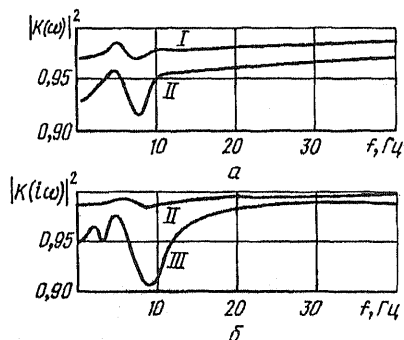


Рис. 25.8

Анализ характера поведения функции $|K_1(i\omega)|^2$ показывает, что для рассмотренных типов ракет, подвешенных под самолетами классов А и Б коэффициент искажения спектра в рассматриваемом диапазоне частот мало отличается от единицы (превышает 0,9), т.е. при подвеске ракет массой до 300 кг под самолетами класса А и до 500 кг под самолетами класса Б, спектральная плотность низкочастотных вибраций на пилоне практически не меняется.

Таблица 25.4

Коэффициенты уравнений движения ракет	I ракета (300 кг)	II ракета (200 кг)	III ракета (500 кг)
C_{11}	0,293	0,214	0,482
C_{22}	0,0	0,0	0,0
C_{13}	0,039	0,010	$-0,190 \cdot 10^{-1}$
C_{14}	0,066	0,0828	0,055
C_{33}	$0,473 \cdot 10^5$	$0,642 \cdot 10^5$	$0,235 \cdot 10^5$
C_{44}	$0,151 \cdot 10^7$	$0,303 \cdot 10^6$	$0,419 \cdot 10^5$
C_{23}	0,024	0,0486	0,0556
C_{24}	-0,0045	0,3216	0,0076
h	0,1	0,1	0,1

Глава 26. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИБРАЦИЙ РАКЕТ КЛАССА «ВОЗДУХ — ВОЗДУХ» В АВТОНОМНОМ ПОЛЕТЕ

§ 26.1. ВИБРАЦИОННОЕ СОСТОЯНИЕ РАКЕТ С ОДНОРОДНЫМИ ПО ДЛИНЕ СВОЙСТВАМИ

Основным источником возбуждения вибраций ракет в автономном полете являются пульсации внутрикамерного давления. Для анализа вибраций этого участка полета можно воспользоваться соотношениями, полученными в работе [6], в которой было сделано допущение о независимости параметров одномерной модели от осевой координаты x . При этом в качестве математической модели рассматривался однородный стержень сложной структуры, длиной l , возбуждаемый с торца (при $x = l$) осевой случайной силой $P(t)$. Записывая уравнения продольных колебаний стержня сложной структуры в виде

$$C(1+R) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \int_0^\infty m(\alpha) \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial t^2} = 0; \quad (26.1)$$

$$\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial t^2} + \alpha^2 (1 + R_\alpha) (v_\alpha - u) = 0,$$

где C — продольная жесткость ракеты; R — нечетный оператор дифференцирования, определяющий затухание в конструкции; m — погонная масса корпуса; $m(\alpha)$ — закон распределения присоединенных масс по частотам; u — продольное смещение корпуса; v_α — продольное смещение α -го осциллятора, и формулируя граничные условия:

$$x = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

$$x = l; \quad C(1+R) \frac{\partial u}{\partial x} = e^{i\omega t}, \quad (26.2)$$

получаем, выражение для закона изменения квадрата амплитуд вибраций по длине ракеты:

$$A^2 = \frac{\omega^4}{|c\lambda(1+i\psi)|^2} \cdot \frac{ch\,2\eta x + \cos\,2\mu x}{ch\,2\eta l - \cos\,2\mu l}. \quad (26.3)$$

Представляя случайную нагрузку, приложенную в сечении $x = l$ в виде стационарной случайной функции времени с нулевым значением математического ожидания, корреляционную функцию виброускорений в точке с координатой x можно представить в виде

$$K(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} |\Phi(\omega, x)|^2 S_p(\omega) d\omega, \quad (26.4)$$

где квадрат модуля передаточной функции $|\Phi(\omega, x)|^2$ определяется выражением (26.3).

Если учесть то обстоятельство, что пульсации давления в камере сгорания часто имеют вид широкополосного случайного процесса с плавной спектральной плотностью $S_p(\omega)$, выражение (26.4) может быть существенно упрощено. Упрощение достигается путем учета того обстоятельства, что даже при малом τ

выражение (26.3) является быстропеременной функцией частоты ω с большим числом максимумов и минимумов. Тогда согласно [3],[6] интегрирование в (26.4) целесообразно провести в два этапа: сначала усреднить подынтегральное выражение в пределах нескольких максимумов, а затем уже вести интегрирование по ω . Поскольку в (26.3) все функции за исключением тригонометрических, являются плавными функциями частоты, усреднение проводится по аргументам этих тригонометрических функций, считая при этом остальные функции постоянными:

$$|\Phi|_{\text{cp}}^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\omega^4}{|c\lambda(1+i\psi)|^2} \cdot \frac{ch\,2\eta x + \cos z_1}{ch\,2\eta l - \cos z_2} dz_1 dz_2. \quad (26.5)$$

Вычисление интегралов в выражении (26.5) приводит к следующему простому результату:

$$|\Phi|_{\text{cp}}^2 = \frac{\omega^4}{|c\lambda(1+i\psi)|^2} \cdot \frac{ch\,2\eta x}{ch\,2\eta l}. \quad (26.6)$$

Внося усредненное выражение (26.6) в (26.4), получим упрощенные формулы для определения корреляционной функций поля вибраций

$$K(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} |\Phi(\omega, x)|_{\text{cp}}^2 S_p(\omega) d\omega, \quad (26.7)$$

и для спектральной плотности виброускорений

$$S_{\ddot{u}}(\omega) = \frac{\omega^4}{|c\lambda(1+i\psi)|^2} \cdot \frac{ch\,2\eta x}{ch\,2\eta l} S_p(\omega). \quad (26.8)$$

Формула (26.8) допускает дальнейшее упрощение, если ввести дополнительное предположение о малости коэффициента пространственного затухания, т.е. допущения $2\eta l \ll 1$. Тогда имеем

$$S_{\ddot{u}}(\omega) = \frac{\omega^4 S_p(\omega)}{|c\lambda(1+i\psi)|^2 2\eta l}. \quad (26.9)$$

Если же $2\eta l \gg 1$, то использование асимптотических формул для гиперболических функций дает:

$$S_{ii}(\omega) = \frac{\omega^4}{|c\lambda(1+i\psi)|^2 2\eta l} e^{-2\eta(1-x)} S_p(\omega). \quad (26.10)$$

Если теперь положить $\eta = \frac{\omega}{a}$ и $\kappa = \frac{v}{\omega}$, то из выражения (26.10) можно получить расчетную формулу для определения среднеквадратического значения виброускорения σ_{ii} :

$$\sigma_{ii} = \frac{\omega \sigma_p}{M a} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\left(2 \frac{l}{a} \omega \kappa \frac{x}{l}\right)}{\operatorname{sh}\left(2 \frac{l}{a} \omega x\right)}}, \quad (26.11)$$

где M — масса ракеты; a — скорость распространения продольной волны; σ_p — средний квадрат пульсаций давления в камере сгорания двигателя.

В области высоких частот, когда аргументы гиперболических функций велики, из формулы (26.11) можно получить еще более простое выражение, удобное для оценочных расчетов вибраций:

$$\sigma_{ii} = \frac{\omega \sigma_p}{M a} \exp\left[-\frac{\omega \kappa}{a}(1-x)\right]. \quad (26.12)$$

По приведенным в этом параграфе соотношениями нами были проведены расчеты полей вибраций девяти конкретных ракет. В табл. 26.1 приведены основные параметры ракет, необходимые для расчетов. Некоторые результаты вычислений представлены на рис. 26.1 — 26.8.

Имеющиеся в нашем распоряжении экспериментальные данные о вибрациях этих объектов нанесены на соответствующие графики в виде точек.

Рассмотрение рис. 26.1 — 26.8 показывает, что несмотря

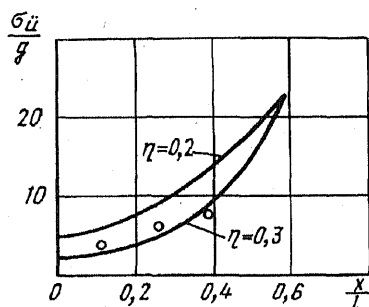


Рис. 26.1

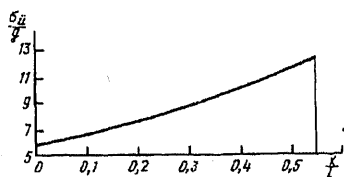


Рис. 26.2

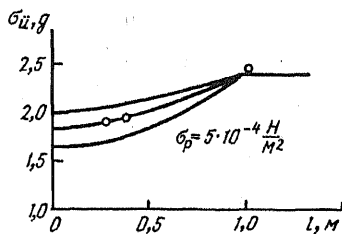


Рис. 26.3

на сделанные допущения об однородности свойств ракеты и характере нагружения, представленные соотношения в интегральном смысле хорошо описывают ряд закономерностей, наблюдаемых в экспериментах, таких как интенсивное затухание вибраций по длине и сглаженность амплитудночастотных характеристик в области высоких частот.

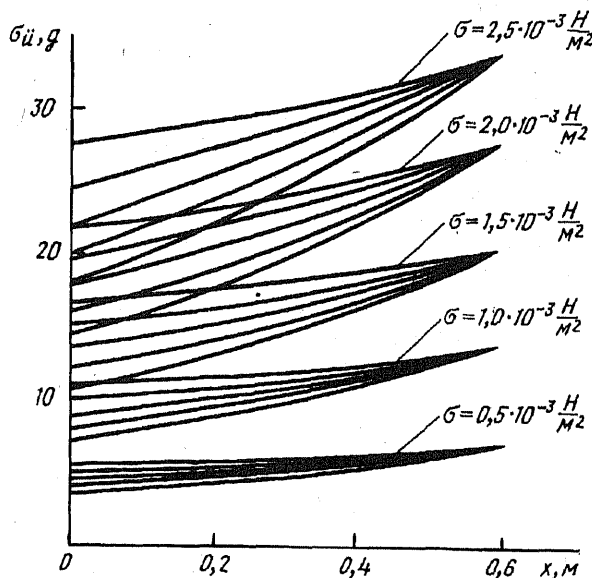


Рис. 26.4

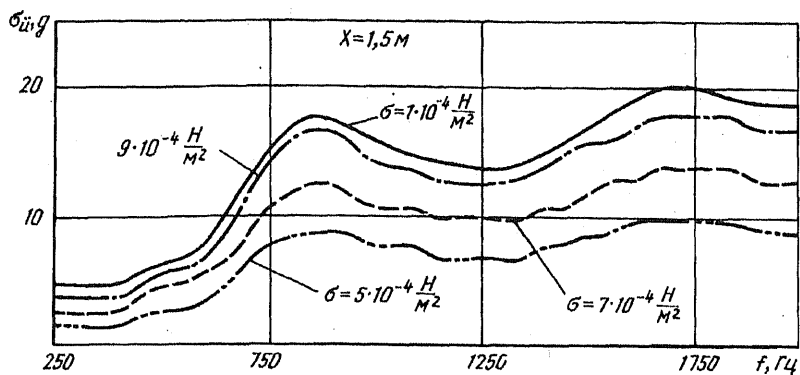


Рис. 26.5

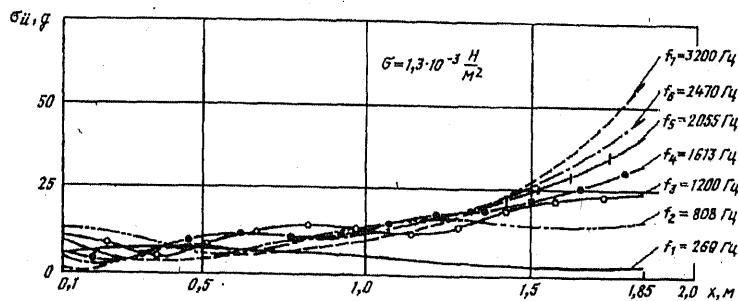


Рис. 26.6

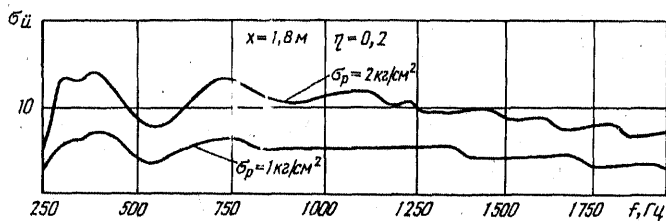


Рис. 26.7

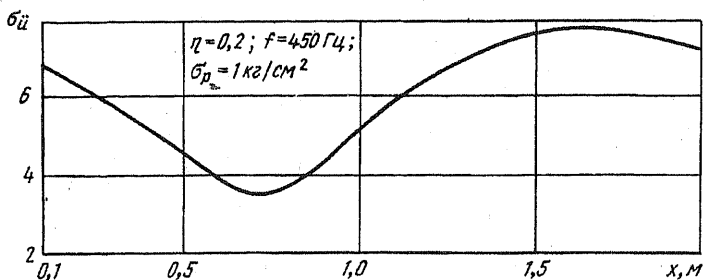


Рис. 26.8

Таблица 26.1

Наименование ракеты	Масса кг	Диаметр, м	Площадь, 10^{-4} м^2	Отношение l_1 / l	$(C)_{\text{ср}}$	Результаты расчетов
I	550	0,33	857	0,6	$6,5 \cdot 10^4$	Рис. 26.1
II	220	0,20	294	0,537	$17,2 \cdot 10^6$	Рис. 26.2
III	75	0,127	151	0,364	$15 \cdot 10^6$	Рис. 26.3
IV	87,8	0,127	151	0,362	$15 \cdot 10^6$	$(\sigma_{\text{max}})_{\text{рас}} = 25g$
V	29	0,12	98,6	0,356	$1,12 \cdot 10^6$	Рис. 26.4
VI	284	0,275	607	0,428	—	$(\sigma_{\text{max}})_{\text{рас}} = 48g$ $(\sigma_{\text{max}})_{\text{оксп}} = 45g$
VII	660	0,37	1075	0,392	$3,8 \cdot 10^7$	Рис. 26.5
VIII	450	0,38	1135	0,53	$4 \cdot 10^7$	Рис. 26.6
IX	1027	0,45	1600	0,44	$4,3 \cdot 10^7$	Рис. 26.7 Рис. 26.8

§ 26.2. О СВЯЗИ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ В КАМЕРЕ РАБОТАЮЩЕГО ДВИГАТЕЛЯ С ВЕЛИЧИНОЙ ВИБРАЦИЙ КОРПУСА ДВИГАТЕЛЯ

Информация о пульсациях давления в камере РДТТ, имеющаяся на ранних стадиях создания и отработки ракет весьма ограничена. Для измерения основных характеристик пульсаций давления необходима установка датчиков внутри полости камеры, для чего требуется препарирование двигателя, что является крайне нежелательным и в большинстве случаев невозможным.

Вместе с тем оказывается, что вышеизложенный подход к описанию поведения конструкции в высокочастотной области позволяет определять необходимые статистические характеристики пульсаций давления в камере на основе измерения вибрация, хотя бы в одной точке корпуса двигателя.

Действительно, отработка РДТТ ведется в основном на жестких стендах, причем обычно в процессе испытаний производятся измерения параметров силы тяги $P(t)$ и вибраций оболочки двигателя.

Если динамическое поведение двигателя описывать для простоты однородным стержнем сложной структуры, совершающим лишь продольные колебания под действием силы тяги $P(t)$, имеющей помимо среднего, постоянного значения P_0 и некоторую случайную составляющую $\Delta P(t)$, зависящую от пульсаций давления в камере и характеризуемую спектральной плотностью $S_p(\omega)$, можно записать соотношение

$$S_{\ddot{u}_{дв}} = \left| \Phi_{дв} \right|^2 S_p, \quad (26.13)$$

где $S_{\ddot{u}_{дв}}$ — известная спектральная плотность виброускорений точки на корпусе двигателя; $\left| \Phi_{дв} \right|^2$ — квадрат модуля передаточной функции, вид которой и нужно установить из решения задачи, расчетная схема которой представлена на рис. 26.9.

Колебания двигателя будем описывать при помощи уравнений движения стержня сложной структуры, совершающего продольные колебания, которое можно записать в виде

$$u'' + \lambda^2 u = 0, \quad (26.14)$$

где $\lambda^2 = \frac{\omega^2}{V^2} \left[1 - i \kappa(\omega) \right]^2$.

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} x = 0; \quad u = 0; \\ x = l_{\text{дв}}; \quad c(1 + i\psi) \frac{\partial u}{\partial x} = P. \end{aligned} \quad (26.15)$$

Решение уравнения (26.14) можно записать в виде

$$u = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) e^{i\omega t}.$$

Из первого граничного условия находим, что $A = 0$, а из второго

$$B = \frac{P}{c(1 + i\psi) \lambda \cos \lambda l_{\text{дв}}}.$$

Тогда решение уравнения (26.14) можно представить следующим образом:

$$u = \frac{P \sin \lambda x}{c(1 + i\psi) \lambda \cos \lambda l_{\text{дв}}} e^{i\omega t}. \quad (26.16)$$

Или для виброускорения:

$$\ddot{u} = - \frac{P \omega^2 \sin \lambda x}{c(1 + i\psi) \lambda \cos \lambda l_{\text{дв}}} e^{i\omega t}. \quad (26.17)$$

Запишем теперь выражение для передаточной функции $\Phi_{\text{дв}}(\omega)$ двигателя по ускорению от силы P к точке $x = x_1$:

$$\Phi_{\text{дв}}(\omega) = \frac{\omega^2 \sin \lambda x_1}{c(1 + i\psi) \lambda \cos \lambda l_{\text{дв}}}. \quad (26.18)$$

квадрат модуля которой равен

$$|\Phi_{\text{дв}}(\omega)|^2 = \frac{\omega^4}{|c \lambda (1 + i\psi)|^2} \cdot \frac{ch \, 2\eta x - \cos 2\mu x}{ch \, 2\eta l_{\text{дв}} + \cos 2\mu l_{\text{дв}}}. \quad (26.19)$$

Имея выражение (26.19) и зная спектральную плотность виброускорения $S_{\ddot{u}}$ в какой-либо точке двигателя A (см. рис. 26.9), можно записать известное соотношение

$$S_{\ddot{u}_{дв}} = \left| \Phi_{дв}(\omega) \right|^2 S_p, \quad (26.20)$$

где S_p — искомая спектральная плотность пульсаций давления в камере сгорания.

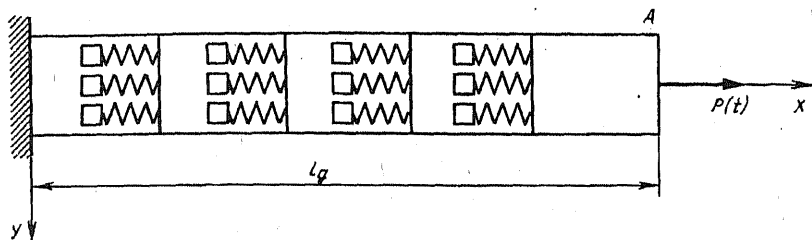


Рис. 26.9

Разрешая уравнение (26.20) относительно S_p , находим

$$S_p = \frac{S_{\ddot{u}_{дв}}}{\left| \Phi_{дв}(\omega) \right|^2}. \quad (26.21)$$

Зная теперь $S_p(\omega)$, можно прогнозировать вибрационное состояние ракеты в сборе. Действительно, спектральная плотность виброускорений S , вызванных пульсациями давления в камере РДТТ, определяется соотношением

$$S(\omega, x) = \left| \Phi_{дв}(\omega, x) \right|^2 S_p, \quad (26.22)$$

где $\left| \Phi_{дв}(\omega, x) \right|^2$ — квадрат модуля передаточной функции ракеты, имеющей в случае выбора модели вибрационного состояния ракеты в виде однородного стержня сложной структуры, нагруженного на одном краю силой $P(t)$ и со свободным другим краем, вид (26.3).

Подставляя в равенство (26.22) соотношение (26.21) и учитывая равенства (26.19), (26.3), получим окончательную формулу, позволяющую в принципе прогнозировать вибрации ракет в автономном полете, не имея никаких данных о параметрах внутрикамерных процессов, а ограничиваясь лишь информа-

цией о вибрациях корпуса двигателя, полученной в результате стендовых испытаний:

$$S_{\ddot{u}}(\omega) = \frac{ch \, 2\eta x + \cos 2\mu x}{ch \, 2\eta l - \cos 2\mu l} \cdot \frac{ch \, 2\eta l_{\text{дв}} + \cos 2\mu l_{\text{дв}}}{ch \, 2\eta x_1 - \cos 2\mu x_1} S_{\ddot{u}_{\text{дв}}}(\omega) \quad (26.23)$$

Рассмотрим числовой пример, иллюстрирующий применение полученных соотношений к задаче прогнозирования вибраций ракет. Из результатов стендовых испытаний РДТТ, имеющего длину $l_{\text{дв}} = 120$ см, среднюю продольную жесткость $C_{\text{ср}} = 1,2 \cdot 10^6$ кг, известна спектральная плотность пульсаций давления S_p , график которой приведен на рис. 26.10.

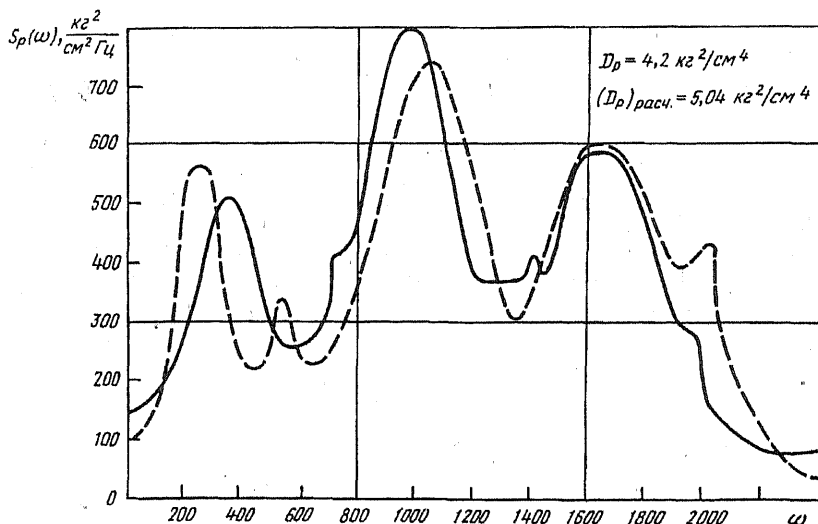


Рис. 26.10

Суммарная дисперсия процесса пульсаций давления имеет величину $D_p = 4,2 \text{ кг}^2/\text{см}^4$. В точке двигателя с координатой $x = 110$ см была получена запись вибраций корпуса, спектральная плотность которой представлена на рис. 26.11. Сум-

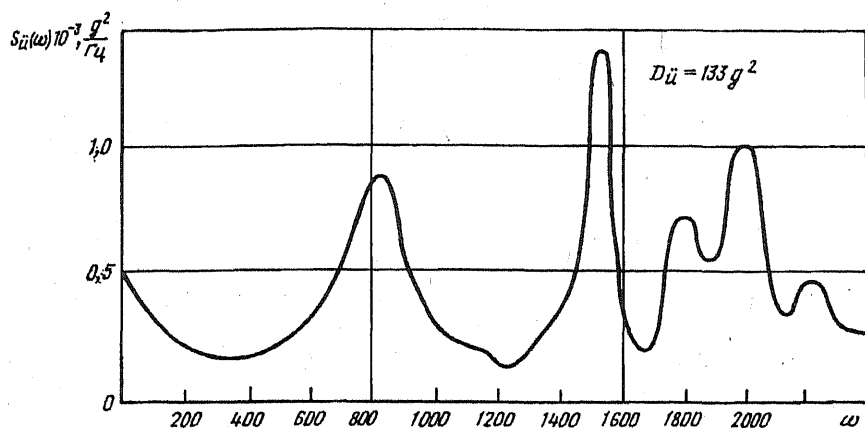


Рис. 26.11

марная дисперсия этого процесса равна $D_{\ddot{u}} = 133g^2$. Проводя вычисление по формуле (26.21), с учетом (26.19) найдем искомую функцию $[S_p(\omega)]_{\text{расч}}$, график которой изображен на рис. 26.10 пунктирной линией. Рассмотрение кривых на рис. 26.10 показывает, что несмотря на некоторое различие в характере поведения спектральных плотностей, найденных теоретическим и экспериментальным методами, суммарное значение дисперсии $(D_p)_{\text{расч}} = 5,04$ отличается от соответствующей экспериментально найденной величины не более, чем на 20%, что, учитывая сложность получения этих величин в эксперименте и необходимость их определения для прогнозирования вибраций, следует признать вполне удовлетворительным.

Таким образом, предлагаемая в данном параграфе методика позволяет в принципе заменить трудновыполнимую задачу экспериментального определения пульсаций внутрикамерных процессов, тривиальной задачей измерения вибраций корпуса двигателя и, следовательно, прогнозировать вибрационное состояние ракет в сборе.

**§ 26.3. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НЕОДНОРОДНОСТИ
МАССОВО-ЖЕСТКОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ И ПАРАМЕТРОВ
ДЕМПФИРОВАНИЯ НА ВИБРАЦИОННОЕ СОСТОЯНИЕ РАКЕТЫ**

В предыдущих параграфах этой главы были рассмотрены модели вибрационного состояния ракет в виде однородных стержней сложной структуры. Однако, как известно, реальные конструкции имеют переменные по длине массовые и жесткостные характеристики, вследствие чего учет неоднородных свойств ракеты в модели весьма желателен, поскольку он может вызвать изменение в картине распределения вибраций по длине ракеты по сравнению с использованием однородных моделей.

В работе [6] были получены некоторые соотношения, учитывающие слабую изменяемость по длине массовых и жесткостных характеристик. Эти соотношения после проведения усреднения по частотному диапазону, о чем подробно говорилось в § 26.1, приводятся к следующему виду:

$$\left| \Phi(\omega, x) \right|_{\text{ср}}^2 = \frac{\omega^2}{(Ma)_x (Ma)_l} \cdot \frac{ch 2 \omega \int_0^x \frac{\kappa}{a(x)} dx}{sh 2 \omega \int_0^l \frac{\kappa}{a(x)} dx}, \quad (26.24)$$

$$\sigma_{\ddot{u}} = \frac{\omega \sigma_p}{\sqrt{(Ma)_x (Ma)_l}} \cdot \sqrt{\frac{ch 2 \omega \int_0^x \frac{\kappa}{a(x)} dx}{sh 2 \omega \int_0^l \frac{\kappa}{a(x)} dx}}, \quad (26.25)$$

В случае, когда вибрация по длине ракеты изменяется существенно, эти формулы могут быть еще более упрощены [6]:

$$\left| \Phi(\omega, x) \right|_{\text{ср}}^2 = \frac{\omega^2}{(Ma)_x (Ma)_l} e^{2 \omega \int_0^x \frac{\kappa}{a(x)} dx}, \quad (26.26)$$

$$\sigma_{\ddot{u}} = \frac{\omega \sigma_p}{\sqrt{(Ma)_x (Ma)_l}} \frac{\omega^2}{(Ma)_x (Ma)_l} e^{\omega \int_0^x \frac{\kappa}{a(x)} dx}. \quad (26.27)$$

Практический интерес помимо этого представляет исследование сильной изменяемости жесткостных и массовых характеристик, а также параметров, определяющих затухание вибраций и учет влияния отдельных конструктивных особенностей, присущих некоторым типам ракет на вибрационное состояние конструкций.

Оценим вначале влияние переменности по длине ракеты параметра k , характеризующего затухание. В общем случае, параметр k зависит не только от частоты колебаний ω , но и от осевой координаты x , т.е. $k = k(\omega, x)$. Для нахождения функциональной зависимости этого параметра от координаты x , запишем выражения для квадрата модуля отношения виброускорения a в некоторой точке с координатой x к соответствующей величине виброускорений в фиксированной точке $x = x_1$. Это выражение согласно (26.24) можно записать следующим образом [10]:

$$\left| \frac{a(x, \omega)}{a(x_1, \omega)} \right|^2 = \frac{ch \frac{2l}{V} \omega \left[\frac{1}{l} \int_0^x k(\omega, x) dx \right]}{ch \frac{2l}{V} \omega \left[\frac{1}{l} \int_0^{x_1} k(\omega, x) dx \right]}. \quad (26.28)$$

Из соотношения (26.28) видно, что для нахождения искомой функциональной зависимости требуется решить нелинейное интегральное уравнение, что, вообще говоря, является вполне выполнимой задачей. Вместе с тем, поскольку нас интересует поведение функции $k = k(\omega, x)$ в высокочастотной области, можно обойтись без решения интегрального уравнения, используя то обстоятельство, что когда частота ω достаточно велика, выражение (26.28) можно переписать в виде

$$\left| \frac{a(x, \omega)}{a(x_1, \omega)} \right|^2 = e^{\frac{2l}{V} \omega \frac{1}{l} \int_{x_1}^x k(\omega, x) dx}. \quad (26.29)$$

Применив к обеим частям выражения (26.29) операцию логарифмирования по натуральному основанию, перепишем (26.29) в виде:

$$\ln \left| \frac{a(x, \omega)}{a(x_1, \omega)} \right|^2 = \frac{2l}{V} \omega \frac{1}{l} \int_{x_1}^x \kappa(\omega, x) dx. \quad (26.30)$$

Затем, дифференцируя обе части этого уравнения по x , получим соотношение, позволяющее определить искомую функциональную зависимость

$$\kappa(\omega, x) = \frac{V}{\omega a(x, \omega)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [a(x, \omega)]. \quad (26.31)$$

Соотношение (26.31) показывает, что если распределение амплитуд вибраций по длине подчиняется экспоненциальному закону, т.е. $a \sim e^{-kx}$, то функция κ не зависит от координаты x . Анализ экспериментальных данных показывает, что на высоких частотах распределение виброускорений по длине ракеты носит характер, близкий к экспоненциальному, хотя имеют место флуктуации значений виброускорений, относительно этого распределения. Тогда очевидно, что более близкий к реальности аппроксимаций будет зависимость вида $a \sim e^{-kx} e^{b \cos \alpha x}$, которая согласно (26.31) дает для параметра κ следующую зависимость:

$$\kappa(\omega, x) \sim c(1 - b \alpha \sin \alpha x). \quad (26.31a)$$

Поскольку произведение $b \alpha$, характеризующее отклонение в распределении виброускорений от экспериментального, мало, легко заметить, что и отклонение функции κ относительно среднего значения невелико. Таким образом, по крайней мере, на высоких частотах учет переменности параметра затухания вдоль осевой координаты x несущественно скажется на конечных результатах и вместе с тем вызовет неоправданное усложнение математических выкладок.

Проследим теперь, какие уточнения выбранных одномерных моделей можно получить, если учесть то обстоятельство, что для целого ряда авиационных ракет характерно наличие достаточно длинного двигателя твердого топлива. Из табл. 26.1 видно, что для девяти рассмотренных нами типов ракет, отношение длины двигателя l_1 к общей длине ракеты l составляет примерно 0,25 — 0,6 и это обстоятельство, по-видимому, следует учитывать при составлении расчетной схемы, которая в этом случае,

примет вид, изображенный на рис. 26.12. В этой расчетной схеме фигурируют уже две силы, одна из которых q_1 представляет собой суммарный результат действия давления в камере сгорания на заднюю стенку камеры и газов, протекающих через сопло, а другая q_2 — является равнодействующей сил давления в камере на переднее днище.

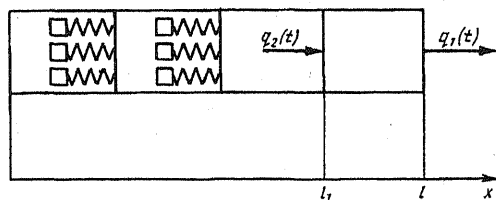


Рис. 26.12

Соответствующие формулы для однородного стержня сложной структуры без учета корреляции между силами q_1 и q_2 имеют следующий вид:

$$K_{ij}(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \left[\left| \Phi_1(\omega, x) \right|^2 S_1(\omega) + \left| \Phi_2(\omega, x) \right|^2 S_2(\omega) \right] d\omega, \quad (26.32)$$

где $\left| \Phi_1(\omega, x) \right|^2$ определяется формулой (26.3), а $\left| \Phi_2(\omega, x) \right|^2$ определяется как:

$$\left| \Phi_2(\omega, x) \right|^2 = \begin{cases} \frac{\omega^2 \operatorname{ch} 2\omega \frac{\kappa x}{a} \operatorname{ch} 2\omega \frac{\kappa}{a} (l - l_1)}{(Ma)^2 2 \operatorname{sh} 2\omega \frac{\kappa l}{a}} & 0 \leq x \leq l_1, \\ \frac{\omega^2 \operatorname{ch} 2\omega \frac{\kappa l_1}{a} \operatorname{ch} 2\omega \frac{\kappa}{a} (l - x)}{(Ma)^2 2 \operatorname{sh} 2\omega \frac{\kappa l}{a}} & l_1 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (26.33)$$

Вместе с тем, поскольку в нашем распоряжении не имеется никаких данных об отсутствии или наличии корреляции между нагрузками q_1 и q_2 , выпишем общие соотношения для нахождения статистических характеристик полей вибраций, полагая при этом, что известна взаимная спектральная плотность нагрузки $S_{12}(\omega)$, характеризующая корреляцию между силами q_1 и q_2 .

Корреляционная функция виброускорений в этом случае запишется в виде [10]:

$$K_{\ddot{u}}(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \left[\left| \Phi_1(x) \right|^2 S_1(\omega) + \left| \Phi_2(x) \right|^2 S_2(\omega) - \right. \\ \left. - \left(\Phi_1(x) \Phi_2(x) S_{12}(\omega) + \Phi_1^*(x) \Phi_2(x) S_{21}(\omega) \right) \right] e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (26.34)$$

где * — означает знак комплексного сопряжения, а величины Φ_1 и Φ_2 определяются формулами (26.3), (26.33).

Когда силы q_1 и q_2 не коррелированы между собой, $S_{21} = 0$ и соотношение (26.34) совпадает с (26.32). Когда имеется жесткая корреляция между отдельными составляющими нагрузки можно принять, что $q_2 = \Lambda q_1$ где Λ — некоторый коэффициент.

Тогда очевидно: $S_2(\omega) = \Lambda^2 S_1$. В следующем параграфе на примере более общей задачи стержня сложной структуры с сильно изменяющимися по длине массовыми и жесткостными параметрами будет подробно исследовано влияние степени коррелированности нагрузок на вибрационное состояние конструкции.

§ 26.4. РАСЧЕТ ВИБРАЦИЙ РАКЕТЫ С БОЛЬШОЙ СТЕПЕНЬЮ НЕОДНОРОДНОСТИ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим теперь наиболее общий случай одномерной задачи, когда массовые и жесткостные характеристики стержня сложной структуры, служащего для описания вибрационного состояния, существенно меняются по длине. Кроме того, одновременно будем учитывать наличие двух коррелированных меж-

ду собой случайных нагрузок q_1 и q_2 , физический смысл введения которых был объяснен в предыдущем параграфе (см. также рис. 26.13).

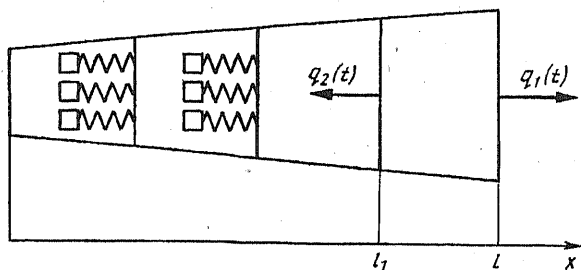


Рис. 26.13

Уравнения колебаний стержня сложной структуры переменного сечения могут быть записаны в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[c \left(x, \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \int_0^\infty M_\alpha (\ddot{v}_\alpha + \ddot{u}) d\alpha - \\ & - q_2(t) \delta(x - l_1) = 0; \\ & \ddot{v}_\alpha + 2\beta_\alpha \dot{v}_\alpha + \alpha^2 v_\alpha = - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned} \right. \quad (26.35)$$

Граничные условия для стержня, изображенного на рис. 26.13, ставятся следующим образом:

$$v_\alpha(0) = 0, \quad \dot{v}_\alpha(0) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = 0,$$

$$c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x=0, \quad (26.36)$$

$$c \frac{\partial u}{\partial x} = q_1(t) \quad x=l.$$

В уравнениях (26.35), (26.36) все обозначения совпадают с обозначениями, введенными в § 26.1, а $\delta(x - l_1)$ представляет

собой дельта-функцию Дирака. Продольная жесткость стержня $C(x)$ в рассматриваемом случае может быть записана в виде

$$C(x) = EF(x) \left[1 + R \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] = xE \left[1 + R \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \frac{r_1^2}{l^2} x^2,$$

где r_1 — радиус основания стержня при $x = l$; погонная масса стержня $m(x) = \frac{3G}{gl^2} x^2$, где G — вес стержня (ракеты).

Если нагрузка представима в виде интеграла Фурье

$$q_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} V_j(\omega) d\omega \quad (j = 1, 2), \quad (26.37)$$

то и решение поставленной задачи будем искать в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} u(x, \omega) d\omega; \quad (26.38)$$

$$V_\alpha(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} v_\alpha(\omega, x) d\omega. \quad (26.39)$$

Подставляя (26.37), (26.38) и (26.39) в исходные уравнения задачи (26.35), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[c(x) \frac{du}{dx} \right] + M(x) \omega^2 u + \omega^2 \int_0^\infty M_\alpha (v_\alpha + u) d\alpha = \\ = V_2 \delta(x - l_1), \\ \left(-\omega^2 + 2i\omega\beta_\alpha + \alpha^2 \right) v_\alpha = \omega^2 u. \end{cases} \quad (26.40)$$

Из второго уравнения системы (26.40) можно выразить v_α через u :

$$v_\alpha = \frac{\omega^2}{\alpha^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta_\alpha} u$$

и представить интегральный член в первом уравнении (26.40) в виде

$$\int_0^{\infty} M_{\alpha} (v_{\alpha} + u) d\alpha = \int_0^{\infty} \frac{M_{\alpha} (\alpha^2 + 2i\omega\beta_{\alpha})}{\alpha^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta_{\alpha}} u d\alpha.$$

Если теперь воспользоваться аппроксимацией

$$m(\omega) = \frac{2Eh}{V^2} (1 - i\kappa)^2,$$

то интегральный член можно записать в виде

$$\begin{aligned} m(x)u + u \int_0^{\infty} M_{\alpha} \frac{\alpha^2 + 2i\omega\beta_{\alpha}}{\alpha^2 - \omega^2 + 2i\omega\beta_{\alpha}} d\alpha = \\ = m_0(x) [1 - i\kappa(\omega)]^2 u, \end{aligned} \quad (26.41)$$

где $m_0(x)$ — погонная масса стержня, которую в дальнейшем будем обозначать просто $M(x)$;

$$\kappa(\omega) = \kappa_0 \operatorname{sign} \omega; \quad \kappa_0 \approx 0,35.$$

Вводя обозначения

$$C(x) = \gamma x^2, \quad M(x) = \phi \omega^2, \quad (26.42)$$

перепишем первое уравнение системы (26.40) с учетом (26.41) и (26.42) в следующем виде:

$$u'' + \frac{2}{x} u' + b^2 u = \frac{V_2 \delta(x - l_1)}{\gamma x^2}, \quad (26.43)$$

где

$$b^2 = \frac{\phi \omega^2}{\gamma} [1 - i\kappa(\omega)]^2 = \frac{3G \omega^2 [1 - \kappa(\omega)]^2}{ql \pi E \left[1 + R \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] r_1^2}.$$

Решение однородного уравнения (26.43) записывается в виде [4]:

$$u = \frac{A}{x} \cos bx + \frac{B}{x} \sin bx, \quad (26.44)$$

а общее решение уравнения (26.43) может быть записано следующим образом [4]:

$$u = \varphi_1 \int_0^x \frac{\varphi_1 h}{W} dx - \varphi_2 \int_0^x \frac{\varphi_2 h}{W} dx + \frac{A}{x} \cos bx + \frac{B}{x} \sin bx. \quad (26.45)$$

В выражении (26.45) через W обозначен определитель Вронского, равный

$$W = \varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1', \quad \varphi_1 = \frac{\cos bx}{x}, \quad \varphi_2 = \frac{\sin bx}{x},$$

$$h = \frac{V_2 \delta(x - l_1)}{\gamma x^2}, \quad \varphi_1' = \frac{\cos bx}{x^2} - \frac{b \sin bx}{x},$$

$$\varphi_2' = -\frac{\sin bx}{x^2} + \frac{b \cos bx}{x}, \quad W = \frac{b}{x^2}.$$

Подставляя эти значения в (26.45) и производя некоторые элементарные преобразования, получим общее решение уравнения (26.43) в следующем виде:

$$u = \begin{cases} \frac{A}{x} \cos bx + \frac{B}{x} \sin bx, & x = l_1; \\ \frac{\sin b(x - l_1)}{xb \gamma l_1} V_1 + \frac{A}{x} \cos bx + \frac{B}{x} \sin bx, & x > l_1. \end{cases} \quad (26.46)$$

Константы интегрирования A и B найдем из граничных условий (26.36). Условие $Cu' = 0$ при $x = 0$ дает значение $A = 0$, а условие $Cu'(l) = V_1$ дает следующее выражение для B :

$$B = \frac{V_1}{\gamma(b l \cos bl - \sin bl)} - \frac{bl \cos b(l - l_1) - \sin b(l - l_1)}{\gamma b l_1(b l \cos bl - \sin bl)} V_2.$$

Собирая подобные члены при V_2 в выражении (26.46), получаем окончательное выражение для искомой функции поля перемещений:

$$u = \begin{cases} \frac{\sin b x V_1}{x \gamma (b l \cos b l - \sin b l)} - \\ - \frac{b l \cos b (l - l_1) - \sin b (l - l_1)}{\gamma b l_1 x (b l \cos b l - \sin b l)} \sin b x V_2, & x < l_1; \\ \frac{\sin b x V_1}{x \gamma (b l \cos b l - \sin b l)} - \\ - \frac{b l \cos b (l - x) - \sin b (l - x)}{x \gamma b l_1 (b l \cos b l - \sin b l)} \sin b l_1 V_2, & x > l_1. \end{cases} \quad (26.47)$$

Из формулы (26.38) можно легко получить выражение для поля ускорений:

$$\ddot{u}(x, t) = - \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \omega t} u(x, \omega) d \omega, \quad (26.48)$$

где функция $u(x, \omega)$ определяется формулами (26.47).

Практический интерес представляет исследование влияния корреляции внешних нагрузок $q_1(t)$ и $q_2(t)$ на статистические характеристики виброускорений точек ракеты, например, дисперсию

$$D = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \left[|B_1|^2 S_1(\omega) + |B_2|^2 S_2(\omega) - \right. \\ \left. - (B_1 B_2^* + B_1^* B_2) S_{12}(\omega) \right] d \omega, & x < l_1; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \left[|B_1|^2 S_1(\omega) + |B_3|^2 S_2(\omega) - \right. \\ \left. - (B_1 B_3^* + B_1^* B_3) S_{12}(\omega) \right] d \omega, & x > l_1. \end{cases} \quad (26.49)$$

При этом будем рассматривать следующие виды взаимосвязи между нагрузками:

а) силы q_1 и q_2 не коррелированы между собой, т.е. $S_{12} = 0$;

б) имеется жесткая корреляция между q_1 и q_2 , т.е. $S_{12} = \Lambda^2 S_1$ и $S_2 = \Lambda S_1$.

Кроме того, можно рассмотреть случай, когда задан какой-либо определенный вид взаимной корреляционной функции или взаимной спектральной плотности. На рис. 26.14 представлены результаты расчетов дисперсии виброускорений гипотетической ракеты. Верхняя и нижняя кривые 1 и 3 соответствуют случаям, когда корреляция между нагрузками отсутствует. При этом кривая 1 соответствует случаю, когда спектральная плотность силы q_2 имеет значение $S_2 = 1$, а спектральная плотность силы q_1 равна $S_1 = 0,5$. Кривая 3 соответствует значениям $S_1 = 1$ и $S_2 = 0,5$. Кривые 2 и 4 показывают изменение дисперсии виб-

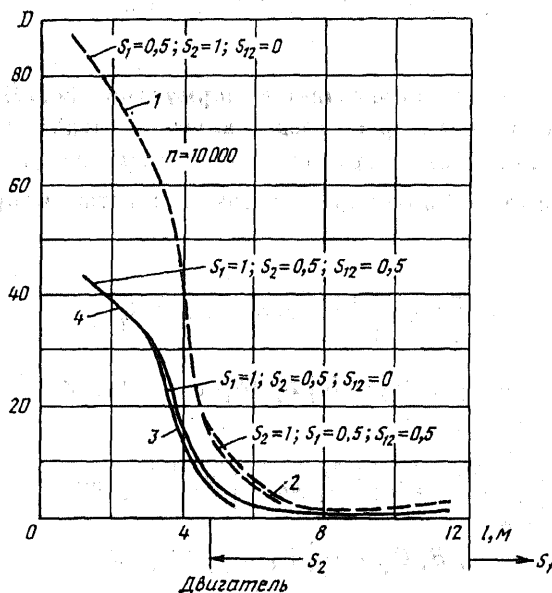


Рис. 26.14

роускорений по длине ракеты в случае, когда коэффициент корреляции между силами q_1 и q_2 равен 0,5.

Кривая 2 соответствует случаю $S_2 = 1$, $S_1 = 0,5$, а кривая 4 — $S_1 = 1$, $S_2 = 0,5$.

При вычислении интегралов, входящих в выражение для дисперсии виброускорений, число точек разбиения интервала интегрирования варьировалось от 1000 до 15000. Как показали вычисления, увеличение точек разбиения свыше 6000 практически не сказывалось на конечных результатах. При этом затраты машинного времени, необходимые для получения одной кривой, находились в пределах 3÷4 мин. Анализ кривых, приведенных на рис. 26.14, показывает, что учет корреляционных зависимостей между силами возбуждения сказывается на величинах виброускорений лишь в зоне, непосредственно примыкающей к двигателю, в то время как в носовой части ракеты, где обычно устанавливается бортовая аппаратура, этот учет практически не влияет на результаты вычислений.

ЛИТЕРАТУРА К ТРЕТЬЕМУ РАЗДЕЛУ

1. Авиационная акустика / Под ред. А.Г. Мунина и В.Е. Квитки. — М.: Машиностроение, 1973.
2. Белоус А.А. Амортизация шасси с рычажной подвеской колеса // Труды ЦАГИ, 1949. № 678.
3. Болотин В.В. Об упругих колебаниях, возбуждаемых случайными силами с широким спектром. // Изв. вузов «Машиностроение». 1963. № 4. Случайные колебания упругих тел. — М.: Наука, 1979.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
5. Лямшев Л.М. Излучение звука упругими оболочками, возбужденными турбулентным аэродинамическим потоком. Акустический журнал. 1961. т. 7, № 1.
6. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. — М.: Наука, 1976.
7. Плахов Д.Д. Корреляционные соотношения в звуковом поле бесконечной пластины при воздействии случайной флуктуации давления. Акустический журнал. 1968. № 3.
8. Пугачев В.С. Теория случайных функций и их применение к задачам автоматического управления. — М.: Физматгиз, 1960.
9. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. — Л.: Судпромгиз, 1961.
10. Станкевич А.И. Колебания стержней сложной структуры с переменными по длине свойствами // Изв. вузов, сер. «Машиностроение». № 17. 1979.
11. Таскин А.А. Баллистика. — М.: Воениздат, 1971.
12. Тейлор Дж. Нагрузки, действующие на самолет. — М.: Машиностроение, 1971.

13. *Тодиско А., Паллонс А.* Экспериментальные исследования поля течения в ближней части следа// Ракетная техника и космонавтика. 1965. № 11.

14. *Фотио Дж., Робертс У., Уайн Дж.* Вибрационные характеристики гиперзвуковой противоракеты. // «Новости зарубежной науки и техники», № 22 (331), Институт теоретической кибернетики, 1969.

15. *Чернецкий В.И.* Анализ точности нелинейных систем управления. — М.: Наука, 1972.

16. *Шапиро Я.М.* Пороховые реактивные снаряды. Ч. 1, Артиллерийская Академия им. Дзержинского, М., 1951.

17. *Пупырев В.А.* Случайные колебания оболочки с акустической средой, Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук, Л., 1969, ЛПИ им. М.Калинина.

18. *Franken F.A., Kervin E.M.* Method of Flight Venchle Noise Preditstion, WA TR, 1958.

19. *Hubbord M.H., Maglieri G.J.* Noise control. 1961. V. 8.

20. *Bingman K.N.*, SAE, Preprint, 1960, No. 3, 16413.

21. *Фотио Дж., Робертс У., Уайн Дж.* Вибрационные характеристики гиперзвуковой противоракеты // Новости зарубежной науки и техники, (331), ИТР, 1969.

22. *Crandall P.* Vibration of a continium exsitet by random motions of a continuous fundation. Rev. Roum. Sinsle Tech. — Mech. Appl. Vol. 15, No. pp. 25 — 34.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Условные обозначения	4
Раздел первый. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАКЕТЫ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОДСИСТЕМ И ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОБЛИКА РАКЕТ	6
<i>Глава 1. Ракета класса «воздух — воздух» как элемент авиационного боевого комплекса</i>	<i>6</i>
§ 1.1. Боевые характеристики АБК	6
§ 1.2. Кинематические методы исследования сближения и атаки воздушной цели	8
§ 1.3. Методы оценки эффективности истребителя в воздушном бою	18
<i>Глава 2. Аэродинамика ракеты</i>	<i>25</i>
§ 2.1. Аэродинамические характеристики ракет и вопросы выбора параметров компоновки	25
§ 2.2. Классификация аэродинамических схем и способов создания управляющих сил	32
§ 2.3. Модель аэродинамических сил и моментов осесимметричной ракеты на больших углах атаки	38
<i>Глава 3. Баллистика ракеты</i>	<i>53</i>
§ 3.1. Энерговооруженность и баллистический коэф- фициент как основные параметры, определяющие баллистический облик	53
§ 3.2. Баллистика ракеты на навесных траекториях	72
§ 3.3. Баллистическое проектирование	78
<i>Глава 4. Кинематика относительного движения ракеты и цели</i>	<i>90</i>
§ 4.1. Траектории ракеты в абсолютной СК. Зоны достижимости	90
§ 4.2. Относительная СК, связанная с целью. Зоны возможных пусков	94
§ 4.3. Относительная СК, связанная с носителем. Зоны отлетов. Всенаправленная зона возможных пусков	98
<i>Глава 5. Общая структура систем управления ракетой</i>	<i>103</i>
§ 5.1. Функции систем управления современных ракет и основы системного подхода к их рассмотрению	103
§ 5.2. Основные подсистемы СУ ракеты	105
§ 5.3. Иерархическая система моделей СУ	110

<i>Глава 6. Модель ракеты как объекта управления . . .</i>	<i>112</i>
§ 6.1. Реакция ракеты на отклонение органов управления в плоском движении	112
§ 6.2. Постановка задачи исследования пространственной устойчивости движения ракеты	119
§ 6.3. Динамические характеристики ракеты с двумя парами органов управления	131
<i>Глава 7. Расширенный объект</i>	<i>135</i>
§ 7.1. Математическая модель рулевого привода и ее анализ	135
§ 7.2. Анализ характеристического уравнения следящего рулевого привода на основе диаграммы Вышнеградского	141
§ 7.3. Анализ устойчивости контуров демпфирования ракеты с учетом передаточной функции привода	143
§ 7.4. Расширенный объект с приводом, замкнутым по шарнирному моменту	146
<i>Глава 8. Модель контура стабилизации</i>	<i>149</i>
§ 8.1. Стабилизирующие связи и структура КС	149
§ 8.2. Теория идеализированного КС	152
§ 8.3. Основные свойства астатических КС	157
§ 8.4. Аппаратурные методы повышения устойчивости балансировки в пространственном движении	159
<i>Глава 9. Примеры решения задачи анализа пространственной устойчивости в различных постановках</i>	<i>162</i>
§ 9.1. Линейная зависимость аэродинамических сил и моментов от углов атаки и отклонения рулей	162
§ 9.2. Приближенная оценка граничных по условиям устойчивости значений угла атаки, основанная на использовании достаточных условий устойчивости	167
§ 9.3. Оценка влияния конструктивно-технологических искажений симметрии компоновки на границы области устойчивости	169
§ 9.4. Устойчивость балансировочных режимов ракеты в составе контура стабилизации	175
<i>Глава 10. Модель автономного контура</i>	<i>184</i>
§ 10.1. Ошибки обтекателя и их проявления при колебаниях ракеты. Структура АК	184
§ 10.2. Передаточная функция, частотные характеристики и устойчивость АК	187
§ 10.3. Пути снижения влияния ПОС. Инвариантный АК	191
<i>Глава 11. Модель контура наведения</i>	<i>198</i>

§ 11.1. Уравнение кинематической связи ракеты с целью	198
§ 11.2. Точность наведения ракеты на цель. Систематическая и случайная составляющие пролета. Выбор оптимального значения навигационной постоянной	201
§ 11.3. Влияние инерционности контура наведения на характеристики точности	206
<i>Глава 12. Модель контура наведения ракеты с БЦВМ</i>	<i>210</i>
§ 12.1. Общая структура СУ ракет четвертого поколения	210
§ 12.2. Дальность действия современных радиолокационных головок самонаведения	213
§ 12.3. Математические основы алгоритмов управления	215
§ 12.4. Математические основы алгоритмов фильтрации	225
<i>Глава 13. Общая постановка и математическая формулировка задачи проектирования облика ракеты</i>	<i>232</i>
§ 13.1. Роль этапа формирования облика ракеты в процессе проектирования	232
§ 13.2. Облик как совокупность концепции, параметров и управлений	235
§ 13.3. Математическая формулировка задачи проектирования облика как задачи оптимизации	237
<i>Глава 14. Методы учета системы управления на этапе формирования облика ракеты</i>	<i>243</i>
§ 14.1. Связь системы управления с параметрами облика ракеты	243
§ 14.2. Структура пространства технических решений и связи между его элементами	244
§ 14.3. Понятие о достижимой точности наведения и обобщенных характеристиках системы управления	254
§ 14.4. Общая структурная схема учета системы управления при формировании облика ракеты	258
<i>Глава 15. Автоматизированная система формирования облика ракеты</i>	<i>262</i>
§ 15.1. Общая структура и принципы построения системы	262
§ 15.2. Подсистемы анализа ТТЗ и выбора технической концепции	266
§ 15.3. Подсистема компоновки корпуса	269

§ 15.4. Другие подсистемы, участвующие в цикле параметрических расчетов	274
Литература к первому разделу	283
Раздел второй. СТРУКТУРА, КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ АВИАЦИОННЫХ КАТАПУЛЬТНЫХ УСТАНОВОК	286
Глава 16. Структура рычажных механизмов авиационных катапультированных установок	286
§ 16.1. Основные понятия и определения теории механизмов	286
§ 16.2. Классификация кинематических пар, кинематических цепей и механизмов	289
§ 16.3. Число степеней свободы механизма. Механизмы с избыточными связями	296
§ 16.4. Принцип Ассура структурного строения и образования рычажных механизмов	303
§ 16.5. Структурный анализ и структурный синтез плоских рычажных механизмов	314
§ 16.6. Обзор схем плоских рычажных механизмов, применяемых в АКУ	319
§ 16.7. Классификация рычажных механизмов, применяемых в АКУ	325
§ 16.8. Синтез структурных схем шестизвенных плоских рычажных механизмов для АКУ	330
Глава 17. Кинематический анализ рычажных механизмов АКУ	337
§ 17.1. Кинематическая схема механизма и ее параметры	337
§ 17.2. Функция положения механизма. Передаточные функции	339
§ 17.3. Сборки рычажных механизмов	342
§ 17.4. Критерии качества передачи движения для плоских рычажных механизмов	353
§ 17.5. Задачи кинематического анализа рычажных механизмов	360
§ 17.6. Погруппный способ анализа рычажных механизмов	362
§ 17.7. Анализ механизмов методом проецирования замкнутых векторных контуров на оси координат	366
§ 17.8. Анализ двухзвенных структурных групп	371
§ 17.9. Анализ четырехзвенных структурных групп	381
§ 17.10. Анализ плоских механизмов, содержащих двухзвенные структурные группы	388

§ 17.11. Алгоритмы анализа рычажных механизмов АКУ	393
§ 17.12. Расчет критерия передачи для рычажных механизмов АКУ	411
§ 17.13. Численные результаты анализа механизмов АКУ	433
Глава 18. Кинематический синтез рычажных механизмов АКУ	445
§ 18.1. Основные и дополнительные условия синтеза плоских рычажных механизмов	445
§ 18.2. Постановка задачи синтеза рычажных механизмов АКУ	449
§ 18.3. Аналитико-оптимизационный метод синтеза рычажных механизмов АКУ	452
§ 18.4. Синтез механизма типа «ножницы» (схема № 2)	465
§ 18.5. Синтез шестизвенного механизма с качающимся цилиндром (схема № 7)	472
§ 18.6. Синтез восьмизвенного механизма с качающимся цилиндром (схема №10)	478
Глава 19. Элементы автоматизированного проектирования рычажных механизмов	489
§ 19.1. Предварительные замечания	489
§ 19.2. Общее строение компьютерной системы структурного и кинематического анализа и синтеза рычажных механизмов	490
§ 19.3. Автоматизация структурного анализа рычажных механизмов	494
§ 19.4. Идентификация структурных схем рычажных механизмов	496
§ 19.5. Автоматизация структурного синтеза рычажных механизмов	498
§ 19.6. Автоматизация кинематического анализа рычажных механизмов	500
§ 19.7. Автоматизация кинематического синтеза рычажных механизмов	503
§ 19.8. Компьютерные альбомы рычажных механизмов	504
Глава 20. Система динамического анализа механизмов АКУ	505
§ 20.1. Постановка задачи динамического проектирования механизмов АКУ	505

§ 20.2. Динамические и математические модели упругого рычажного механизма АКУ, упругого отделяемого изделия и упругого крыла самолета-носителя . .	507
Глава 21. Система оптимизационного динамического синтеза механизмов АКУ	614
§ 21.1. Исследование области состояний сложной динамической системы АКУ	617
§ 21.2. Оптимизационный динамический синтез механизмов АКУ	624
Глава 22. Система динамического синтеза механизмов АКУ с учетом действия детерминистских сил и случайных возмущений	655
§ 22.1. Постановка задачи	655
§ 22.2. Алгоритм динамического синтеза механизмов АКУ с учетом действия детерминистских сил и случайных возмущений	665
§ 22.3. Пример численного исследования	670
Глава 23. Пути совершенствования перспективных АКУ на основе использования адаптивных схем управления . .	679
§ 23.1. Анализ предельных возможностей АКУ с фиксированной настройкой параметров и обоснование необходимости перехода в перспективе к адаптивным схемам	679
§ 23.2. Математический аппарат синтеза адаптивных алгоритмов методами обратных задач динамики .	684
§ 23.3. Основные направления и этапы развития АКУ с адаптивными схемами управления по разомкнутому и замкнутому циклам	697
Литература ко второму разделу	699
Раздел третий. ВИБРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАКЕТ КЛАССА «ВОЗДУХ—ВОЗДУХ»	702
Глава 24. Внешние нагрузки, действующие на ракету класса «воздух — воздух» на типовых этапах эксплуатации	702
§ 24.1. Математическое представление нагрузок для совместного движения ракеты с носителем	702
§ 24.2. Нагрузки, действующие на ракету при старте и в автономном полете	711
Глава 25. Методы определения вибраций ракет класса «воздух — воздух» на типовых этапах эксплуатации совместно с самолетом-носителем	737

§ 25.1. Вибрации авиационных ракет в условиях взлета-посадки самолета	737
§ 25.2. Вибрации авиационных ракет в условиях совместного движения с носителем	745
Глава 26. Методы определения вибраций ракет класса «воздух — воздух» в автономном полете	750
§ 26.1. Вибрационное состояние ракет с однородными по длине свойствами	750
§ 26.2. О связи пульсаций давления в камере работающего двигателя с величиной вибрации корпуса двигателя	757
§ 26.3. Анализ влияния неоднородности массово-жесткостных параметров и параметров демпфирования на вибрационное состояние ракеты	762
§ 26.4. Расчет вибраций ракеты с большой степенью неоднородности параметров	766
Литература к третьему разделу	774

THE DESIGN BASIS OF THE AIR-TO-AIR MISSILES AND AIRCRAFT CATAPULT DEVICES FOR THEM

Under the general editorship of Professor,
Doctor of technical sciences V.A. Nesterov

It is recommending by the Ministry of general and professional
education of the Russian Federation in the capacity of a
textbook for the students of institutes of higher education by
speciality «Aircraft building and rocket production»

Moscow
MAI PUBLISHERS
1999

PREFACE

In this textbook the design basis of the air-to-air missiles and aircraft catapult devices for them are considering. The book consists of three sections.

In the first section the basic missile characteristics and their appreciation from the positions of effectiveness of the aircraft combat complex (ACC), mathematical models missile's subsystems and the design basis of the missile appearance, including automatic designing, are adducing.

In writing this section, the main emphasis laid on expounding of basic ideas, formation principles and fundamental technical decisions. Subjectmatter of this section represents the experience of authors, that was stored by more than forty-years period their work by air-to-air missiles creating.

In the second section the structure, kinematics and dynamics (analysis and synthesis) for levered mechanisms of aircraft catapult devices (ACD) are adducing. Materials of this section represents modern achievements of the theory of mechanisms and dynamics of machines, orients at effective computer using and illustrates by great numbers of designing of ACD with improveable kinematic, dynamic and functional characteristics and minimum mass.

In the second section the perfection ways of the perspective aircraft catapult devices on the base of using of the adaptive control circuits are considering.

In the third section the methods of determination of vibrodynamic characteristics of the air-to-air missiles at the joint flight with the aircraft-carrier and at the autonomous flight are considering.

It is nessesary to note, that because of variety physical and mathematical models, the different variables may have the same symbols, but the necessary explanations always gives in the text.

Chapters 1-15 and chapter 23 were written jointly by A.L.Reidel and G.A.Sokolovsky, chapters 20-22-by V.A.Nesterov, chapters 16-18 were written jointly by V.A.Nesterov and E.E.Peisah, chapter 19-by E.E.Peisah, chapters 24-26-by A.I.Stankevich.

CONTENTS

Preface	3
Conditional abbreviation	4
The first section. THE BASIC MISSILE CHARACTERISTICS. MATHEMATICAL MODELS OF THE SUBSYSTEMS AND THE DESIGN BASIS OF THE MISSILE APPEARANCE. . . .	6
<i>Chapter 1. Air-to-air missile as an element of the aircraft combat complex</i>	<i>6</i>
§ 1.1. Combat characteristics of the aircraft combat complex	6
§ 1.2. Kinematic methods of the investigation of closing in and attack of the air target	8
§ 1.3. Appreciation methods of the fighter effectiveness at an air combat	18
<i>Chapter 2. Missile aerodynamics.</i>	<i>25</i>
§ 2.1. Missile aerodynamic characteristics and the select problems of the arrangement parameters	25
§ 2.2. Classification of the aerodynamic schemes and creating control forces methods	32
§ 2.3. Model of the aerodynamic forces and moments of the axially symmetric missile at the large attack angles	38
<i>Chapter 3. The missile ballistics.</i>	<i>53</i>
§ 3.1. Power to weight ratio and ballistic coefficient as basic parameters, defining the ballistik appearance . .	53
§ 3.2. Missile ballistics at the hovered trajectories . .	72
§ 3.3. Ballistic designing	78
<i>Chapter 4. The kinematics of the relative movement of missile and target</i>	<i>90</i>
§ 4.1. Missile trajectory at an absolute co-ordinate system. Achievable zones	90
§ 4.2. The relative co-ordinate, connected with the target. Possible launch zones	94

§ 4.3. The relative co-ordinate, connected with the carrier. Take-off zones. All-directional zone of the possible launches	98
<i>Chapter 5. General structure of the missile control systems</i>	<i>103</i>
§ 5.1. Functions of the modern missile control systems and foundations of the systematic approach for their consideration	103
§ 5.2. Fundamental subsystems of missile control system	105
§ 5.3. Hierarchical system of control system models . .	110
<i>Chapter 6. Missile model as an control object</i>	<i>112</i>
§ 6.1. Missile reaction on the deflection of the control units at the plane movement	112
§ 6.2. Statement of a question about spatial stability of the missile movement	119
§ 6.3. Dynamic characteristics of missile with two control units	131
<i>Chapter 7. Expanded object</i>	<i>135</i>
§ 7.1. Fin actuator mathematical model	135
§ 7.2. Characteristical equation analysis of the fin actuator on the basis of the Vishnegradsky diagram	141
§ 7.3. Analysis of the stability of the missile damping loops with taking into account of the actuator transfer function	143
§ 7.4. Expanded object with an actuator, closed for the hinge moment	146
<i>Chapter 8. Stabilization loop model</i>	<i>149</i>
§ 8.1. Stabilized connections and stabilization loop structure	149
§ 8.2. Idealistic stabilization loop theory	152
§ 8.3. Basic properties of astatic stabilization loops .	157
§ 8.4. Apparatus methods of increasing of balance stability at the spatial movement	159
<i>Chapter 9. Task decision examples of the spatial stability analysis in the various statements . .</i>	<i>162</i>
§ 9.1. Aerodynamical forces and moments relatively transverse axes depended linear from the attack angles and fins deflection	162

§ 9.2. Approximate appreciation of the attack angle meanings, bordered for the stability conditions, based on using of the sufficient stability conditions	167
§ 9.3. Appreciation of the influence of the constructive-technological distortions of the arrangement symmetry on the stability region borders	169
§ 9.4. Stability of the missile balanced conditions at the stabilization loop structure	175
<i>Chapter 10. Autonomous loop model</i>	<i>184</i>
§ 10.1. Radome mistakes and their appearance at the missile vibrations. Autonomous loop structure	184
§ 10.2. Transfer function, frequency characteristics and autonomous loop stability	187
§ 10.3. Decreasing ways of the influence of the stray feedbacks. Invariant autonomous loop	191
<i>Chapter 11. Aiming loop model</i>	<i>198</i>
§ 11.1. Kinematic connection equation of the missile with the target	198
§ 11.2. Accuracy of the missile aiming on the target. Systematic and accidental components of the flight. Selection of the optimal meaning of the navigation constant	201
§ 11.3. Influence of the aiming loop inertness on the accuracy characteristics	206
<i>Chapter 12. Aiming loop model of the missile with on board computer</i>	<i>210</i>
§ 12.1. General structure of the control system of the fourth generation missiles	210
§ 12.2. Range of the modern radar seekers	213
§ 12.3. Mathematical base of the control algorithms	215
§ 12.4. Mathematical base of the filtration algorithms	225
<i>Chapter 13. General statement and mathematical formulation of the designing task of the missile appearance</i>	<i>232</i>
§ 13.1. Role of the formation stage of the missile appearance in the designing process	232
§ 13.2. Appearance as a complex of conception, parameters and controls	235

§ 13.3. Mathematical formulation of the task of the appearance design as an optimization problem	237
<i>Chapter 14. Methods of the control systems taking into account on the appearance formation stage</i>	<i>243</i>
§ 14.1. Connection of the control systems with the missile appearance parameters	243
§ 14.2. Space structure of the technical solutions and connections between its elements	244
§ 14.3. Conception about achievable accuracy of aiming and generalized characteristics of the control system	254
§ 14.4. General type digram of the control system taking into account at the appearance formation . . .	258
<i>Chapter 15. Appearance formation automatic system of the missile</i>	<i>262</i>
§ 15.1. General structure and system formation principles . .	262
§ 15.2. Subsystem of the tactics-technical task analysis and technical conception selection	266
§ 15.3. Body arrangement subsystem	269
§ 15.4. Others subsystems, participated in the parametric calculations cycle	274
Literature for the first section	283
The second section. STRUCTURE, KINEMATICS AND DYNAMICS OF LINKAGES OF AIRCRAFT CATAPULT DEVICES	286
<i>Chapter 16. Structure of linkages of aircraft catapult devices</i>	<i>286</i>
§ 16.1. Basic conception and definitions of the mechanism theory	286
§ 16.2. Classification of kinematic pairs, kinematic chains and mechanisms	289
§ 16.3. Number of degrees of freedom of a mechanism. Mechanisms with redundant constraints . . .	296
§ 16.4. The Assur's principle of type composition and forming of linkages	303
§ 16.5. Type analysis and type synthesis of plane linkages	314

§ 16.6. Survey of type diagrams of plane linkages used in ACD	319
§ 16.7. Classification of linkages used in ACD	325
§ 16.8. Synthesis of type diagrams of six-link plane linkages for ACD	330
<i>Chapter 17. Kinematic analysis of ACD linkages</i>	<i>337</i>
§ 17.1. Kinematic diagram of a mechanism and its parameters	337
§ 17.2. Position function of a mechanism. Transfer functions	339
§ 17.3. Branches of linkages	342
§ 17.4. Criteria of quality of motion transmission for linkages	353
§ 17.5. Problems of kinematic analysis of linkages	360
§ 17.6. By-group technique of analysis of linkages	362
§ 17.7. Analysis of mechanisms by the method of projection of closed vectorial contours on coordinate axes	366
§ 17.8. Analysis of two-link structural groups	371
§ 17.9. Analysis of four-link structural groups	381
§ 17.10. Analysis of plane linkages containing two-link structural groups	388
§ 17.11. Algorithms of analysis of ACD linkages	393
§ 17.12. Calculation of transmission criterion for ACD linkages	411
§ 17.13. Numerical results of analysis of ACD mechanisms	433
<i>Chapter 18. Kinematic synthesis of ACD linkages</i>	<i>445</i>
§ 18.1. Principal condition and additional conditions of synthesis of plane linkages	445
§ 18.2. Classification of synthesis problems of linkages	449
§ 18.3. Analytical-optimization synthesis method of ACD linkages	452
§ 18.4. Synthesis of mechanism in form of shears (diagram N2)	465
§ 18.5. Synthesis of six-link mechanism with swinging cylinder (diagram N7)	472
§ 18.6. Synthesis of eight-link mechanism with swinging cylinder (diagram N10)	478

<i>Chapter 19.</i>	Elements of computer-aided-design of linkages mechanisms	489
§ 19.1.	Preliminary remarks	489
§ 19.2.	General composition of type and kinematic analysis and synthesis computer system of linkages	490
§ 19.3.	CAD in type analysis of linkages	494
§ 19.4.	Identification of type diagrams of linkages	496
§ 19.5.	CAD in type synthesis of linkages	498
§ 19.6.	CAD in kinematic analysis of linkages	500
§ 19.7.	CAD in kinematic synthesis of linkages	503
§ 19.8.	Computer albums of mechanisms	504
<i>Chapter 20.</i>	Dynamic analysis system of the ACD504 mechanisms	505
§ 20.1.	Statement of a question of the ACD mechanisms dynamic designing	505
§ 20.2.	Dynamic and mathematic models of elastic linkages, elastic detachable article and aircraft-carrier elastic wing	507
<i>Chapter 21.</i>	Optimum dynamic synthesis system of the ACD mechanisms	614
§ 21.1.	Investigation of the states region of the ACD complex dynamic system	617
§ 21.2.	Optimum dynamic synthesis of the ACD mechanisms	624
<i>Chapter 22.</i>	Dynamic synthesis system of the ACD mechanisms with taking into account of the action of the determinate forces and accidental disturbances	655
§ 22.1.	Statement of a question	655
§ 22.2.	Dynamic synthesis algorithm of the ACD mechanisms with taking into account of the action of the determinate forces and accidental disturbances	665
§ 22.3.	Example of the numerical investigation	670
<i>Chapter 23.</i>	Perfection ways of the perspective aircraft catapult devices on the base of using of the adaptive control circuits	679
§ 23.1.	Limited possibilities analysis of aircraft catapult devices with the fixed tuning of parameters and	

the substantiation of the necessity of transition in perspective to the adaptive circuits	679
§ 23.2. Mathematical apparatus of the synthesis of the adaptive algorithms by methods of the inverse problems of dynamics	684
§ 23.3. Basic directions and ways of the aircraft catapult devices development with an adaptive control circuits for the opened and closed loops . . .	697
Literature for the second section	699
The third section. VIBRODYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE AIR-TO-AIR MISSILES	702
<i>Chapter 24. External loads, acting at the air-to-air missiles on the type stages of the exploitation</i>	<i>702</i>
§ 24.1. Mathematical representation of the loads for the air-to-air missile movement jointly with the aircraft-carrier	702
§ 24.2. The loads, active at the air-to-air missile on the start and at the autonomous flight	711.
<i>Chapter 25. Vibrations determination methods of the air-to-air missiles at the type stages the exploitation jointly with the aircraft-carrier . .</i>	<i>737</i>
§ 25.1. Vibrations of the air-to-air missiles in the taking-off and landing conditions of the aircraft . .	737
§ 25.2. Vibration of the air-to-air missiles in the conditions of the movement jointly with the aircraft-carrier	745
<i>Chapter 26. Vibrations determination methods of the air-to-air missiles at an autonomous flight . .</i>	<i>750</i>
§ 26.1. Vibrative status of the air-to-air missiles with the homogeneous properties on all length . .	750
§ 26.2. About connection of the pressure pulsation in the camera of the working engine with the vibration value of the engine corps	757
§ 26.3. Influence analysis of unhomogeneity of mass-hard parameters and damping parameters on the vibrative status of the air-to-air missile . . .	762
§ 26.4. Calculation of air-to-air missile vibrations with a big degree of unhomogeneity of the parameters . .	766
Literature for the third section	774

Учебное издание

Нестеров Виктор Антонович

Пейсах Эдуард Евсеевич

Рейдель Анатолий Львович

Соколовский Геннадий Александрович

Станкевич Александр Иванович

**ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ РАКЕТ
КЛАССА «ВОЗДУХ—ВОЗДУХ»
И АВИАЦИОННЫХ КАТАПУЛЬТНЫХ УСТАНОВОК ДЛЯ НИХ**

Редактор *Л.Н. Перцева*

Техн. редактор *Т.С. Евгеньева*

ИБ №257

Лицензия ЛР № 040211 от 07.04.97 г.

Подписано в печать 15.04.99 г.

Формат 60 × 84 1/16. Бумага газетная.

Гарнитура Таймс. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 46,03. Уч.-изд. л. 47,34.

Тираж 500 экз. Заказ 2082. С. 15.

Издательство МАИ

125871, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Типография Издательства МАИ

125871, Москва, Волоколамское шоссе, 4